



UM ESTUDO DO MÉTODO I-KSGFD PARA A SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS TERMO-HIDRÁULICOS

Rozieli Santos e Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do
Carmo
Su Jian

Rio de Janeiro
Maio de 2014

UM ESTUDO DO MÉTODO I-KSGFD PARA A SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS
TERMO-HIDRÁULICOS

Rozieli Santos e Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

Prof. Su Jian, D.Sc.

Prof. Webe João Mansur, D.Sc.

Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MAIO DE 2014

Silva, Rozieli Santos e

Um estudo do método I-KSGFD para a simulação de circuitos termo-hidráulicos / Rozieli Santos e Silva - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

XI, 47p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Su Jian

Dissertação (Mestrado) - UFRJ / COPPE / Programa de Engenharia Nuclear, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 43 - 47

1. Circuitos Termo-hidráulicos. 2. Malha deslocada. I. Carmo, Eduardo Gomes Dutra do *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

Agradecimentos

A Deus por ter permitido que esse sonho se tornasse realidade.

Aos meus pais, Rosângela e Gilmar, e irmãos, Ramon e Rosana, por terem me apoiado, me incentivado e me fornecido amor e encorajamento para cumprir esta jornada de estudos.

Ao Roberto, meu noivo e futuro esposo, pela sua presença constante em minha vida. Obrigada pelas conversas, estudos, palavras de estímulo, pelo amor, carinho, compreensão, companheirismo que foram indispensáveis nestes anos que estamos juntos e que se tornaram um legado em nossas vidas.

À Barbara, Beatriz, Eliene, Nathany, e demais amigas de repúblicas, pela paciência em ouvir meus problemas, participar de minhas aflições e pelas brincadeiras e festas que fizemos juntas durante todos estes três anos juntas.

Aos demais familiares e amigos, que viveram este momento comigo e estiveram o tempo todo torcendo por mim durante este percurso.

Ao Professor Eduardo Gomes Dutra do Carmo, por ter aceito o meu pedido de orientação e pela aprendizagem que obtive através de seus ensinamentos. Ao Professor Su Jian, pelos conhecimentos de Engenharia de Reatores que foram úteis para o presente trabalho.

À banca por ter aceito o meu convite e pela colaboração para a dissertação.

Ao CNPq e à Faperj pelo apoio financeiro.

Resumo de Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau do Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM ESTUDO DO MÉTODO I-KSGFD PARA A SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS TERMO-HIDRÁULICOS

Rozieli Santos e Silva

Maio/2014

Orientadores: Eduardo Gomes Dutra do Carmo
Su Jian

Programa: Engenharia Nuclear

A análise transiente de escoamentos de fluidos em circuitos termo-hidráulicos com propósitos de simulação em tempo real geralmente se dá por meio de modelos (lineares e não-lineares). E para facilitar e encontrar a solução destes modelos, este trabalho objetiva resolver os problemas de circuitos termo-hidráulicos com um novo método de integração explícita I-KSGFD (desenvolvido em CARMO *et al.*), para os casos não lineares, usando tabelas da ASME (American Society of Mechanical Engineers) nas proximidades de saturação do líquido, visando gerar uma simulação em tempo real. O método de integração temporal KSGFD foi desenvolvido primeiramente por BRENNY (2012), para casos de problemas lineares e em CARMO *et al.* foi feita uma nova adaptação do método para problemas de casos não lineares, e sendo este último o método denominado de I-KSGFD. Neste trabalho foi feita uma comparação com o método de Euler explícito, onde se pôde comprovar através de alguns exemplos a superioridade do método I-KSGFD em relação ao Método de Euler.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A STUDY OF THE I-KSGFD METHOD FOR SIMULATION
THERM-HYDRAULIC CIRCUITS

Rozieli Santos e Silva

May/2014

Advisors: Eduardo Gomes Dutra do Carmo
Su Jian

Department: Nuclear Engineering

The transient analysis of fluid flow in thermal hydraulic circuits for purposes of real-time simulation usually takes place by means of models (linear and nonlinear). And to facilitate and find the solution of these models, this paper aims to solve the problem of term hydraulic circuits with a new method of explicit integration I-KSGFD (developed in CARMO *et al.*), for nonlinear cases, using tables of ASME (American Society of Mechanical Engineers) near saturation of the liquid in order to generate a simulation in real time. The method of temporal integration KSGFD was developed primarily by BRENNY (2012), cases for linear problems and was taken in CARMO *et al.* a new adaptation of the method to problems of nonlinear cases, and being the latter the method named of I-KSGFD. In this study a comparison with the explicit Euler method, is carried out where it is shown through some examples the superiority of the I-KSGFD method over the Euler method.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	4
2.1	Considerações	4
2.2	Um breve histórico dos Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos	5
2.3	Aplicações dos Métodos de Diferenças Finitas em Malha Deslocada	5
2.4	Escoamentos Multifásicos	7
3	Integração Espacial do Modelo Drift Flux	12
3.1	Integração Espacial do Modelo no Volume de Controle via o Método dos Volumes Finitos	12
3.2	Linearização das Equações de Balanço em nível de célula fluida	16
4	Método de Diferenças Finitas em Malha Deslocada de Ordem K Melhorado (I-KSGFD)	22
4.1	Características	22
4.2	O Método I-KSGFD ($K=2$)	23
4.3	Esquemas Explícitos	24
4.4	O esquema I-KSGFD ($K=2$)	24
4.5	Condições de Partida	27
5	Resultados Numéricos	30
5.1	Experimento 1 (Planta horizontal)	32
5.2	Experimento 2 (Planta horizontal)	35
5.3	Experimento 3 (Planta Inclinada de 30 graus)	37
5.4	Experimento 4 (Planta Inclinada de 30 graus)	40
6	Conclusão	41
	Referências	43

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Tipos de padrões de escoamentos em tubos verticais	8
Figura 2.2 - Tipos de padrões de escoamentos em tubos horizontais	9
Figura 3.1 - Esquematização de uma planta em torno de uma célula w	16
Figura 3.2 - Representação da Malha de Volume Finito nas células a , b e c	21
Figura 4.1 - Intervalo da solução do problema (4.1)	24
Figura 5.1 - Planta usada nos experimentos	31
Figura 5.2 - Vazão na Célula 0 (Experimento 1)	33
Figura 5.3 - Vazão na Célula 3 (Experimento 1)	33
Figura 5.4 - Vazão na Célula 6 (Experimento 1)	34
Figura 5.5 - Vazão na Célula 9 (Experimento 1)	34
Figura 5.6 - Todas as Vazões (Experimento 1)	35
Figura 5.7 - - Todas as Vazões (Planta Horizontal, $\Delta = 0, 1P$)	36
Figura 5.8 - Vazão na Célula 0 (Experimento 3)	37
Figura 5.9 - Vazão na Célula 3 (Experimento 3)	38
Figura 5.10 - Vazão na Célula 6 (Experimento 3)	38
Figura 5.11 - Vazão na Célula 9 (Experimento 3)	39
Figura 5.12 - Todas as Vazões (Experimento 3)	39

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 - Δt mínimo para se obter a vazão(Planta Horizontal).....	35
Tabela 5.2 - Δt mínimo para se obter a vazão(Planta Inclinação de 30 graus)	40

Lista de Símbolos

Símbolos comuns

- A* - Área da seção transversal do tubo
g - Aceleração da gravidade
L - Comprimento entre dois centros de duas células vizinhas
P - Pressão
H - Entalpia
S - Seção da célula
W - Vazão de massa que atravessa as seções
t - Tempo
U - Vetor solução do sistema
u - Velocidade da fase
V - Volume da célula
AEV - Área de escoamento da válvula
CPA - Coeficiente de perda por atrito viscoso
CPS - Coeficiente de perda por singularidade
CPV - Coeficiente de perda por válvula
GCB - Ganho de carga devido à perdas locais(singularidades)
PCA - Perda de carga devido ao atrito viscoso
PCV - Perda de carga devido à passagem por válvula
HEAD - Altura manométrica da bomba
FHB - Fluxo de entalpia devido à presença de bombas numa seção
 q''' - Taxa de geração de calor
Y - Cota gravitacional
NO - Número de seções de saída
NI - Número de seções de entrada
D - Diferença relativa (vapor-líquido)

Símbolos Gregos

- α - Fração volumétrica

ρ - Massa específica
 $\bar{\tau}$ - Tensor
 Δ - Variação de uma grandeza

Subscritos

w - Célula qualquer a ser avaliada
 l - Célula à esquerda da célula a ser avaliada
 r - Célula à direita da célula a ser avaliada
 i - Entrada na seção da célula a ser avaliada
 o - Saída na seção da célula a ser avaliada
 b - Célula analisada numericamente
 a - Célula à esquerda da célula b
 c - Célula à direita da célula b
 i' - Entrada na seção da célula a
 o' - Saída na seção da célula c
 in - Entrada
 out - Saída
 lq - Líquido
 st - Vapor
 m - Mistura

Sobrescritos

n - Variável relativa ao passo de tempo
 j - Variável relativa ao passo do espaço
 $*$ - Referente a uma iteração procurada pelo Metodo KSGFD
 v - Volume

Capítulo 1

Introdução

Análise numérica de equações diferenciais tem se tornado uma importante ferramenta na solução de problemas em diversas áreas do conhecimento, como a geofísica, as engenharias nuclear, civil e mecânica entre outras áreas da ciência.

Conforme MELO (2007), na engenharia nuclear, esta análise tornou-se bastante útil, por exemplo, para simular o fluxo de nêutrons no núcleo do reator e para simular os escoamentos de fluidos em seus diferentes circuitos. Neste trabalho é estudado o escoamento bifásico de fluidos (líquido/vapor) em plantas termo-hidráulicas e para isto será necessário um conjunto de equações que modelam a conservação de massa, de momento e de energia consideradas em um volume de controle. Entretanto, encontrar solução analítica destas equações não é uma tarefa fácil e além disso encontrar a solução numérica requer um custo computacional muito elevado.

Para simplificar este problema, existem vários modelos que simulam uma situação física mais simples (obtendo mais rápido uma solução) com o objetivo de se aproximar cada vez mais da realidade. Dentre estes modelos, destaca-se o modelo *drift flux* de equilíbrio térmico, onde pode-se supor que a velocidade do vapor é diferente da velocidade do líquido. Este modelo, no que tange à simplicidade das equações e a base de dados, fornece as ferramentas mais confiáveis e precisas para lidar com o escoamento bifásico.

Para encontrar a solução do sistema de equações diferenciais de primeira ordem deste modelo, este trabalho faz um estudo de um método novo denominado: *Diferenças Finitas de Malha Deslocada de ordem K Melhorado* (I-KSGFD, desenvolvido por CARMO *et al.*), com o objetivo de verificar a possibilidade de aplicar este método para a solução do sistema acima descrito. Este método é a versão melhorada do método KSGFD encontrada em BRENNY (2012), e é usado pela primeira vez aqui neste problema. O aprimoramento deste método surgiu pois o método KSGFD

se mostrou muito eficiente nos resultados de problemas lineares, visto em BRENNY (2012) e então buscou-se que este mesmo efeito também fosse útil em problemas não lineares, como são nos casos de plantas termo-hidráulicas. A abordagem é baseada no método de diferenças finitas explícito e no conceito de malha deslocada de ordem K .

Conforme CARMO *et al.*, o método I-KSGFD admite uma solução desacoplada do sistema resultante de equações algébricas além de possuir boas propriedades de estabilidade e de convergência em todos os problemas lineares estudados. Além disso, permite intervalos de tempo relativamente grandes, facilitando, desta forma, simulações de longa duração. Estas são características desejáveis para um método ser aplicável a circuito termo-hidráulicos. Todavia, o método ainda não foi testado em circuitos termo-hidráulicos que é um problema não linear, e isto é o objetivo principal deste trabalho. Como visto em CARMO *et al.*, o método I-KSGFD é baseado na integração temporal explícita das equações, com precisão de alta ordem e com erros de truncamento precisamente estimados. Este método tornou-se, como já foi dito anteriormente, mais atraente devido à sua aplicabilidade em problemas de primeira ordem em geral, além da sua fácil implementação computacional e do fato de ter se mostrado robusto quando a integração espacial é feita usando o método dos volumes finitos.

Como é de conhecimento, um método explícito parte da desvantagem de ser condicionalmente estável (conforme indicado pelo Critério de Courant), de ter amortecimentos espúrios e erros de fase. Entretanto, conforme CARMO *et al.*, o método I-KSGFD, particularmente, tem sido imune a estes erros (com exceção óbvia dos limites de Courant) em todos os problemas lineares estudados onde é usado para integração espacial o método de volumes finitos.

O estudo do método I-KSGFD se justifica pelo fato do método ser elaborado com a finalidade de ser econômico e facilmente paralelizável, matrizes de simples inversão, similares àquelas habitualmente apresentadas em elementos finitos e aplicáveis em plantas de grande porte. O método possui baixo custo computacional e pode ter grandes vantagens em aplicações na engenharia nuclear. Como exemplo de sua adequação ao método dos volumes finitos usado na integração espacial, tem-se que as matrizes quadradas do sistema de célula fluida que compõem o modelo Drift Flux adotado (de 3 equações), possuem ordem 3 e apenas a matriz bloco 2×2 deverá ser invertida (esta de rápida e fácil inversão), pois os outros termos são nulos. Por outro lado, se o modelo fosse o modelo de dois fluidos, de 6 equações (1 equação de balanço para cada fase), seria necessário inverter apenas o bloco 4×4 da matriz

quadrada de ordem 6.

O esquema denominado KSGFD (*K-order Staggered Grid Finite Difference*), foi desenvolvido recentemente por BRENNY (2012), com o objetivo de solução de problemas em geofísica. Esta nova versão, o método I-KSGFD (Improved K-order Staggered Grid Finite Difference), apresentado e desenvolvido por CARMO *et al.*, veio para corroborar a eficiência do método visto por BRENNY (2012) e contribuir nas simulações de circuitos termo-hidráulicos, visando simulação em tempo real de plantas de grande porte. O algoritmo estudado e desenvolvido por CARMO *et al.*, para o estudo do método I-KSGFD foi implementado computacionalmente usando a linguagem C++.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 é apresentada a importância em estudar a área termo-hidráulica, justificada através da ascensão e influência da energia nuclear no mundo. Além disso é feita uma revisão bibliográfica sobre Métodos de Diferenças Finitas e Métodos de Volumes Finitos além de fazer uma apresentação do Modelo Drift Flux adotado. No Capítulo 3 é feita a integração espacial do Modelo Drift Flux, seguidamente das linearizações em nível de célula fluida destas equações. No capítulo 4 é apresentado o método I-KSGFD como é desenvolvido em CARMO *et al.* para $K = 2$, para o seu estudo sistemático. No Capítulo 5 é feita a aplicação do Método em diferentes plantas para um estudo preliminar de sua robustez. Finalmente são apresentadas conclusões sobre os resultados obtidos do capítulo anterior.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Considerações

Desde a metade do século XX que a energia nuclear tem evoluído em pesquisa e em indústrias (que fornecem 17% da eletricidade do mundo). Em números mais precisos, pode-se verificar que até a metade do ano de 2013, conforme os dados no Sistema de Informação de Reatores de Potência (PRIS, do IAEA), existem 434 reatores em operação e 69 em construção. Isso significa que a Energia Nuclear tem ganhado forças e a cada dia vem tornando-se relevante como fonte de energia para a sociedade.

Com base nisto, este trabalho propõe estudar e simular os mecanismos característicos de uma planta termo hidráulica nuclear com o propósito de auxiliar na elaboração de uma desta nas indústrias atuais. Cabe lembrar que estas plantas simuladas são organizadas de modo que seu funcionamento seja o mais próximo da realidade possível. Geralmente o funcionamento de um sistema termo hidráulico é baseado numa fonte de calor que aumenta a temperatura de um determinado fluido (em trabalho), onde a energia térmica então acumulada é subsequentemente convertida em vapor numa caldeira. O vapor entra numa turbina a vapor sob alta pressão induzindo energia rotacional. E finalmente, o eixo da turbina que está diretamente ligada a um gerador alimenta energia elétrica a uma rede de distribuição.

Para se esquematizar precisamente o funcionamento de plantas assim, produzindo erros de aproximação ínfimos, é utilizado aqui um novo método de diferenças finitas explícito de integração no tempo que é de fácil implementação. Conforme resultados obtidos na tese, por BRENNY (2012), este esquema é de alta ordem e até o momento tem-se mostrado livre de amortecimentos explícitos como também livre de defasagem (livre de fase) no período quando a solução é periódica.

Portanto faz-se necessário entender, além do método adotado, um pouco mais do modelo em que se baseia a planta esquematizada.

2.2 Um breve histórico dos Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos

Desde o início da década de 70 que o método de diferenças finitas vem sido empregado em grande proporção na área de fluidos. E é também desde então que os analistas da área têm se concentrado na tentativa de dominar a não linearidade das equações que modelam estes escoamentos. Este fato pode ser visto por CHORIN (1968), BEAM *et al.* (1978), SOD (1978) e DELHAYE *et al.* (1981).

Além disso, o interesse do uso deste método é que, (VERZICCO *et al.*, 1996), a técnica é muito mais flexível em geometrias complexas. Devido a esta propriedade, recentemente tem sido mostrado que o método de diferenças é forte candidato para a simulação direta quando as propriedades conservativas são mantidas.

Com o avanço das pesquisas e dos adventos computacionais, tem se notado o uso mais frequente do Método de Volumes Finitos. Neste método, as equações aproximadas são obtidas através das equações de conservação. Ou seja, o método é baseado na solução de uma forma integral de equações de conservação que regulam a massa, energia e quantidade de movimento de uma malha numérica constituída por um número finito de volumes de controle adjacentes de topologia completamente arbitrária (DEMIRDZIC *et al.*, 1995).

Segundo CAI (2001), o clássico Método de Volumes Finitos é usado geralmente para discretizar computacionalmente as equações de fluido dinâmica. Este método tem sido vantajoso por manter as conservações e a fidedignidade física do fenômeno, além de capturar choques, produzir matrizes simples, ser aplicável a uma gama de equações de fluxo de fluidos, tratando eficazmente o problema de Neumann em malhas não uniformes.

2.3 Aplicações dos Métodos de Diferenças Finitas em Malha Deslocada

Diversos pesquisadores, ao longo dos últimos anos, vêm se destacando no estudo de Métodos de Diferenças Finitas em malha deslocada. Estes têm apresentado sempre métodos eficazes e simples que resolvem problemas de difícil solução, e que têm

se tornado úteis em grandes aplicações em indústrias e/ou em centros de pesquisas. Dentre tais, pode-se destacar:

VIRIEUX (1984) que utiliza o método de diferenças finitas em malha deslocada para modelar a propagação de onda P-SV em meio heterogêneo. Para isso, o autor utilizou o esquema de diferenças usado em Madariaga(1976), para dividir o modelo de propagação. Através deste modelo ele usou a velocidade e o tensor de cisalhamento como quantidades físicas conjugadas numa malha difícil para o meio adotado.

LEVANDER (1988) adotou o esquema de diferenças explícito de Madariaga-Virieux de malha deslocada que tem a qualidade de poder modelar qualquer variação nas propriedades do material. O modelo pode ser usado para modelar precisamente a propagação de onda em meio misto elástico-acústico.

GILLES *et al.*(2000), fizeram uma comparação de estabilidade e precisão de malha deslocada de 2ª e 4ª ordens de exatidão em relação à discretização de malha não-deslocadas de 3ª ordem combinadas com o esquema de integração no tempo de 2ª ordem para a modelagem do fenômeno dispersivo linear de ressonância em meio Lorentz unidimensional. Na segunda parte, os autores fazem outra comparação da utilização de malhas não deslocadas e deslocadas para modelar a evolução transiente de poucos ciclos ópticos.

ZHANG *et al.* (2002) utilizam o método de diferença finita explícito de 4ª ordem em malha deslocada para as equações hiperbólicas de Maxwell. Os pesquisadores apresentam operadores de diferenças estáveis para implementar as condições de fronteira e interface. Além disso a convergência de 4ª ordem obtém-se na presença de propriedade diélicas descontínuas e magnéticas, assim como as condições de contorno.

ZENG *et al.* (2001) obtém a partir da Equação de Biot um sistema de equações hiperbólicas de primeira ordem que simula a propagação de onda elástica em meio poroelástico heterogêneo. O sistema é discretizado em esquema de diferenças finitas com malha deslocada tanto no espaço como no tempo. Os resultados mostraram que o esquema tem maior precisão do que o de 2ª ordem. Além disso o esquema mostrou-se bastante estável.

O'BRIEN (2010) exhibe um método de diferenças de malha deslocadas 3D(SG) e de malha deslocada rotacional (RSG) de 4ª ordem no espaço e 2ª ordem no tempo para a equação de Biot. Os métodos foram comparados com a solução semi-analítica e verificou-se o erro máximo de 0,035 do Método SG e 0,041 para o Método RSG.

SATO (2006) faz uma nova configuração de malha diagonalmente deslocada

usando o método de diferenças finitas no domínio de tempo para a análise do campo de ondas elásticas. A estrutura desta malha é a mesma da malha deslocada padrão. Esta malha permite uma implementação direta de superfícies livres com formas complexas.

LIU *et al.* (2009) obtém fórmulas de diferenças finitas explícitas e nova fórmula implícita de malha deslocada para derivadas de 1ª ordem e com qualquer ordem de precisão pela Teoria de Ondas Planas e Expansão em Série de Taylor. Além disso, chega-se a um algoritmo prático de tal modo que as equações de matrizes tridiagonais são formadas pelas diferenças finitas decorrentes da expansão fracionada das derivadas.

Sendo assim, similarmente aos artigos mencionados, este trabalho também vai se concentrar em esquemas de diferenças finitas avançadas no tempo e em malhas deslocadas que permitirá encontrar soluções desacopladas do sistema de leis conservativas. Para isso, será apresentado no capítulo 4 um novo esquema de integração no tempo, que foi desenvolvido por CARMO *et al.*, e que avaliará a solução do sistema com alta precisão.

2.4 Escoamentos Multifásicos

Define-se escoamento multifásico o fenômeno pelo qual há a presença de mais de uma fase. Entende-se por fase um determinado fluido ou material que se comporte como fluido, ou seja, uma substância pura ou um conjunto de substâncias químicas (que formam um sistema multicomponente) que agem como fluido em determinado escoamento. Como exemplo de mistura pura tem a água e como um sistema multicomponente tem-se o ar atmosférico (REZENDE, 2008).

Um sistema multifásico também pode ser definido como a região onde existem dois ou mais fluidos imiscíveis separados por uma interface. As interfaces são as regiões onde ocorrem as transferências de calor, dissolução e também ocorrem as trocas de informações. Estas podem ser conexas (por exemplo, estratificado, anular, etc) ou desconexas (como, por exemplo, bolhas, gotas, etc), ou então intermitentes, quando há uma combinação entre as duas classes (por exemplo, padrão anular com gotas, etc) (PALADINO, 2005, SOUZA, 2010).

Um dos escoamentos mais comuns encontrados na área nuclear é o escoamento multifásico de dois fluidos (escoamento bifásico). Entretanto, um dos pontos mais difíceis da engenharia em lidar com fluidos deste tipo está no fato de que a massa, a energia e o momento são muito sensíveis à distribuição geométrica ou aos com-

ponentes topológicos dentro do fluxo. Como exemplo tem-se que a geometria pode afetar fortemente a área interfacial disponível para a massa, o momento e a troca de energia. A dependência entre a fase/componente e a geometria do fluxo (BRENNEN, 2005), é conhecida como padrão de escoamento. Como na modelagem deste trabalho é de interesse investigar o comportamento do fluxo bifásico líquido - gás (água e vapor) em canal horizontal ou vertical, se faz necessário então conhecer os padrões de escoamento que existem e quais são os mais adequados para a solução do problema.

Em dutos verticais (por exemplo, um elemento combustível no BWR), os padrões de escoamentos são do tipo: Escoamento em bolhas (bubbly flow), Intermitente ou golfadas (slug flow), de transição (churn flow) e anular (annular flow). Tais padrões podem ser visualizados e diferenciados na figura ¹ a seguir:

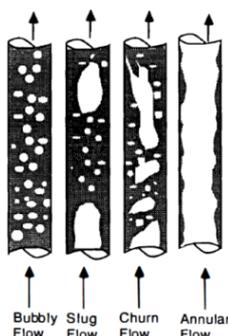


Figura 2.1: Tipos de padrões de escoamentos em tubos verticais (Retirada de TODREAS *et al.* (1989)).

Como visto em TODREAS *et al.* (1989), o regime em bolhas é distinguido pela presença de bolhas de vapor dispersas numa fase líquida contínua. As bolhas de ar podem ser de tamanho e forma variáveis. Bolhas de 1 mm, ou menos são esféricas, mas bolhas maiores têm formas variáveis. Fluxo Intermitente ou em golfadas distingue-se pela presença de tampões de gás (ou grandes bolhas) separadas por intermitências líquidas. O filme de líquido ao redor do tampão de gás normalmente se move para baixo. Várias pequenas bolhas podem também ser dispersadas no interior do líquido. O fluxo de transição é mais caótico, mas com o mesmo caráter básico, do fluxo intermitente. Fluxo anular distingue-se pela presença de um núcleo contínuo de gás rodeada por um anel de fase líquida. Se o fluxo de gás no núcleo é suficientemente elevado, este pode estar carregando gotículas de líquido.

Já nos escoamentos em dutos horizontais os padrões de escoamentos são: Estratificado liso (Stratified Flow), Estratificado ondulado (Wavy Flow), Golfadas (Slug

¹Retirada de TODREAS *et al.* (1989)

Flow), Tampões (Plug Flow), Bolhas Alongadas (Bubbly Flow) e Anular (Annular Flow), como pode ser observado na figura ²:

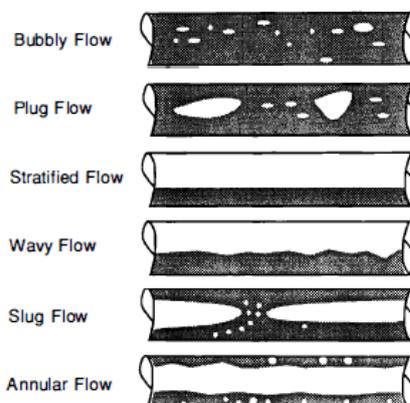


Figura 2.2: Tipos de padrões de escoamentos em tubos horizontais (Retirada de Todreas e Kazimi (1989)).

É necessário lembrar que estes padrões podem ser alternados durante o mesmo duto, passando de um padrão para o outro de acordo com as propriedades das fases, as frações volumétricas, inclinação e até mesmo diâmetro.

Uma maneira de descrever estas características físicas de cada fluido do sistema bifásico é através da construção de modelos. Os modelos mais conhecidos que aproximam o sistema envolvido são: Modelo Empírico, Modelo Homogêneo e Modelo Mecanicista.

No modelo empírico é necessário obter um conjunto de correlações por meio de dados experimentais, podendo especificar ou não os padrões de escoamento do fluxo.

Conforme SHI *et al.*(2005), os modelos homogêneos supõem que as propriedades do fluido podem ser representadas por propriedades das misturas, e assim, as técnicas dos fluidos monofásicos podem ser aplicadas na mistura. Estes modelos podem permitir também deslizamentos entre as fases e isto requer certo número de parâmetros empíricos. Modelos homogêneos com deslizamento são chamados Drift Flux. Modelos Drift Flux se difere do modelo homogêneo pois considera que as velocidades das fases não são iguais, e portanto, em sua equação de momento, há um termo de velocidade que representa a diferença relativa entre vapor-líquido. Já no Modelo de dois fluidos há uma equação de conservação para cada fase, ou seja, quando as fases estão desacopladas. Neste modelo, o padrão de escoamento observado normalmente é estratificado liso, ondular ou anular, onde é normalmente observado o desacoplamento entre as fases.

²Retirada de Todreas e Kazimi (1989)

Em geral tem sido demonstrado na literatura que os modelos mecanísticos preveem com precisão o padrão de escoamento do líquido (detalhando cada padrão) e as retenções temporárias de escoamento. Estes modelos são baseados em fenômenos físicos do complexo sistema de fluidos e foram desenvolvidos significativamente nos últimos anos (ALADWANI, 2003).

Mas pode-se considerar na verdade que o modelo Drift Flux é um modelo mecanicista simples quando os padrões de escoamento estão previstos para serem Escoamento em bolhas (bubbly flow) ou Escoamento intermitente/com golfadas (slug flow). E ao contrário de modelos mecanicistas mais elaborados, modelos Drift Flux são contínuos, diferenciáveis e relativamente rápidos de calcular (SHI *et al.*, 2005). Portanto, para que haja um menor custo computacional, este modelo comporta características em sua construção de modo que haja simplificações na solução. Estas aproximações devem sempre manter a qualidade do escoamento e traduzir o fenômeno mais próximo da realidade possível.

As equações de balanço de massa, momento e energia que compõem o modelo Drift Flux a seguir, foram obtidas com base no trabalho de MELO (2007) e podem ser reencontradas numa gama de artigos/trabalhos da literatura.

Equação de Balanço de Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

Equação de Balanço de Energia

$$\frac{\partial(\rho H - P)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho H \mathbf{u} + \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho}\right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D] = -\nabla \cdot \mathbf{q}''' \quad (2.2)$$

Equação de Balanço de Quantidade de Momento linear

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho}\right) \mathbf{u}_D \otimes \mathbf{u}_D] = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \mathbf{g} \quad (2.3)$$

onde

ρ - densidade da mistura;

ρ_{st} - densidade do vapor;

ρ_{lq} - densidade do líquido;

\mathbf{u} - velocidade da mistura;

\mathbf{u}_D - velocidade do Drift Flux ou velocidade de deslizamento;

$\bar{\bar{\tau}}$ - tensor;

P - pressão;

H - entalpia;

H_{st} - entalpia do vapor;

H_{lq} - entalpia do líquido;

q'' - taxa de geração de calor;

α - fração de vazio.

Capítulo 3

Integração Espacial do Modelo Drift Flux

3.1 Integração Espacial do Modelo no Volume de Controle via o Método dos Volumes Finitos

Neste processo de integração espacial no volume do subdomínio será necessária a utilização do seguinte teorema:

Teorema 3.1. (Teorema da Divergência) - *Seja Ω uma região fechada e limitada no espaço, cuja fronteira é uma superfície uniforme Γ , orientada positivamente. Suponha que \mathbf{F} é um campo vetorial definido em um conjunto aberto U contendo Ω . Se \mathbf{F} é um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em U , então:*

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz &= \int \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} ds \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \oint_{\Gamma} (n_x F_x + n_y F_y + n_z F_z) ds. \end{aligned}$$

E assim, integrando a equação de conservação de massa no volume da célula, tem-se:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = \int_V f_m dV. \quad (3.1)$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{S_o} \rho u dS - \int_{S_i} \rho u dS = \int_V f_m dV. \quad (3.2)$$

Observando que $W_{o,w} = \int_{S_{o,w}} \rho u dS$ e $W_{i,w} = \int_{S_{i,w}} \rho u dS$, onde $W_{o,w}$ e $W_{i,w}$ são respectivamente as vazões de saída e entrada, e além disso lembrando que a densidade mássica média é dada por

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V_w} \int_V \rho dV, \quad (3.3)$$

a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{W_{o,w} - W_{i,w}}{V_w} = \frac{G_m}{V_w}, \quad (3.4)$$

onde $G_m = \int_V f_m dV$.

De forma análoga, integrando a equação de conservação de energia obtém-se que:

$$\int_V \frac{\partial(\rho H - P)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot [(\rho H \mathbf{u} + \alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D)] dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q}''' dV. \quad (3.5)$$

Note que a equação anterior também pode ser reescrita como

$$V_w \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{H} - \bar{P}) + \int_V \nabla \cdot [(\rho H \mathbf{u} + \alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D)] dV = Q_w,$$

pois $Q_w = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q}''' dV$, $\rho H \approx \bar{\rho} \bar{H}$ e \bar{P} é a pressão média no volume de controle. Além disso observa-se que:

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla \cdot [(\rho H \mathbf{u} + \alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D)] dV \\ &= \int_V \nabla \cdot \rho u H dV + \int_V \nabla \cdot [\alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D] dV \\ &= \int_{S_o} \rho u H dS - \int_{S_i} \rho u H dS + \int_{S_o} \alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D dS \\ &\quad - \int_{S_i} \alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D dS \\ &= W_o H_o - W_i H_i + H W_o - H W_i, \end{aligned}$$

onde $H W = A[\alpha(1-\alpha) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho} \right) (H_{st} - H_{lq}) \mathbf{u}_D]$. Como a entalpia é dada em cada

volume, é possível observar que a vazão estabelecida na entrada da célula w tem como referência a entalpia da célula l , assim como a vazão de saída da célula w tem como referência a entalpia dessa célula em análise. Com base nisso, pode-se escrever a equação de balanço de Energia como:

$$Q_w = V_w \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w H_w) - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right] - S_{i,w} + S_{o,w} - H_w G_{o,w} \quad (3.6)$$

onde

$$S_{i,w} = \begin{cases} W_{i,w} H_l + H W_{i,l} + F H B_{i,l}, & \text{se } W_{i,w} \geq 0 \\ W_{i,w} H_w + H W_{i,w}, & \text{se } W_{i,w} < 0 \end{cases}$$

e

$$S_{s,w} = \begin{cases} W_{o,w} H_w + H W_{o,w}, & \text{se } W_{o,w} \geq 0 \\ W_{o,w} H_r + H W_{o,r} + F H B_{o,r}, & \text{se } W_{o,w} < 0. \end{cases}$$

Quando as vazões $W_{i,w} < 0$ e $W_{o,w} < 0$, o fenômeno é chamado reversão de escoamento. O termo FHB existe pois há a presença de bomba na célula w da planta em análise.

Por outro lado, utilizando destes mesmos argumentos no processo de integração no volume, é possível obter a Equação de Balanço de Quantidade Momento escrita da seguinte forma:

Equação de balanço de quantidade de momento

$$\begin{aligned} & (L_{i,w} + L_{o,w}) \rho_w \frac{\partial u_{i,w}}{\partial t} + \frac{1}{2} [\rho_w (u_w^v) + \alpha_w (1 - \alpha_w) \left(\frac{\rho_{st,w} \rho_{lq,w}}{\rho_w} \right) (u_{D,w})^2] \\ & - \frac{1}{2} [\rho_l (u_l^v)^2 + \alpha_l (1 - \alpha_l) \left(\frac{\rho_{st,l} \rho_{lq,l}}{\rho_l} \right) (u_{D,l})^2] + \frac{1}{2} [(u_{i,w}) |u_{i,w}| (\rho_w - \rho_l)] \\ & + \frac{1}{2} (u_{D,w}) |u_{D,w}| [\alpha_w (1 - \alpha_w) \left(\frac{\rho_{st,w} \rho_{lq,w}}{\rho_w} \right) - \alpha_l (1 - \alpha_l) \left(\frac{\rho_{st,l} \rho_{lq,l}}{\rho_l} \right)] \\ = & P_l - P_w + \rho_{i,w} g (Y_l - Y_w) - C_{i,w} \left(\frac{W_{i,w} |W_{i,w}|}{\rho_{i,w}} \right) + \rho_{i,w} g HEAD_{i,w} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\rho_{i,w} = \frac{\rho_w + \rho_l}{2} \quad (3.8)$$

e

$$C_{i,w} = \left[\frac{CPA_{i,w}}{8(A_{i,w})^2} + \frac{CPS_{i,w}}{8(A_{i,w})^2} + \frac{CPV_{i,w}}{2(AEV_{i,w})^2} \right] \quad (3.9)$$

Neste conjunto de equações apresentado acima, observa-se que o modelo considera o fluxo atravessando pelo tubo horizontal ou vertical por meio de apenas uma

(1) seção de entrada e uma (1) seção de saída. Como o modelo proposto através do Método I-KSGFD é uma generalização adaptável a quaisquer tubos em diferentes plantas a analisar, será necessário compor nas equações o termo que caracteriza que o tubo possa ter de 1 a NI (Número de seções de entradas) e de 1 a NO (Número de seções de saídas), onde NI e NO serão valores solicitados pelo usuário na construção da planta. Portanto, as equações que descreverão o modelo serão dadas por:

Equação de Balanço de Massa

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\sum_{o=1}^{NO} W_{o,w} - \sum_{i=1}^{NI} W_{i,w}}{V_w} = \frac{G_m}{V_w}, \quad (3.10)$$

Equação de Balanço de Energia

$$Q_w = V_w \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w H_w) - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right] - S_{i,w} + S_{o,w} - H_w G_{o,w} \quad (3.11)$$

onde

$$S_{i,w} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{NI} (W_{i,w} H_l + H W_{i,l} + F H B_{i,l}), & \text{se } W_{i,w} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{NI} (W_{i,w} H_w + H W_{i,w}), & \text{se } W_{i,w} < 0, \end{cases}$$

e

$$S_{s,w} = \begin{cases} \sum_{o=1}^{NO} (W_{o,w} H_w + H W_{o,w}), & \text{se } W_{o,w} \geq 0, \\ \sum_{o=1}^{NO} (W_{o,w} H_r + H W_{o,r} + F H B_{o,r}), & \text{se } W_{o,w} < 0. \end{cases}$$

Equação de Balanço de Quantidade de Momento

$$\begin{aligned} & (L_{i,l} + L_{o,w}) \rho_w \frac{\partial u_{i,w}}{\partial t} + \frac{1}{2} [\rho_w (u_w^v)^2 + \alpha_w (1 - \alpha_w) \left(\frac{\rho_{st,w} \rho_{lq,w}}{\rho_w} \right) (u_{D,w})^2] \\ & - \frac{1}{2} [\rho_l (u_l^v)^2 + \alpha_l (1 - \alpha_l) \left(\frac{\rho_{st,l} \rho_{lq,l}}{\rho_l} \right) (u_{D,l})^2] \\ & = P_l - P_w + \rho_{i,w} g (Y_l - Y_w) - C_{i,w} \left(\frac{W_{i,w} |W_{i,w}|}{\rho_{i,w}} \right) + \rho_{i,w} g HEAD_{i,w}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

E assim, após as modificações no modelo, considerando a planta com NI e NO , a vazão e a área no centro do volume da célula serão:

$$W^v = \sum_{i=1}^{NI} \left(\frac{A_i}{A_{tot}} \right) W_i + \sum_{o=1}^{NO} \left(\frac{A_o}{A_{tot}} \right) W_o \quad (3.13)$$

e

$$A_{tot} = \sum_{i=1}^{NI} A_i + \sum_{o=1}^{NO} A_o \quad (3.14)$$

As características desta planta podem ser visualizadas na figura a seguir:

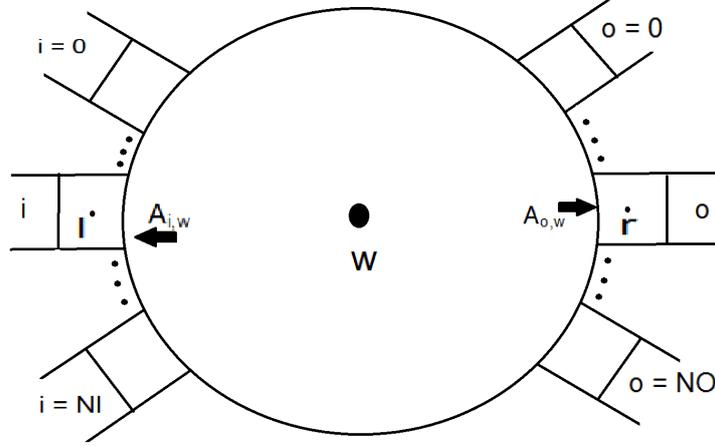


Figura 3.1: Esquematização de uma planta em torno de uma célula w .

3.2 Linearização das Equações de Balanço em nível de célula fluida

Considere b o número da célula fluida a analisar, onde possui NI número de entradas e NO número de saídas. Sejam H_b^j e P_b^j a entalpia e a pressão, respectivamente, na célula, e $W_{o,b}^j$ como a vazão na seção de saída e $W_{i,b}^j$, com $o \in 1, 2, 3, \dots, NO$ e $i \in 1, 2, 3, \dots, NI$. Então a expansão da Série de Taylor até a primeira ordem para a célula fluida b da massa específica será

$$\begin{aligned} \rho(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1}) &= \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n}) + \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial H} \right] (H_b^{j,n+1} - H_b^{j,n}) \\ &\quad + \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial P} \right] (P_b^{j,n+1} - P_b^{j,n}) + O(H^2) + O(P^2). \end{aligned}$$

A derivada da massa específica em relação ao tempo será

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1})}{\partial t} &= \frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial H} (H_b^{j,n+1} - H_b^{j,n}) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial P} (P_b^{j,n+1} - P_b^{j,n}) \right]. \end{aligned}$$

Além disso a equação de balanço na iteração $n + 1$ é dada por:

$$\frac{\partial \rho(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1})}{\partial t} + \frac{\sum_{o=1}^{NO} W(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1})_{o,b} - \sum_{i=1}^{NI} W(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1})_{i,b}}{V^j} = \frac{G(H_b^{j,n+1}, P_b^{j,n+1})_m}{V^j} \quad (3.15)$$

Substituindo a equação anterior na derivada da massa em relação ao tempo, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_b} \left(- \sum_{o=1}^{NO} W_{o,b}^{j,n+1} + \sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n+1} + G_{o,b}^{j,n+1} \right) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} (H_b^{j,n}, P_b^{j,n}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial H} (H_b^{j,n+1} - H_b^{j,n}) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \rho(H_b^{j,n}, P_b^{j,n})}{\partial P} (P_b^{j,n+1} - P_b^{j,n}) \right]. \end{aligned}$$

Para linearizar a equação de balanço de Energia, é preciso lembrar que as seguintes aproximações são válidas:

$$H_b^{j,n+1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} + \rho_b^{j,n+1} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \approx H_b^{j,n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} + \rho_b^{j,n} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \quad (3.16)$$

e

$$(WH)_b^{j,n+1} = H_b^{j,n} W_b^{j,n+1} + W_b^{j,n} H_b^{j,n+1} - W_b^{j,n} H_b^{j,n} \quad (3.17)$$

Portanto, aplicando as aproximações na equação de balanço de energia na iteração $n + 1$, encontra-se

$$\begin{aligned} V^b \left[\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \right) H_b^{j,n+1} + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \rho_b^{j,n+1} + \frac{\partial P^{j,n+1}}{\partial t} \right] \\ - S_{i,b}^{j,n+1} + S_{o,b}^{j,n+1} = H_b^{j,n} G_b^{j,n} + Q_b^{j,n}. \end{aligned}$$

Utilizando a aproximação linear na equação anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned} V^b \left[\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \right) H_b^{j,n} + \rho_b^{j,n} \frac{\partial H^{j,n+1}}{\partial t} - \frac{\partial P^{j,n+1}}{\partial t} \right] \\ - S_{i,b}^{j,n+1} + S_{o,b}^{j,n+1} = H_b^{j,n} G_b^{j,n} + Q_b^{j,n}. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda aproximação linear nos termos que compõem o somatório de $S_{i,b}^{j,n+1}$ e $S_{o,b}^{j,n+1}$, obtém-se:

$$S_{i,b}^{j,n+1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{NI} (W_{i,b}^{j,n} H_a^{j,n+1} + H_a^{j,n} W_{i,b}^{j,n+1} - W_{i,b}^{j,n} H_a^{j,n}) + HW_{o',a}^{j,n} + FHB_{e,b}^{j,n}, \\ \quad se \ W_{i,b} \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{NI} (W_{i,b}^{j,n} H_b^{j,n+1} + H_b^{j,n} W_{i,b}^{j,n+1} - W_{i,b}^{j,n} H_b^{j,n}) + HW_{i,b}^{j,n}, \\ \quad se \ W_{i,b} < 0 \end{cases}$$

e

$$S_{o,b}^{j,n+1} = \begin{cases} \sum_{o=1}^{NO} (W_{o,b}^{j,n} H_b^{j,n+1} + H_b^{j,n} W_{o,b}^{j,n+1} - W_{o,b}^{j,n} H_b^{j,n}) + (HW_{o,b}^{j,n}), \\ \quad se \ W_{o,b} \geq 0 \\ \sum_{o=1}^{NO} (W_{o,b}^{j,n} H_c^{j,n+1} + H_c^{j,n} W_{o,b}^{j,n+1} - W_{o,b}^{j,n} H_c^{j,n}) + HW_{i',c}^{j,n} + FHB_{o,c}^{j,n}, \\ \quad se \ W_{s,b} < 0 \end{cases}$$

Logo, a equação de balanço de energia poderá ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & V^b \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \right)_b^{j,n+1} \right] H_b^{j,n} + \rho_b^{j,n} \frac{\partial H^{j,n+1}}{\partial t} - \frac{\partial P^{j,n+1}}{\partial t} \\ & + \left(\sum_{o=1}^{NO} E_{H,o,b}^{j,n,1} H_b^{j,n+1} + \sum_{o=1}^{NO} E_{H,o,c}^{j,n,1} H_c^{j,n+1} + \sum_{o=1}^{NO} E_{W,o}^{j,n,1} W_{o,c}^{j,n+1} \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^{NI} E_{H,i,b}^{j,n,1} H_b^{j,n+1} + \sum_{i=1}^{NI} E_{H,i,a}^{j,n,1} H_a^{j,n+1} + \sum_{i=1}^{NI} E_{W,i}^{j,n,1} W_{i,a}^{j,n+1} \right) \\ & = \sum_{i=1}^{NI} \bar{C}_i^{j,n} - \sum_{o=1}^{NO} \bar{C}_o^{j,n} + H_b^{j,n} G_b^{j,n} + Q_b^{j,n}, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{C}_i^{j,n} = \begin{cases} -W_{i,b}^{j,n,in} H_a^{j,n} + HW_{o',a}^{j,n,out} + FHB_{i,a}^{j,n,in}, & se \ W_{i,b}^{j,n,in} \geq 0 \\ -W_{i,b}^{j,n,in} H_b^{j,n} + HW_{i,b}^{j,n,in}, & se \ W_{i,b}^{j,n,in} < 0, \end{cases}$$

$$\bar{C}_o^{j,n} = \begin{cases} -W_{o,b}^{j,n,out} H_b^{j,n} + (HW_b^{j,n,out}), & se \ W_{o,b}^{j,n,out} \geq 0 \\ -W_{o,b}^{j,n,out} H_c^{j,n} + HW_{i',c}^{j,n,in} + FHB_{o,b}^{j,n,in}, & se \ W_{o,b}^{j,n,out} < 0, \end{cases}$$

e

$$\sum_{o=1}^{NO} E_{H,o,b}^{j,n,1} = \begin{cases} W_{o,b}^{j,n,out}, & para \ W_{o,b}^{j,n,out} \geq 0 \\ 0, & para \ W_{o,b}^{j,n,out} < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{o=1}^{NO} E_{H,o,c}^{j,n,1} = \begin{cases} 0, & para \ W_{o,b}^{j,n,out} \geq 0 \\ W_{o,b}^{j,n,out}, & para \ W_{o,b}^{j,n,out} < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{o=1}^{NO} E_{W,o}^{j,n,1} = \begin{cases} H_b^{j,n}, & \text{para } W_{o,b}^{j,n,out} \geq 0 \\ H_c^{j,n}, & \text{para } W_{o,b}^{j,n,out} < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{NI} E_{H,i,a}^{j,n,0} = \begin{cases} W_{i,b}^{j,n,in}, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} \geq 0 \\ 0, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{NI} E_{H,i,b}^{j,n,0} = \begin{cases} 0, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} \geq 0 \\ W_{e,b}^{j,n,in}, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{NI} E_{W,i}^{j,n,0} = \begin{cases} H_a^{j,n}, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} \geq 0 \\ H_b^{j,n}, & \text{para } W_{i,b}^{j,n,in} < 0. \end{cases}$$

E além disso, o termo $HW_{o,b}^{j,n,out} = HW_{i,b}^{j,n,in}$ é igual a

$$[A(u_D)^{j,n} \alpha_b^{j,n} (1 - \alpha_b^{j,n}) \left(\frac{\rho_{st} \rho_{lq}}{\rho}\right)_b^{j,n} (H_{st} - H_{lq})_b^{j,n}].$$

Nestas equações consideram-se b a célula em análise e a , c como as células anterior e posterior, respectivamente, àquela avaliada. Por fim, para linearizar a equação de balanço de quantidade de momento é necessário observar as seguintes igualdades:

$$u_{j,n+1,out}^{o,b} = \frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{\rho_{o,b}^{j,n} A_{o,b}}$$

e

$$\rho_{i,a}^{j,n+1} = \rho_{o,b}^{j,n+1} = \frac{\rho_b^{j,n+1} + \rho_a^{j,n+1}}{2}.$$

Usando as 1ª e 2ª igualdades no primeiro termo do lado esquerdo da equação de balanço de quantidade de momento, tem-se que:

$$\begin{aligned} \rho_{o,b}^{j,n+1} \frac{\partial u_{o,b}^{j,n+1}}{\partial t} &= \frac{1}{A_{o,b}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{o,b}^{j,n+1} A_{o,b} u_{o,b}^{j,n+1}) - \frac{u_{o,b}^{j,n+1}}{2} \left(\frac{\partial \rho_b^{j,n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a^{j,n+1}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{\partial W_{o,b}^{j,n+1,out}}{\partial t} \right] - \frac{u_{o,b}^{j,n+1}}{2} \left(\frac{\partial \rho_b^{j,n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a^{j,n+1}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Usando a equação de balanço de massa e aplicando a ideia da linearização em (3.17),

é possível escrever este termo como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{\partial W_{o,b}^{j,n+1,out}}{\partial t} \right] - \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} (G_b^{j,n} + G_a^{j,n}) \right] \\
& - \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n,in} \right) \right] \\
& + \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{o'=1, o \neq o'}^{NO} W_{o',b}^{j,n,out} + \sum_{o=1}^{NOa} W_{o',a}^{j,n,out} \right) \right] \\
& - \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n+1,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n+1,in} \right) \right] \\
& + \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{o'=1, o \neq o'}^{NO} W_{o',b}^{j,n+1,out} + \sum_{o=1}^{NOa} W_{o',a}^{j,n+1,out} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n,in} \right) \right] \\
& - \frac{1}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{o'=1, o \neq o'}^{NO} W_{o',b}^{j,n,out} + \sum_{o=1}^{NOa} W_{o',a}^{j,n,out} \right) \right].
\end{aligned}$$

Portanto a equação de balanço de quantidade de momento linearizada será dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{(L_{o,b} + L_{i,a})}{A_{o,b}} \left[\frac{\partial W_{o,b}^{j,n+1,out}}{\partial t} \right] - \frac{(L_{o,b} + L_{i,b})}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} (G_b^{j,n} + G_a^{j,n}) \right] \\
& - \frac{(L_{o,b} + L_{i,a})}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n,in} \right) \right] \\
& + \frac{(L_{o,b} + L_{i,a})}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n+1,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{o'=1, o \neq o}^{NO} W_{o',b}^{j,n,out} + \sum_{i=1}^{NOa} W_{o',a}^{j,n,out} \right) \right] \\
& - \frac{(L_{o,b} + L_{i,a})}{A_{o,b}} \left[\frac{W_{o,b}^{j,n,out}}{2\rho_{o,b}^{j,n}} \left(\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n+1,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n+1,in} \right) \right] \\
& - P_b^{j,n+1} + P_a^{j,n+1} = Fonte^{j,n} + Fat_{o',a}^{j,n,out},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde,

$$\begin{aligned}
Fonte^{j,n} &= \frac{1}{2A_{o,b}} \frac{(L_{o,b} + L_{i,b})W_{o,b}^{j,n,out}}{\rho_{o,b}^{j,n}} \left\{ - \left[\sum_{i=1}^{NI} W_{i,b}^{j,n,in} + \sum_{i=1, i \neq i'}^{NIa} W_{i,a}^{j,n,in} \right] \right. \\
&+ \left. \left[\sum_{o'=1, o' \neq o}^{NS} W_{o',b}^{j,n,out} + \sum_{o=1}^{NOa} W_{o',a}^{j,n,out} \right] \right\} \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(1 - \alpha_b^{j,n}) \frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho_b^{j,n}} (u_{D,b}^{j,n})^2 \right] + \left[\frac{1}{2}(1 - \alpha_a^{j,n}) \frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho_a^{j,n}} (u_{D,a}^{j,n})^2 \right] \\
&+ \left[-\frac{1}{2} u_{D,o,b}^{j,n} |u_{D,o,b}^{j,n}| \alpha_b^{j,n} (1 - \alpha_b^{j,n}) \frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho_b^{j,n}} \right] \\
&+ \left[+\frac{1}{2} u_{D,o,a}^{j,n} |u_{D,o,a}^{j,n}| \alpha_a^{j,n} (1 - \alpha_a^{j,n}) \frac{\rho_{st}\rho_{lq}}{\rho_a^{j,n}} \right] \\
&+ \rho_{o,b}^{j,n} g(Y_b - Y_a) + -C_{o,b}^{j,n} \frac{W_{o,b}^{j,n} |W_{o,b}^{j,n}|}{\rho_{o,b}^{j,n}} + \rho_{o,b}^{j,n} g HEAD_{o,b}^{j,n}
\end{aligned}$$

e

$$Fat_{o',a}^{j,n,sai} = \begin{cases} 0, & \text{para } o \neq o' \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho_b^{h,j} - \rho_a^{j,n} |W_{o,b}^{j,n,out}| (W_{o,b}^{j,n})}{(A_{o,b})^2 (\rho_{o,b}^{j,n})^2}, & \text{para } o = o'. \end{cases} \quad (3.20)$$

Abaixo segue uma figura que esquematiza o processo de vazão de massa ao longo da tubulação horizontal divididas em células a, b e c , que envolvem o conjunto das equações abordadas nesta seção.

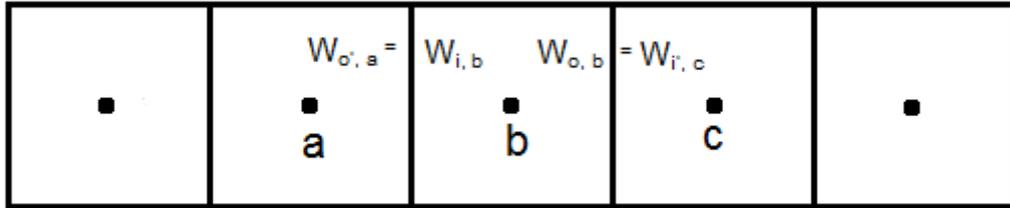


Figura 3.2: Representação da Malha de Volume Finito nas células a, b e c .

Capítulo 4

Método de Diferenças Finitas em Malha Deslocada de Ordem k Melhorado (I-KSGFD)

4.1 Características

O esquema apresentado como Método de Diferenças Finitas em Malha Deslocada de Ordem K Melhorado (Método I-KSGFD) se baseia no método de diferenças finitas e na concepção de malha deslocada. Neste método é feita a integração temporal explícita após integração espacial do modelo, como originalmente descrito por BRENNY(2012)(Método KSGFD) e melhorado por CARMO *et al.*(Método I-KSGFD). Além disso, o novo esquema permite uma solução de espaço-tempo desacoplada e possui boas estimativas de truncamento de erro e ordem de aproximação.

O método I-KSGFD é uma generalização de outros métodos de malha deslocada, como visto nos trabalhos de VIRIEUX (1984 e 1986), entretanto com algumas vantagens na estrutura da malha, por consequência, no arranjo da matriz do sistema e avaliação do vetor solução. O método também é adequado a quaisquer tipos de discretização espacial de um sistema de equações diferenciais. Em particular, estes métodos (KSGFD e I-KSGFD) se mostraram eficientes com o esquema de volumes finitos, que possui grande afinidade com modelos de conservação. Estes modelos de conservação são confiáveis e aproximam os problemas físicos da engenharia, como exemplo, os escoamentos bifásicos em geral, que são de grande interesse dos pesquisadores.

Este trabalho objetiva verificar no campo de estudo de escoamentos bifásicos em termo-hidráulica a performance do esquema I-KSGFD desenvolvido por CARMO *et*

al.

4.2 O Método I-KSGFD ($K=2$)

O problema do Modelo Drift Flux consiste em resolver o sistema de equações não lineares no tempo obtido após a integração espacial. Para encontrar a solução deste sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-linear no tempo que modelam as equações de balanço de massa, energia e momento, este trabalho propõe estudar o Método de Diferenças Finitas em Malha Deslocada de Ordem K Melhorado Explícito, proposto por CARMO *et al.*, que pode ser útil em simulações em tempo real. Aqui K denota o número de subintervalos de tempo.

Com o objetivo de apresentar o método I-KSGFD considere o problema de valor inicial do tipo que segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}, t)\mathbf{U} = \mathbf{f}(\mathbf{U}, t), & \text{para } t \in (0, T) \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{U} é um vetor dependendo do tempo representando as variáveis termo-hidráulicas em cada seção da célula fluido (velocidade, fração de vazio) e também a pressão média no volume da célula fluido e $(A)_{i,j}$ é a matriz do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem no tempo de ordem d . Deve ser notado, que para um esquema sem iteração a matriz A e o termo fonte f são avaliados no tempo anterior, e para um esquema iterativo a matriz A e o termo fonte f são avaliados no tempo final do intervalo considerado.

O método I-KSGFD, conforme descrito por CARMO *et al.*, necessita que o novo esquema de integração no tempo associado a esta matriz A permita que o vetor solução seja avaliado completamente nas malhas $t_{i+l/k}$ e t_{i+1} ($l = 1, 2, \dots, (k-1)$) e ($k \geq 2$). Desse modo, o novo esquema altera a formulação clássica de integração no tempo na avaliação do vetor solução, possibilitando que o método seja válido para matrizes arbitrárias, sem as limitações matriciais referente a comum partição de intervalo em 2 ($[t_{i-1/2}, t_{i+1/2}]$ e $[t_i, t_{i+1}]$). Isto permite que a solução do problema seja encontrada rapidamente em todos intervalos de tempo. Neste trabalho será apresentada a versão do esquema I-KSGFD desenvolvido por CARMO *et al.*, somente para $K = 2$, por ser a versão mais adequada para circuitos termo-hidráulicos.

4.3 Esquemas Explícitos

Um dos aspectos mais importantes no estudo do método I-KSGFD é a compreensão da definição do que é um esquema explícito. Tanto este, como o esquema implícito é geralmente muito estudado na análise de solução de equações diferenciais via diferenças finitas. Por isso aqui é apresentada uma ideia do que seja um esquema explícito. Para uma dada equação diferencial geral escrita da seguinte forma:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

É possível escrevê-la, após o processo de integração da seguinte maneira:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t) dt$$

que é o esquema explícito de Euler.

Entretanto, todo esquema explícito é condicionalmente estável, isto é, força que haja um cumprimento de uma condição, dependente dos passos de tempo e espaço, para satisfazer a estabilidade. A desvantagem disso é que o método exige usar um valor pequeno de passo de tempo para garantir estabilidade durante o processo de análise. Vale ressaltar também que, em geral, esta é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a estabilidade. É o chamado Critério de Courant, $(\frac{\Delta t}{\Delta x}) < \alpha$, em geral $\alpha \leq 1$.

4.4 O esquema I-KSGFD (K=2)

Aqui é apresentado o algoritmo baseado no método I-KSGFD para problemas de valor inicial do tipo (4.1). Portanto, seja a malha temporal dada como segue:

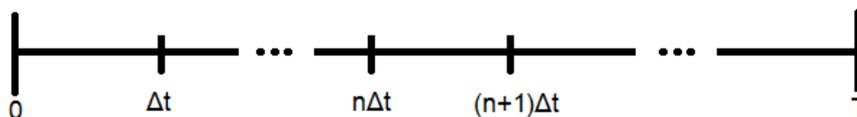


Figura 4.1: Intervalo da solução do problema (4.1).

Seja o intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, com $j \geq 0$ e

$$t_j = j \Delta t \tag{4.2}$$

Considere agora um ponto do intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, ($K \geq 2$) dado por:

$$t_{j+1/2} = t_j + \Delta t_1, \quad \text{onde} \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta t}{2}. \quad (4.3)$$

Assume-se que através de um esquema (a ser apresentado e denominado como *Condições de Partida*) sejam conhecidos para o primeiro intervalo $[0, \Delta t]$ os seguintes valores:

$$U(0), \quad U\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{e} \quad U(\Delta t). \quad (4.4)$$

Seguindo CARMO *et al.*, é mudado as variáveis dos pontos de $t \in (t_a, t_b)$ para $\xi \in (-1, 1)$.

Visando obter integração exata de polinômios de grau 1, para $\xi_0 = 0$, obtém-se $W_0 = 2$, que é o peso da integração de Gauss para 1 ponto.

Como o problema dado por 4.1 é não linear, é preciso avaliar a matriz A e o termo fonte em algum ponto do intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ ou no intervalo $[t_{j+1/2}, t_{j+3/2}]$, conforme o caso.

Notando que o processo de marcha intercalada parte da solução conhecida por algum processo, $U(0)$, $U\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ e $U(\Delta t)$, segue que para o primeiro intervalo do método que é $\left[\frac{\Delta t}{2}, \frac{3\Delta t}{2}\right]$ se conhece $U\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ e $U(\Delta t)$.

Determinando $U\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)$, para o intervalo $[\Delta t, 2\Delta t]$ se conhece $U(\Delta t)$ e também $U\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)$. Desta forma, prosseguindo este raciocínio, sempre se conhece U em dois pontos do intervalo considerado.

O esquema desenvolvido por CARMO *et al.*, tira vantagem desta característica para propor um esquema de avaliação $A(U, t)$ e $f(U, t)$, que é uma extensão do esquema de Euler explícito.

Desta forma, CARMO *et al.*, propõem o que segue. Para um $\beta \in (0, 1)$, definem-se para os intervalos $[t_{j+1/2}, t_{j+3/2}]$ e $[t_{j+1}, t_{j+2}]$ as seguintes aproximações para $A(U, t)$ e $f(U, t)$:

- Intervalo $[t_{j+1/2}, t_{j+3/2}]$:

$$A(U, t) \approx A(U^*, t), \quad f(U, t) \approx f(U^*, t) \quad \text{e} \quad U^* = \beta U(t_{j+1/2}) + (1 - \beta)U(t_{j+1}). \quad (4.5)$$

- Intervalo $[t_{j+1}, t_{j+2}]$:

$$A(U, t) \approx A(U^*, t), \quad f(U, t) \approx f(U^*, t) \quad \text{e} \quad U^* = \beta U(t_{j+1}) + (1 - \beta)U(t_{j+3/2}). \quad (4.6)$$

CARMO *et al.*, propõem que o valor de β a ser usado no estudo da aplicação do conceitos termo-hidráulicos do método I-KSGFD seja:

$$\beta = \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

Sejam as componentes da matriz A , aproximadas em 4.5 e 4.6, definidas como $A = (A_{i,l})_{1 \leq i,l \leq N}$. Para fixado $i \in \{1, \dots, N\}$, o esquema I-KSGFD desenvolvido por CARMO *et al.* para $K = 2$ e aplicado ao problema dado por 4.1, após notado que $W_0 = 2$, é dado, respectivamente, nos intervalos supracitados, como segue:

- Intervalo $[t_{j+1/2}, t_{j+3/2}]$:

$$U_{i,(j+3/2)} = U_{i,(j+1/2)} - \Delta t \left[\sum_l A_{i,l}(U^*, t^*) U_l^{**} - f(U^*, t^*) \right], \quad (4.8)$$

$$t^* = \frac{\frac{t_{j+1/2} + t_{j+3/2}}{2} + t_{j+1/2}}{2} \quad (4.9)$$

$$U_l^{**} = \begin{cases} U_{l,j+1/2} & \text{se } l \geq i \\ U_{l,j+3/2} & \text{se } l < i, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$U_{l,j+1/2} = U_l(t_{j+1/2}) \quad (4.11)$$

$$U_{l,j+3/2} = U_l(t_{j+3/2}) \quad (4.12)$$

- Intervalo $[t_{j+1}, t_{j+2}]$, :

$$U_{i,(j+2)} = U_{i,(j+1)} - \Delta t \left[\sum_l A_{i,l}(U^*, t^*) U_l^{**} - f(U^*, t^*) \right], \quad (4.13)$$

$$t^* = \frac{\frac{t_{j+1} + t_{j+2}}{2} + t_{j+1}}{2} \quad (4.14)$$

$$U_l^{**} = \begin{cases} U_{l,j+1} & \text{se } l \geq i \\ U_{l,j+2} & \text{se } l < i, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$U_{l,j+1} = U_l(t_{j+1}) \quad (4.16)$$

$$U_{l,j+2} = U_l(t_{j+2}) \quad (4.17)$$

4.5 Condições de Partida

Nesta seção são apresentadas as condições de partida para o esquema proposto e desenvolvido também por CARMO *et al.*. Para isso, será necessário começar com o método de Euler explícito e criar condições de partidas apropriadas para o uso do método I-KSGFD, $K = 2$, nos subintervalos de tempo.

Inicialmente será preciso definir algumas constantes de modo que se possa obter as condições de partida. Seja Δt_{REF_0} um intervalo de tempo de referência que satisfaz $0 < \Delta t_{REF_0} \leq \Delta t$.

Conforme em CARMO *et al.*, definem-se os seguintes intervalos de tempo e expoentes:

$$\begin{aligned}\Delta t_{REF} &= \inf\{\Delta t_{REF_0}, \Delta t\} \text{ e } \Delta t_{K-1} = \frac{\Delta t}{K}, \\ \bar{K} &= \sup\{2, K\}, \\ \bar{\Delta t} &= \inf\left\{\left(\frac{\Delta t}{t'}\right)^{\frac{\bar{K}}{2}} t', \Delta t_{K-1}\right\}, \\ \Delta t_{EulerP} &= \sup\left\{\left(\frac{\Delta t}{t'}\right)^{\bar{K}} t', (\Delta t_{REF})^{\bar{K}}\right\}\end{aligned}\quad (4.18)$$

onde Δt_{EulerP} é a primeira estimativa para o uso do método explícito de Euler.

Seja $\bar{N} \geq 1$ o maior inteiro que satisfaça $\bar{N}\bar{\Delta t} \leq \Delta t_{K-1}$. Então pode-se definir:

$$\bar{\Delta t}_R = \frac{\Delta t_K}{\bar{N}}, \quad (4.19)$$

para então obter o intervalo de tempo:

$$\Delta t_{Euler} = \frac{\bar{\Delta t}_R}{2N_m^0}. \quad (4.20)$$

Aqui N_m^0 é escolhido de tal forma que $2N_m^0 \geq 1$ e seja o menor inteiro tal que:

$$\Delta t_{EulerP} \geq \frac{\bar{\Delta t}_R}{2N_m^0} \quad (4.21)$$

Observe que Δt_K é um múltiplo de $\bar{\Delta t}_R$ assim como $\bar{\Delta t}_R$ é um múltiplo de $2\Delta t_{Euler}$. Portanto, a partir destas relações entre os passos de tempo, pode-se construir as seguintes etapas do processo de condições de partida consoante em CARMO *et al.*

ETAPA 1 - *Solução pelo método de Euler Explícito*

Considere o vetor $U_{i,\Delta t_{Euler}}$ como sendo a aproximação da solução do problema de valor inicial em (4.1) e obtida através do método explícito de Euler do ponto $t = 0$ até o tempo $t = \Delta t_{Euler}$, usando o passo Δt_{Euler} .

ETAPA 2 - *Pré-determinação das condições de partida pelo método I-KSGFD com $K=2$ (dois subintervalos)*

Neste processo de pré-determinação da solução como condições de partida, será utilizado o método descrito na seção anterior para o intervalo de tempo $[0, \bar{\Delta t}_R]$, que por (4.20), o passo de tempo adotado é Δt_{Euler} .

A priori, definem-se os pontos interiores pertencentes a este intervalo como:

$$t_{(i^*) \times \Delta t_{Euler}} = (i^*) \times \Delta t_{Euler}, \quad \text{com } i^* = \{1, \dots, (2N_m^0)\} \quad (4.22)$$

Portanto as soluções do vetor U_i nestes pontos passam a ser definidos por:

$$U_{i,(i^*) \times \Delta t_{Euler}} = U_i(t_{(i^*) \times \Delta t_{Euler}}), \quad \text{com } i^* = \{1, \dots, (2N_m^0)\} \quad \text{e } i = \{1, \dots, N\}. \quad (4.23)$$

Quando $i^* = \bar{\Delta t}_R$, ou seja, $i^* = (2N_m^0 + 1) \times \Delta t_{Euler}$, a solução no ponto $t_{\bar{\Delta t}_R}$ é definida por:

$$U_{i,\bar{\Delta t}_R} = U_i(t_{\bar{\Delta t}_R}), \quad \text{com } i = \{1, \dots, N\}. \quad (4.24)$$

Como na etapa 1 foi calculado a solução de $U_{i,\Delta t_{Euler}}$, no ponto $t_{\Delta t_{Euler}}$, assim, aqui será calculado a solução do vetor $U_{i,2\Delta t_{Euler}}$ através do método I-KSGFD com $K = 2$, a partir dos pontos conhecidos $U_{i,0}$ (condição inicial do problema (4.1)) e $U_{i,\Delta t_{Euler}}$ seguindo o esquema apresentado anteriormente na seção 4.4.

De forma análoga, após obtida a solução para $U_{i,2\Delta t_{Euler}}$, e por conseguinte, determinado os valores de U_i no intervalo $[0, 2\Delta t_{Euler}]$, os próximos passos são determinar os valores de $U_{i,3\Delta t_{Euler}}$, conhecidos $U_{i,2\Delta t_{Euler}}$ e $U_{i,\Delta t_{Euler}}$, obter $U_{i,4\Delta t_{Euler}}$, conhecidos $U_{i,3\Delta t_{Euler}}$ e $U_{i,2\Delta t_{Euler}}$ e assim sucessivamente. Ou seja, em geral, procura-se obter as soluções de $(U_{i,3\Delta t_{Euler}}, U_{i,4\Delta t_{Euler}}, \dots, U_{i,\bar{\Delta t}_R})$ pelo método I-KSGFD com $K = 2$ nos intervalos de tempo, respectivamente, $(\Delta t_{Euler}, 3\Delta t_{Euler})$, $(2\Delta t_{Euler}, 4\Delta t_{Euler})$, \dots , $((i^*)\Delta t_{Euler}, (i^* + 2)\Delta t_{Euler})$, \dots , $(\bar{\Delta t}_R - 4\Delta t_{Euler}, \bar{\Delta t}_R - 2\Delta t_{Euler})$, $(\bar{\Delta t}_R - 2\Delta t_{Euler}, \bar{\Delta t}_R)$, $i^* = (3, \dots, (2N_m^0 - 2))$, novamente usando o esquema apresentado na seção 4.4.

ETAPA 3 - *Determinação das condições de partida pelo método I-KSGFD com $K=2$*

Esta consiste da última etapa do processo de determinação de condições de partida com o método I-KSGFD para $K = 2$. Após determinada a solução de U_i

nos pontos do intervalo $[0, \Delta\bar{t}_R]$, aqui busca-se encontrar a solução do vetor U_i no intervalo $[2\Delta\bar{t}_R, \Delta t]$.

Como visto em (4.19), o intervalo $[0, \Delta t_{K-1}]$ possui \bar{N} pontos de passos $\Delta\bar{t}_R$. E além disso, sabendo que $\Delta t_{K-1} = \frac{\Delta t}{K}$, é fácil ver que o intervalo $[0, \Delta t]$ possui $\bar{N}_{tot} = \bar{N} \times (K + 1)$ pontos interiores.

E assim definem-se:

- $t_{(i^*) \times \Delta\bar{t}_R} = (i^*) \times \Delta\bar{t}_R$, com $i^* = \{1, \dots, \bar{N}\}$;
- $t_{(i^*) \times \Delta t_{K-1}} = (i^*) \times \Delta t_{K-1}$, com $i^* = \{1, \dots, K - 1\}$;
- E quando $i^* = (K) \times \Delta t_{K-1}$, então $t_{K \times \Delta t_{K-1}} = K \times \Delta t_{K-1} = \Delta t = t_{\Delta t}$.

Considere:

- $U_{i, (i^*) \times \Delta\bar{t}_R} = U_i(t_{(i^*) \times \Delta\bar{t}_R})$, com $i^* = \{1, \dots, \bar{N}\}$;
- $U_{i, (i^*) \times \Delta t_{K-1}} = U_i(t_{(i^*) \times \Delta t_{K-1}})$, com $i^* = \{1, \dots, K - 1\}$;
- $U_{i, \Delta t} = U_i(t_{\Delta t})$.

Portanto, a solução do vetor $U_{i, 2\Delta\bar{t}_R}$ no intervalo $[0, 2\Delta\bar{t}_R]$, com o passo de tempo $\Delta\bar{t}_R$, conhecidos $U_{i,0}$ e $U_{i, \Delta\bar{t}_R}$, através do método I-KSGFD com $K = 2$ é apresentado na seção 4.4.

Semelhantemente, as soluções do vetor U_i em todo intervalo $[0, \Delta t]$, isto é, as condições de partida para a determinação da solução de $U_i(2\Delta t_K), U_i(3\Delta t_K), \dots, U_i(K\Delta t_K), U_i(\Delta t)$, serão determinadas pelo mesmo processo acima, mas agora utilizando os intervalos de tempo $(\Delta\bar{t}_R, 3\Delta\bar{t}_R), (2\Delta\bar{t}_R, 4\Delta\bar{t}_R), \dots, ((i^*)\Delta\bar{t}_R, (i^* + 2)\Delta\bar{t}_R), \dots, (\Delta t - 3\Delta\bar{t}_R, \Delta t - \Delta\bar{t}_R), (\Delta t - 2\Delta\bar{t}_R, \Delta t)$, com $i^* = (3, \dots, (\bar{N}_{tot} - 2))$.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Com o objetivo de verificar a robustez do método I-KSGFD para plantas termo-hidráulicas aqui são apresentados alguns experimentos numéricos. Para se obter estes experimentos numéricos, foi implementado na linguagem C^{++} o esquema I-KSGFD desenvolvido por CARMO *et al.*, e aqui nesta dissertação apresentado no capítulo 4 para $K = 2$, por ser o mais adequado para aplicação em circuitos termo-hidráulicos. Deve ser ressaltado, que esta é a primeira vez que um estudo do esquema I-KSGFD é feito para circuitos termo-hidráulicos.

A base de comparação deve ser sempre com o método de Euler explícito, por ser o método mais comum utilizado em integração explícita em plantas termo-hidráulicas.

Deve ser observado que até o momento, que as tabelas de vapor implementadas em C^{++} são para líquido/vapor nas proximidades de saturação do líquido, de tal modo, que as propriedades termodinâmicas são dependentes apenas da pressão. Isso indica que devemos apresentar exemplos com transiente nas equações de massa e momento, e considerar a equação de energia como quase estacionária, uma vez que devemos considerar exemplos sem uma dependência das propriedades na variável entalpia.

Esquemas implícitos permitem trabalhar com Δt (Intervalo de tempo) relativamente altos para tempo de análise especificado. Todavia, é preciso resolver um sistema de equações acopladas. Para plantas pequenas, isto é vantajoso, mas para plantas de grande porte (com milhares ou às vezes milhões de células), métodos explícitos podem ser mais vantajosos.

Um dos métodos mais usado é o famoso método explícito de Euler. Devemos então comparar a performance dos métodos I-KSGFD e Euler explícito para os exemplos a serem apresentados.

O tamanho de Δt depende basicamente para métodos explícitos em dois fatores:

- Severidade do transiente;
- Tempo de análise do transiente.

Quanto maior a severidade do transiente segue que menor será o Δt a ser utilizado. Também, para evitar acúmulo de erros de amortecimento, amplificação e erro de fase, quanto maior for o tempo de análise menor deverá ser o Δt usado. Isto é quase uma regra para todos os métodos explícitos usados em circuitos termo-hidráulicos, sem esses cuidados, ocorre uma saída da faixa de validade das tabelas de vapor. Portanto, mais robusto para um determinado tipo de transiente será um método explícito, quanto maior for o Δt que ele permite para um fixado tempo de análise.

Portanto será feita uma comparação com o método explícito de Euler por ser o mais utilizado, e o método I-KSGFD usado com $K = 2$, por ser para este valor de K o mais equilibrado em precisão e tempo computacional de toda a família I-KSGFD, para se observar a relação entre tempo de análise e os passos de tempos utilizados.

Para isso foi feito o estudo com circuitos termo-hidráulicos horizontais e inclinados com um ângulo de 30 graus. No caso do estudo com plantas totalmente verticais, é necessário uma nodalização da planta mais fina do que a que é apresentada na figura 5.1.

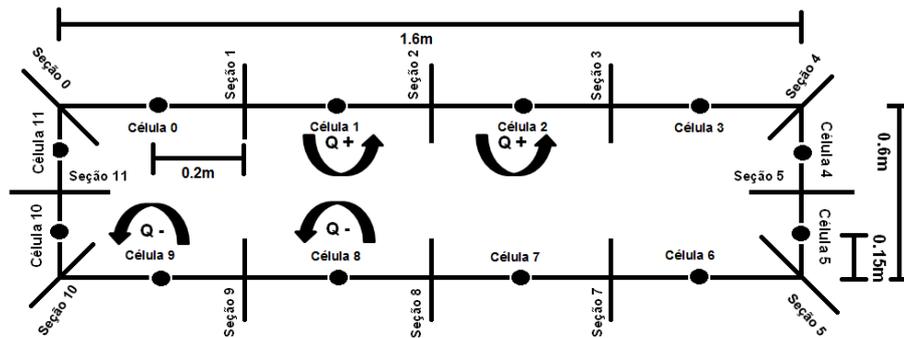


Figura 5.1: Planta usada nos experimentos.

Para a planta considerada horizontal as cotas gravitacionais de todas as células de 0 a 11 são assumidas iguais a zero. Para a planta considerada inclinada (para estudar efeitos da gravidade) as células 6, 7, 8 e 9 têm cota gravitacional 0, as células 0, 1, 2 e 3 têm cota gravitacional 0,35 e as células 4, 5, 10 e 11 estão inclinadas por um ângulo de 30 graus. Isto permite simular efeitos da gravidade mesmo para esta planta com nodalização grossa.

Em todos os experimentos, são considerados os seguintes dados:

- Pressão especificada na célula 0 igual a 0.5MPa;
- Entalpia especificada na célula 0 igual a 640.19 (kJ)/kg.

Esta é a entalpia da mistura que corresponde à pressão de 0.5MPa na tabela de vapor implementada em C^{++} . É prescrito uma geração de calor de 1000 W nas células 1 e 2, e uma retirada de calor de -1000 W nas células 8 e 9, da planta dada na figura 5.1. O diâmetro dos tubos foi assumido como sendo de 20 cm. Nas seções 0, 4, 5 e 10 foi adicionado um coeficiente de perda local carga de 0.25. As outras perdas de carga foram as usuais baseadas em faixa de números de Reynolds e obtidas de MELO (2007). Neste experimento as condições iniciais foram:

- Pressão uniforme e tendo o valor de 0.5 MPa em todas as células;
- Vazão uniforme e igual a Zero em todas as células.

O que se deseja nos experimentos é que a vazão na planta seja obtida como a solução em um tempo muito grande de um falso transiente.

5.1 Experimento 1 (Planta horizontal)

Neste experimento, para um *HEAD* imposto na seção 9 equivalente a uma diferença de pressão de $\Delta P \approx 3000$ Pa. As evoluções das vazões com o tempo até atingir o regime estacionário, determinadas com o método I-KSGFD, são para as células 0, 3, 6 e 9, apresentadas, respectivamente, nas figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5. Na figura 5.6 estas evoluções são apresentas juntas, indicando que o regime estacionário foi atingido, fornecendo a vazão do sistema determinado com o método I-KSGFD.

O intervalo de tempo para o método I-KSGFD neste experimento foi: $\Delta t = 0,003675$. O método de Euler explícito para simular este transiente precisa de um intervalo de tempo 2,45 vezes menor.

Os resultados apresentado nas figuras de 5.2 a 5.6 e usando um intervalo de tempo 2,45 vezes maior que o intervalo de tempo do método de Euler explícito para este problema, é um forte indicador para se usar o método I-KSGFD neste tipo de problema. Deve ser notado que a condição inicial na vazão é zero, ou seja, bem longe da vazão na planta, como mostra a figura 5.6.

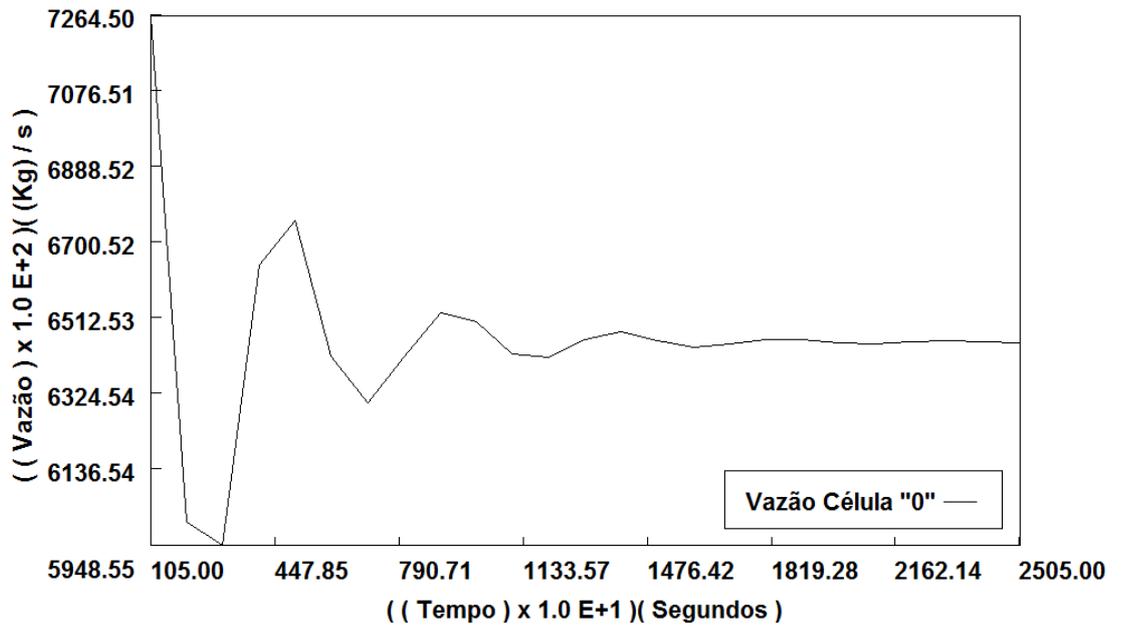


Figura 5.2: Vazão na Célula 0 (Experimento 1).

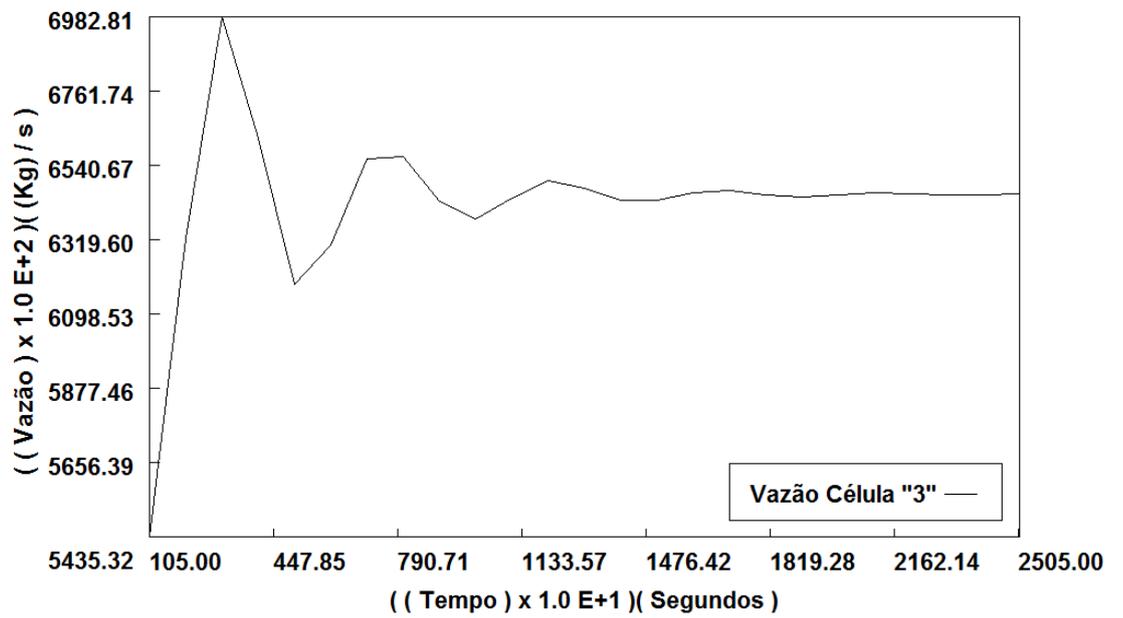


Figura 5.3: Vazão na Célula 3 (Experimento 1).

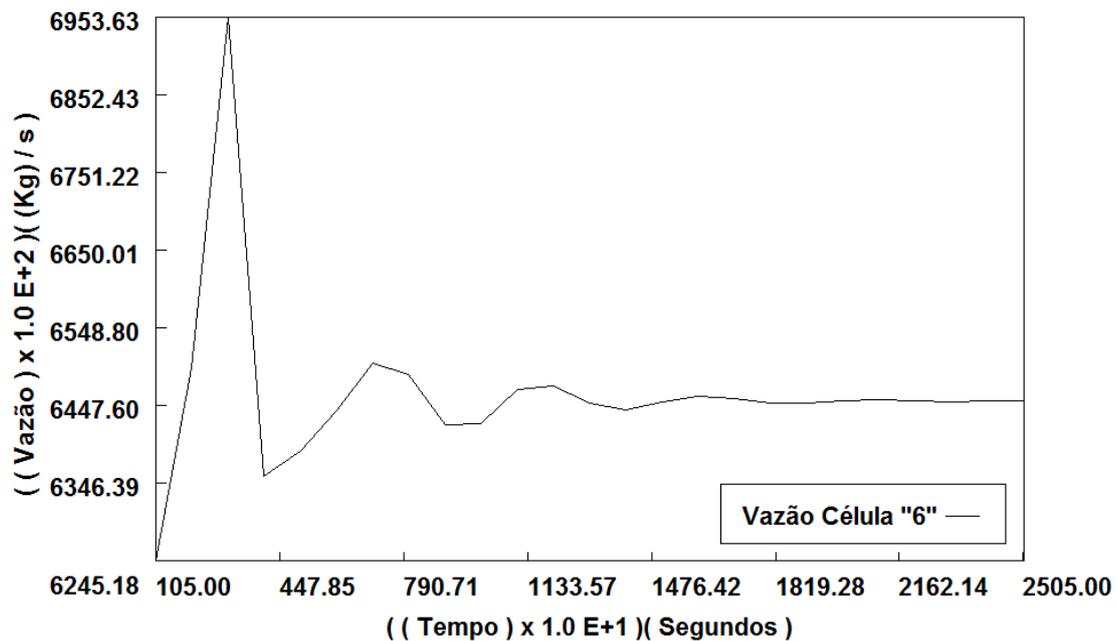


Figura 5.4: Vazão na Célula 9 (Experimento 1).

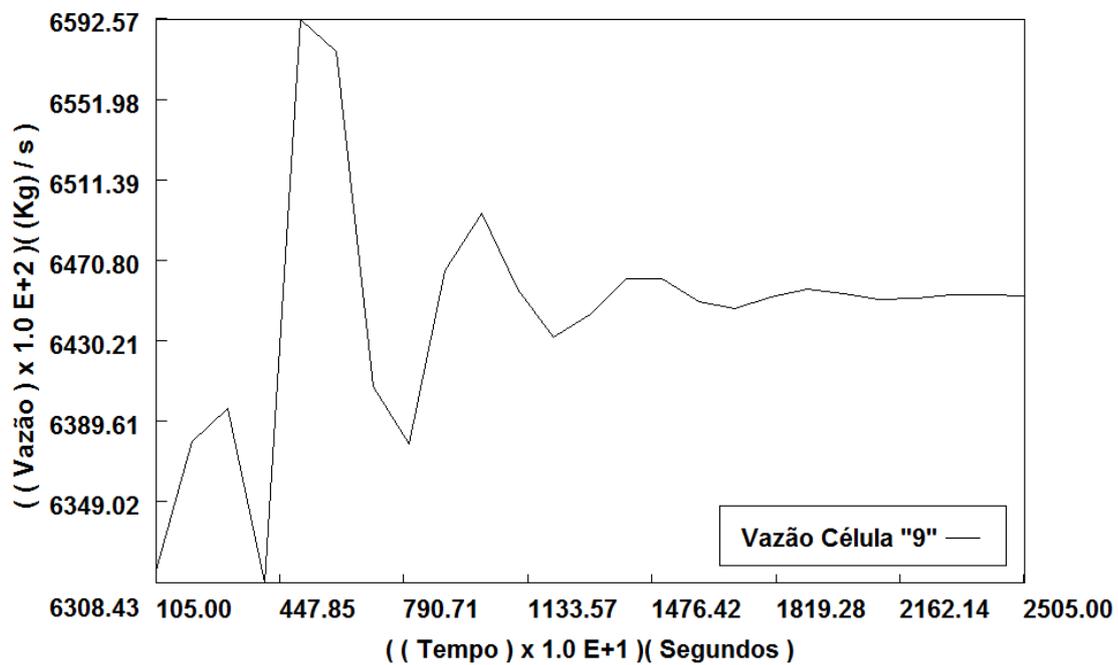


Figura 5.5: Vazão na Célula 9 (Experimento 1).

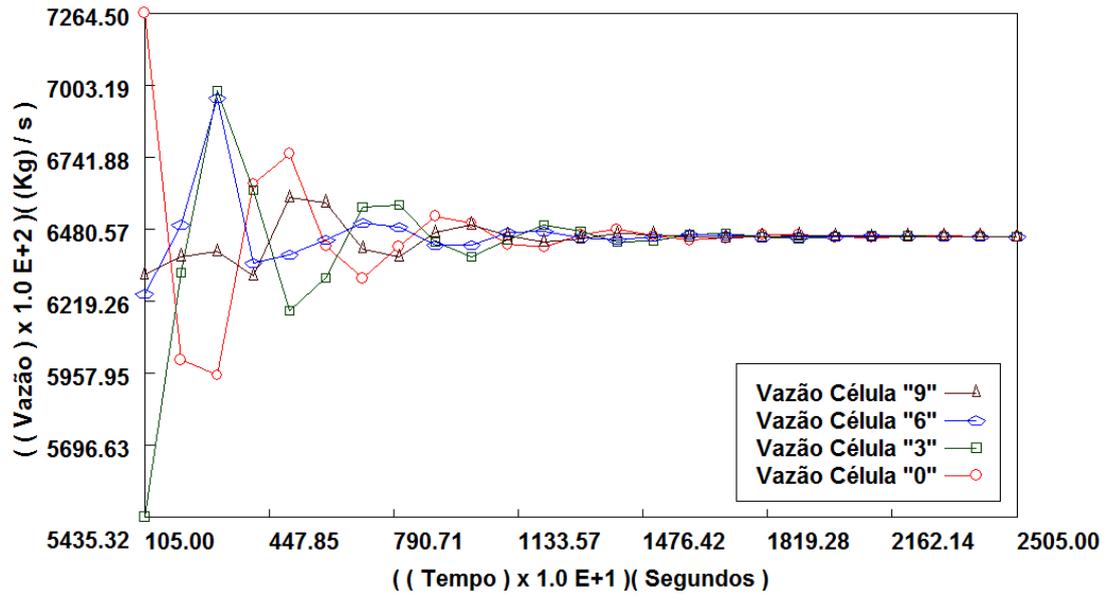


Figura 5.6: Todas as Vazões (Experimento 1).

5.2 Experimento 2 (Planta horizontal)

Neste experimento é determinado o Δt mínimo para se obter a vazão na planta através da simulação de um falso transiente para vários *HEAD* produzindo um ΔP e aplicado na seção 9. Os resultados são mostrados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Δt mínimo para se obter a vazão (Planta Horizontal).

ΔP (Pascal)	Δt (I-KSGFD)	Δt (Euler Explícito)
3000	0.003675	0.00150
2000	0.003675	0.0018375
1000	0.00500	0.0025000
100	0.010000	0.0027500
10	0.010000	0.0025000
1	0.010000	0.0005750

Novamente, observa-se a superioridade do esquema I-KSGFD sobre o esquema explícito de Euler. Aparentemente, existe um comportamento estranho no método de Euler explícito, pois ao diminuir a severidade do transiente imposto, com um $\Delta P = 1,00\text{Pa}$, precisamos diminuir o Δt . Todavia, deve ser notado que se tem um problema não linear, e no esquema de Euler explícito o sistema assume um

linearização atrasada (início do intervalo), e esta linearização pode estar produzindo erro em excesso, sendo provavelmente, o que obrigou a diminuição do Δt , e não o processo de estabilidade.

Portanto, não é estabilidade que pode estar forçando a diminuição do Δt , mas sim a precisão, já que o processo de diminuição foram nos experimentos necessários, simplesmente por questões de precisão, para inclusive evitar oscilações espúrias (negativas/positivas) nas vazões das células.

Já no esquema I-KSGFD a linearização é feita em um tempo maior que o do início do intervalo, estando portanto, mais próximo, do valor real que é o do fim do intervalo, permitindo assim obter uma solução mais precisa, ficando somente o critério de estabilidade para determinar o Δt .

Na figura 5.7 é apresentado o experimento para se obter a vazão para um *HEAD* produzindo uma diferença de pressão equivalente de $0,1Pa$. Neste experimento as vazões foram avaliadas nas células 0, 3, 6 e 10 em vez de 0, 3, 6 e 9, como anteriormente no experimento 1.

A vazão do sistema calculada pelo esquema I-KSGFD para este experimento, é $\approx 0,34(kg/s)$, em uma seção de área transversal $\approx 0,03141592m^2$, o que é muito pequeno, mas mostra a robustez do método I-KSGFD, ao ser capaz de capturar esta vazão para o Δt considerado.

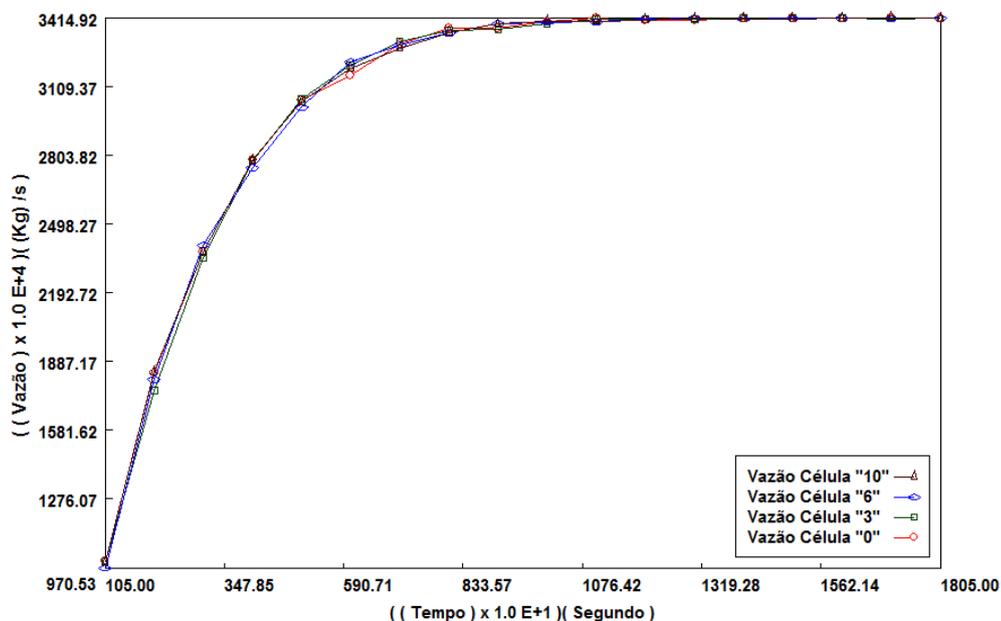


Figura 5.7: Todas as Vazões (Planta Horizontal, $\Delta P = 0,1P$).

5.3 Experimento 3 (Planta Inclinada de 30 graus)

Neste experimento, para a planta dada na figura 5.1 inclinada de 30 graus, é feito um estudo do método I-KSGFD para testar sua robustez quando efeitos gravitacionais são incluídos.

A simulação é feita, impondo um *HEAD* na seção 9 equivalente a uma diferença de pressão de $\Delta P \approx 3600\text{Pa}$. As evoluções das vazões com o tempo até atingir o regime estacionário, determinadas com o método I-KSGFD, são para as células 0, 3, 6 e 9, apresentadas, respectivamente, nas figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11. Na figura 5.12 estas evoluções são apresentas juntas, indicando que o regime estacionário foi atingido, fornecendo a vazão do sistema determinado com o método I-KSGFD.

O intervalo de tempo para o método I-KSGFD neste experimento foi: $\Delta t = 0,003000\text{s}$. O método de Euler explícito para simular este transiente precisa de um intervalo de tempo 2,00 vezes menor. Claramente de figura 5.12 podemos deduzir que o regime estacionário foi atingido e a vazão na planta determinada.

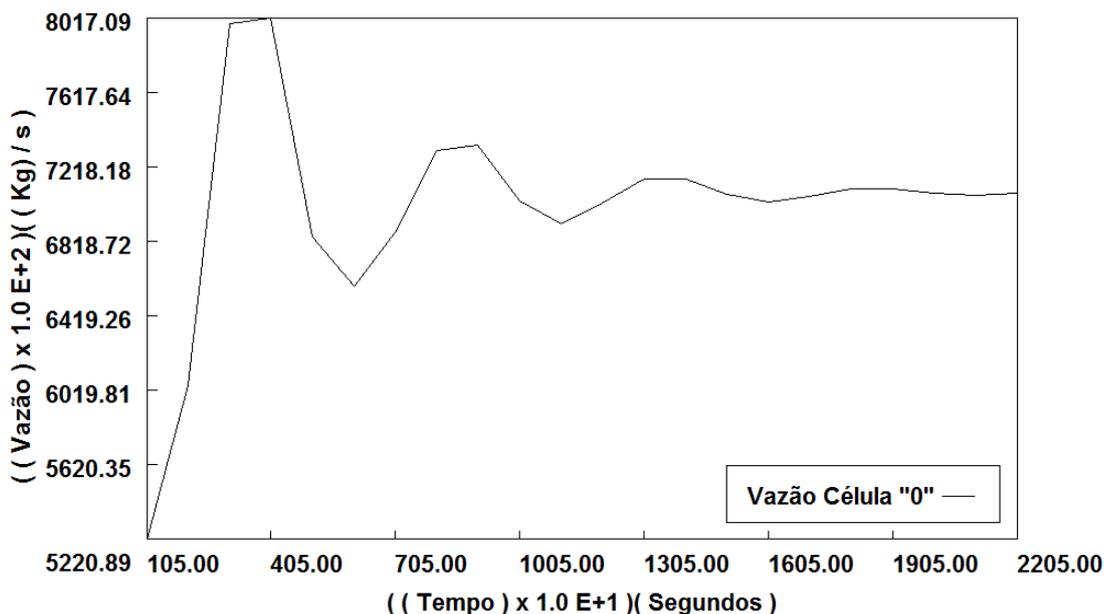


Figura 5.8: Vazão na Célula 0 (Experimento 3).

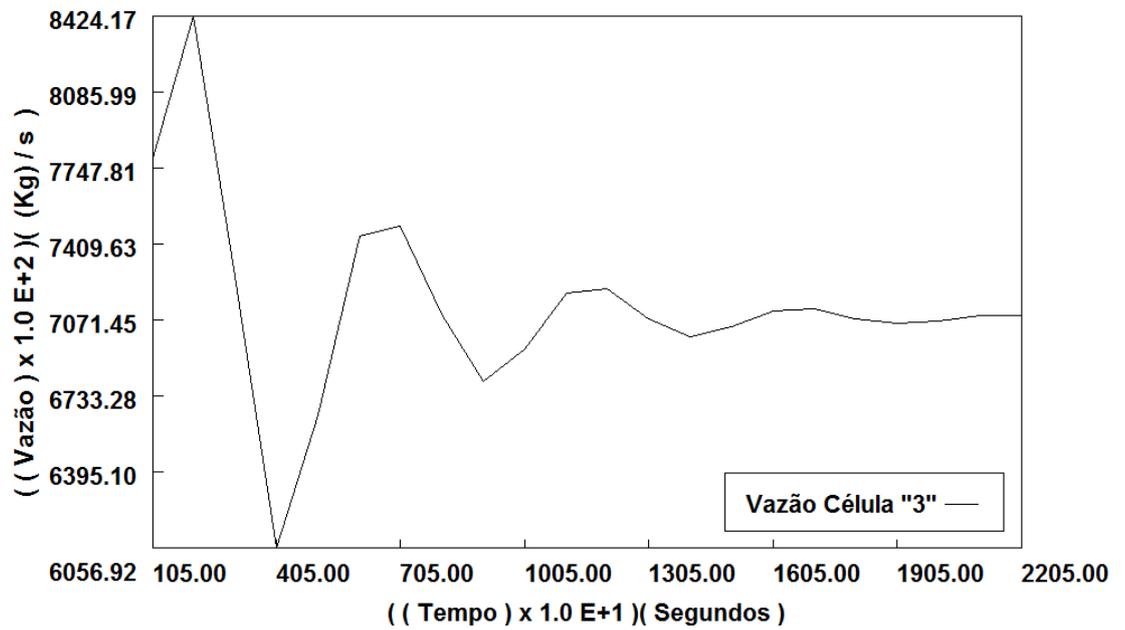


Figura 5.9: Vazão na Célula 3 (Experimento 3).

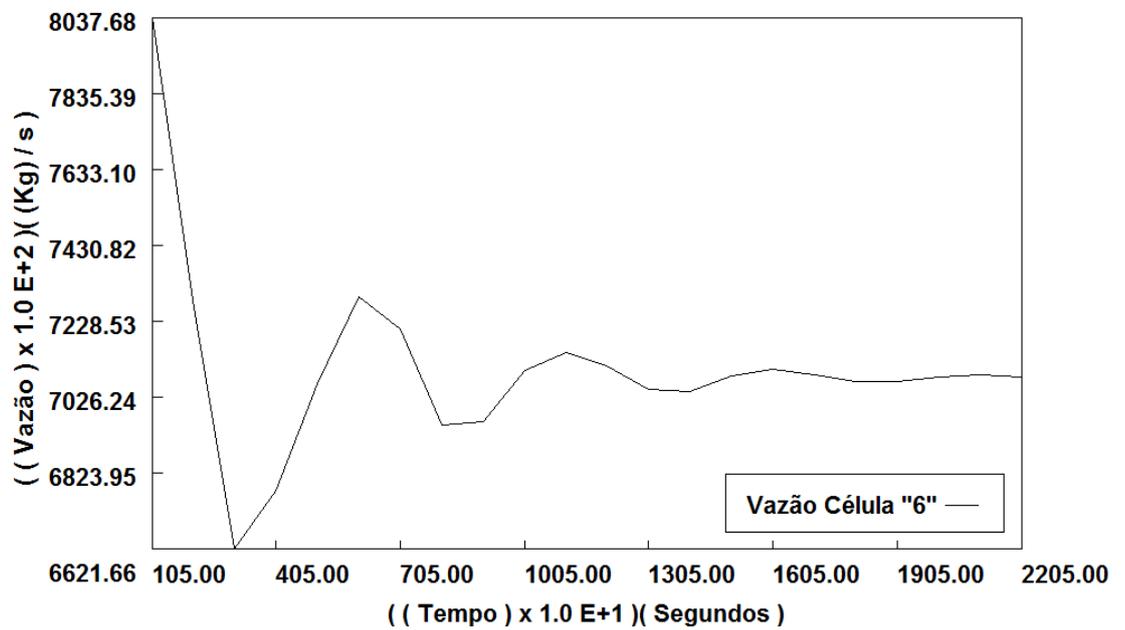


Figura 5.10: Vazão na Célula 6 (Experimento 3).

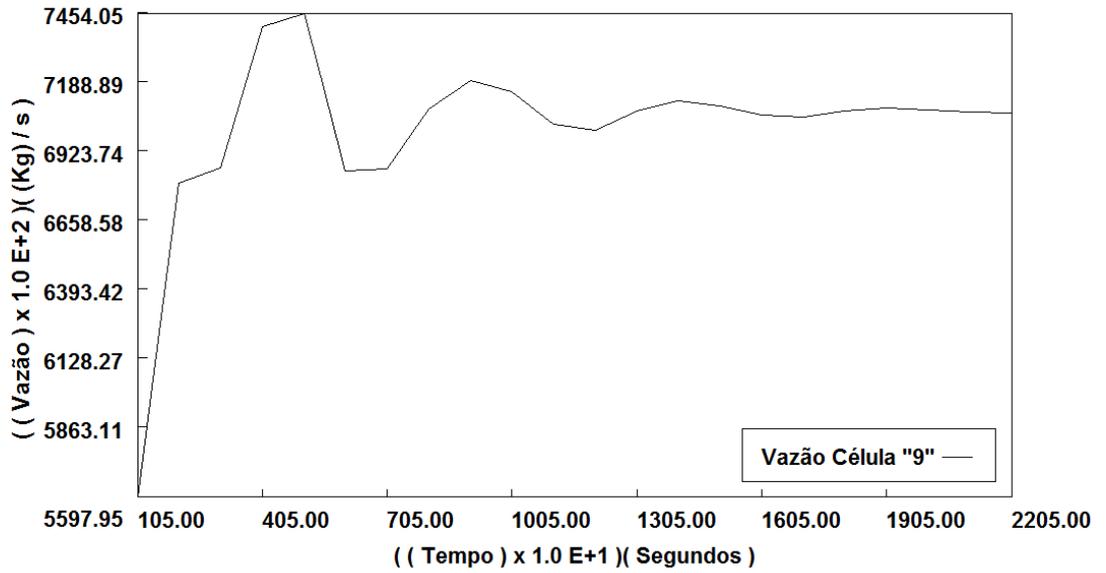


Figura 5.11: Vazão na Célula 9 (Experimento 3).

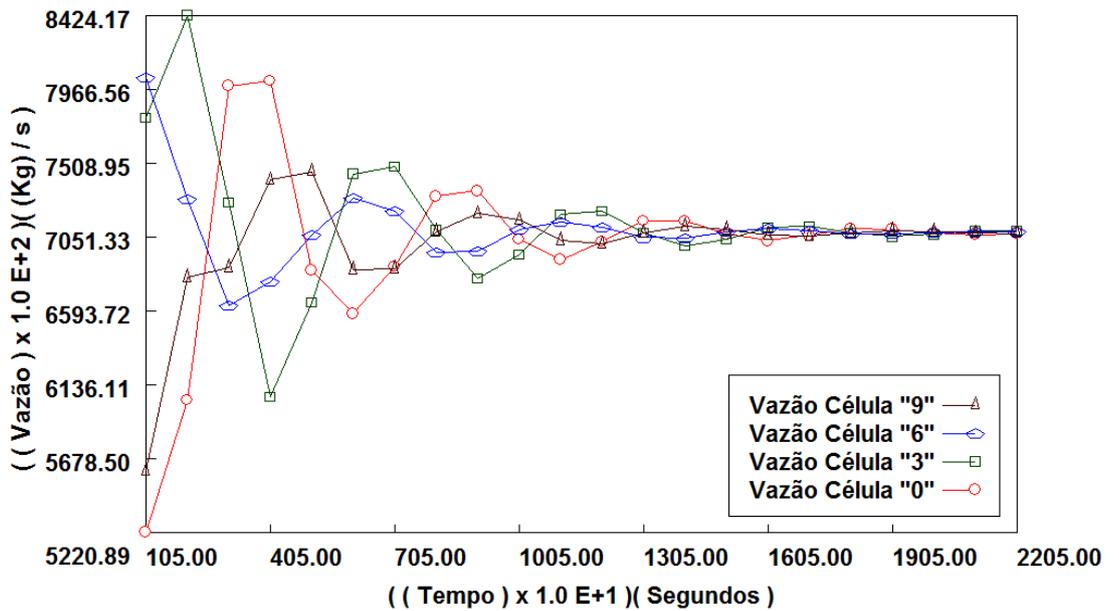


Figura 5.12: Todas as Vazões (Experimento 3).

Comparando figura 5.12 com figura 5.6 pode-se ver que o regime estacionário é atingido em um tempo maior na figura 5.12, mostrando o efeito da influência dos efeitos gravitacionais.

5.4 Experimento 4 (Planta Inclinada de 30 graus)

Neste experimento é determinado o Δt mínimo para se obter a vazão na planta através da simulação de um falso transiente para vários *HEAD* produzindo um ΔP e aplicado na seção 9. Os resultados são mostrados na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Δt mínimo para se obter a vazão (Planta Inclinada de 30 graus).

ΔP (Pascal)	Δt (I-KSGFD)	Δt (Euler Explícito)
3600	0.0030000	0.0015000
2600	0.0027500	0.0015000
1600	0.0027500	0.0007500

Novamente, observa-se a superioridade do esquema I-KSGFD apresentado em CARMO *et al.* sobre o esquema explícito de Euler. Além disso no método de Euler explícito nota-se mais uma vez que ao diminuir a severidade do transiente imposto, com um $\Delta P = 1600\text{Pa}$, precisamos diminuir o Δt .

Todavia, novamente aqui, deve ser notado que se tem um problema não linear, e no esquema de Euler explícito o sistema assume uma linearização atrasada (início do intervalo), e esta linearização pode estar produzindo erro em excesso, sendo provavelmente, o que novamente, obrigou a diminuição do Δt , e não o processo de estabilidade.

Portanto, novamente, não é estabilidade que pode estar forçando a diminuição do Δt , mas sim a precisão, já que o processo de diminuição foram nos experimentos necessários, simplesmente por questões de precisão, para inclusive evitar oscilações espúrias (negativas/positivas) nas vazões das células .

E novamente, deve ser realçado que no esquema I-KSGFD apresentado em CARMO *et al.*, a linearização é feita em um tempo maior que o do início do intervalo, estando portanto, mais próximo, do valor real que é o do fim do intervalo, permitindo assim obter uma solução mais precisa, ficando somente o critério de estabilidade para determinar o Δt .

Capítulo 6

Conclusão

O método I-KSGFD foi apresentado e desenvolvido sistematicamente para $K = 2$ por CARMO *et al.*, visando o seu estudo para possível uso na análise de plantas termo-hidráulicas.

A motivação foi devido ao fato do método KSGFD (BRENNY, 2012) ter se mostrado eficiente para problemas lineares em que a integração espacial é feita via o método dos volumes finitos. Por isso, em CARMO *et al.*, buscou-se apenas um novo esquema aprimorado, que é o Método I-KSGFD, para que também fosse útil em problemas não lineares. E aqui foi apresentado o primeiro estudo da possibilidade de aplicar este método I-KSGFD a circuito termo-hidráulicos.

O estudo verificou que o método I-KSGFD é eficiente em análises de falsos transientes tanto em circuitos horizontais, como em circuitos inclinados a 30 graus (ou seja, onde a cota gravitacional é não-nula), se mostrando sempre superior ao método de Euler explícito como pode ser deduzido das tabelas 5.1 e 5.2. No caso da planta inclinada, devido a presença de cota gravitacional, a vazão só foi determinada em tempo maior, se comparada com a planta horizontal, como era de se esperar, pois para testar a robustez se tem como condição inicial uma vazão nula.

Quando foi feita uma análise mais rigorosa com vários valores de diferença de pressão para a obtenção da vazão, na planta horizontal, constatou-se que o método I-KSGFD seguiu uma proporção de, quanto menores valores de ΔP , maiores eram os passos de tempo de I-KSGFD. O que era de se esperar, pois o transiente diminui em sua severidade, e o critério de estabilidade passa a ser dominante na determinação do intervalo de tempo, o que não ocorre com o método de Euler explícito, pois acontece o fato aparentemente estranho de se precisar diminuir o intervalo de tempo, como pode ser visto na tabela 5.1. Esta melhor performance do I-KSGFD é possivelmente decorrente do fato que a matriz do sistema a ser avaliada em um tempo mais próximo

ao do tempo do fim do intervalo, e não no início como é no método de Euler explícito.

Por outro lado, em uma planta inclinada, verificou-se que para ΔP maiores a performance do método I-KSGFD é melhor (com intervalos de tempos maiores). Em comparação, o método de Euler nos dois casos, tanto horizontal como inclinado, não se mostra tão eficaz, principalmente no que tange em ΔP menores. Devido a erros provenientes de sua linearização (como descrito acima), a malha no tempo se refina tanto (tentando controlar a precisão), que tende a tornar o método inviável, devido ao incremento no esforço computacional.

Como este estudo é pioneiro em utilizar o método I-KSGFD em plantas termo-hidráulicas, e ao longo dos resultados vistos no capítulo anterior, tem se mostrado positivo e bastante superior ao método explícito clássico de Euler, o objetivo em trabalhos posteriores é ampliar a pesquisa com a implementação de tabelas de vapor mais completa, e para então envolver análise transiente da entalpia (equação de energia), e isto é obrigatório para se ter em definitivo a avaliação do método I-KSGFD.

Referências Bibliográficas

ALADWANI, F. A., 2003, *Application of Mechanistic Models in Predicting Flow Behavior in Deviated Wells Under UBD Conditions*, B.Sc. dissertation, Kuwait University.

ASME, "International Steam Tables for Industrial Use", 2009, 2 Ed., New York.

BEAM, R. M., WARMING, R. F., "An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations", **Fluid Mechanics and Heat Transfer** v. 16, n.4, pp. 393-402, Apr. 1978.

BRENNEN, C. E., **Fundamentals of Multiphase Flows**, California, Cambridge University Press, 2005.

BRENNY, F., 2012, *Integração Temporal Explícita de Alta Ordem Via Técnicas de Malha deslocada Aplicada a Problemas Gerais de Primeira Ordem*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CAI, Z., "On the finite volume element method", **Numerische Mathematik**, v. 58, n.1, pp.713-735, 2001.

CARMO, E. G. D., BRENNY, F. and MANSUR, W. J., "Notas de aula do professor Eduardo Gomes Dutra do Carmo implementada na classe KSGFDexp na linguagem C++ e The Improved K-order Staggered Grid Finite Difference in the time". A ser submetido para publicação em **Journal of Computational Physics**.

CHORIN, R. A. J., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations", **Mathematic of Computational** v. 22, n. 104, pp. 745-762, Oct 1968.

CNEN, **Qualificação de Programas de cálculo para análise de perda de refrigerante em reatores a água pressurizada**, Resolução CNEN 11/85.

DELHAYE, J. M., GIOT, M., e RIETHMULLER, M. L., 1981, **Thermodynamics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering**, New York, McGraw-Hill.

DEMIRDZIC, I., MUZAFERIJA, S., "Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology", **Computer methods in applied mechanics and engineering** v. 125, n. 1-4, pp. 235-255, Sep. 1995.

FERNANDO, A. M., HU. F. Q., "DGM-FD: A finite difference scheme based on the discontinuous Galerkin method applied to wave propagation", **Journal of Computational Physics** v. 230, n. 12, pp. 4871-4898, Jun. 2011.

GESSNER, J. R., 2010, *Modelagem numérica do escoamento anular gás-liquido transiente pelo Método da Divisão da Matriz de Coeficientes*, Dissertação de M.Sc., UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

GHRIT, M., FORNBERG, B., DRISCOLL, T. A., "Staggered time integrators for wave equations", **SIAM Journal on Numerical Analysis** v.38, n. 3, pp.718-741, 2000.

GILLES, L., HAQNESS, S.S., VÁZQUEZ, L., "Comparison between Staggered and Unstaggered Finite-Difference time-domain grids for few-cycle Temporal optical Soliton propagation", **Journal of Computational Physics** v. 161, pp. 379-400, Jan. 2000.

HOF, B. V., VELDMAN, A. E. P., "Mass, momentum and energy conserving (MaMEC) discretizations on general grids for the compressible Euler and shallow water equations general grids for the compressible Euler and shallow water equations", **Journal of Computational Physics** v. 231, n. 14 pp. 4723-4744, May. 2012.

HOFF, D., "Stability and convergence of finite difference methods for systems of

nonlinear reaction-diffusion equations", **SIAM Journal on Numerical Analysis** v. 15, n. 6, pp. 1161-1177, Dec. 1978.

KATSAOUNIS, T., LEVY, D., "A modified structured central scheme for 2D Hyperbolic Conservation Laws", **Applied Mathematics Letters** v.12, n.6, pp. 89-96, Aug. 1999.

LEVANDER, A. R., "Fourth-order finite-difference P-SV seismograms", **Geophysics** v. 53, n. 11, pp. 1425-1436, Nov. 1988 .

LIU, Y., SEN, M. K., "An implicit staggered-grid finite-difference method for seismic modeling", **Geophysical Journal International** v.179, n.1, pp. 459-474, Oct. 2009.

MELO, T. M., 2007, *Desenvolvimento de um simulador para plantas termohidráulicas usando elementos de volume no espaço e elementos finitos no tempo*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MORALES-RUIZ, S., RIGOLA, J., RODRIGUEZ, I., OLIVA, A., "Numerical resolution of the liquid-vapour two-phase flow by means of the two-fluid model and a pressure based method", **International Journal of Multiphase Flow** v.43, pp. 118-130, Jul. 2012.

O'BRIEN, G. S., "3D rotated and standard staggered finite-difference solutions to Biot's poroelastic wave equations: Stability condition and dispersion analysis", **Geophysics** v. 75, n. 4, pp. T111-T119, Jul.-Ago. 2010.

PALADINO, E. E. Paladino, 2005, *Estudo do Escoamento Multifásico em Medidores de Vazão do tipo Pressão Diferencial*, Tese de D.Sc., UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, SC, Brasil.

PATANKAR, S. V., **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, New York, Taylor & Francis Books LTD, 2012.

PROVENZANO, C. E. C., 2007, *Previsão Numérica de Escoamento Bifásico em tubulações utilizando o Modelo de deslizamento*, Dissertação de M.Sc., PUC-

RIO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PUPPO, G. and RUSSO, G., "Staggered Finite Difference Schemes for Conservation Laws", **Journal of Scientific Computing** v. 27, n. 1-3, pp. 403- 418, Mar. 2005.

REZENDE, R. V. P., 2008, *Modelagem Matemática e Desenvolvimento de metodologia computacional para a simulação numérica do escoamento bifásico de ar e ferro-gusa em canal de corrida de alto-forno*, Dissertação de M.Sc., UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

SATO, M., "Diagonally Staggered Grid for Elastodynamic Analysis Using the Finite-Difference Time-Domain Method", **IEEE Ultrasonics Symposium**, 9474435, Vancouver, BC, 1394-1397, Oct. 2006.

SHI, H., HOLMES, J. A, DURLOFSKY, L. J., AZIZ, K., DIAZ, L.R., ALKAYA, B., ODDIE, G., "Drift-Flux modeling of two-phase flow in wellbores", **Society of Petroleum Engineers** v. 10, n. 01, pp. 24-33, 2005.

SOD, G. A., "A Survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws", **Journal of Computational Physics** v. 27, n. 1, pp. 1-31, Apr. 1978.

SOUZA, J. N. M. de, 2010, *Modelagem e Simulação de Escoamento Multifásico em Dutos de Produção de Óleo e Gás Natural*, Tese de D.Sc., Tecnologia de Processos Químicos e Bioquímico da UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

TODREAS, N. E., KAZIMI, M. S., **NUCLEAR SYSTEMS I - Thermal Hydraulic Fundamentals**. Nova York, Hemisphere Publishing Corporation, 1989.

TODREAS, N. E., KAZIMI, M. S., **NUCLEAR SYSTEMS II - Elements of Thermal Hydraulic Design**., Nova York, Hemisphere Publishing Corporation, 1990.

TOUMA, R., JANNOUN, G., "Non-oscillatory central schemes on unstructured grids for two-dimensional hyperbolic conservation laws", **Applied Numerical**

Mathematics v. 62, n.8, pp.941-955, Aug. 2012.

VENUTELLI, M., "A third-order explicit central scheme for open channel flow simulations", **Journal of Hydraulic Research** v.44, n. 3, pp. 402-411, 2006.

VERZNICO, R., ORLANDI, P., "A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates", **Journal of Computational Physics** v.123, n.2, pp. 402-414, Feb 1996.

VIRIEUX, J., "SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method", **Geophysics** v. 49, n. 11, pp. 1933-1957, Nov. 1984.

VIRIEUX, J., "P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method", **Geophysics** v. 51, n. 4, pp. 889-901, Apr. 1986.

YEFET, A., PETROUPOULOS, P. G., "A staggered fourth-order accurate explicit finite difference scheme for the time-domain Maxwell's Equations", **Journal of Computational Physics** v. 168, n. 2, pp. 286-315, Apr. 2001.

ZENG, Y. Q., Q. H. LI, "A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations", **Journal Acoustical Society of America** v.109, n.6, pp. 2571-2580, Jun, 2001.

ZHANG, J., VERSCHUURD. J., "Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method", **Geophysics** v.67, n. 2, pp.625-638, Mar. 2002.