



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DE MALHA GROSSA ANALÍTICO

Maurício Penetra da Roza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientador(es): Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Rio de Janeiro

Junho de 2013

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELO MÉTODO DE
DIFERENÇAS FINITAS DE MALHA GROSSA ANALÍTICO

Maurício Penetra da Roza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc

Dr. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2013

Roza, Maurício Penetra da

Solução da Equação de Difusão de Nêutrons pelo Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico/ Maurício Penetra da Roza. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XV, 122 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 121-122.

1. Método de diferenças finitas de malha grossa analítico. 2. Equação da difusão de nêutrons. 3. Lei de Fick. I. Silva, Fernando Carvalho da *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

Dedico este trabalho à minha querida mãe.

Agradecimentos

A Deus, por minha vida, família e amigos.

À minha mãe, pelo apoio incondicional. Sem ela, provavelmente não estaria escrevendo esses agradecimentos.

Aos meus tios e tias, com os quais sempre pude contar. Principalmente, às minhas queridas tias Celina e Maria Luiza.

Aos meus irmãos, meus primos e meus amigos pelo companheirismo.

A Adriana, minha futura esposa pela compreensão.

A todos os professores que tive o privilégio de conhecer no decorrer de toda minha formação acadêmica e, em especial, aos meus orientadores Fernando Carvalho e Aquilino Senra.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DE MALHA GROSSA ANALÍTICO

Maurício Penetra da Roza

Junho/2013

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

Nesta dissertação o Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico (DFMGA) é usado para resolver a equação de difusão de nêutrons tridimensional e em dois grupos de energia. No DFMGA o perfil de fuga transversal é representado por um polinômio do segundo grau e os coeficientes de difusão nas faces do nodo são obtidos resolvendo-se analiticamente a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, a qual depende do perfil de fuga transversal. Com isto, as densidades de corrente médias nas faces dos nodos podem ser escritas em função destes coeficientes de difusão nas faces e de fluxos médios, da mesma forma que é feito no Método de Diferenças Finitas Clássico. Sendo assim, pode-se resolver qualquer problema de autovalor (na Teoria da Difusão de Nêutrons) usando as mesmas ferramentas computacionais que são utilizadas no Método de Diferenças Finitas Clássico. O programa computacional desenvolvido, que faz uso do DFMGA, foi validado utilizando três benchmarks, benchmark IAEA 3D, LRA 3D e LMW 3D, através da comparação do fator de multiplicação efetivo e da distribuição da densidade de potência calculados, com os resultados de referência deste benchmark. Os resultados dos testes do processo de validação se mostraram dentro do que é esperado para cálculos nodais de malha grossa.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SOLUTION OF THE NEUTRON DIFFUSION EQUATION USING THE
ANALYTIC COARSE-MESH FINITE DIFFERENCE METHOD

Maurício Penetra da Roza

June/2013

Advisors: Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Department: Nuclear Engineering

In this dissertation the Analytic Coarse-Mesh Finite Difference Method (ACMFD) is used to solve the two energy group, three-dimensional neutron diffusion equation. In the ACMFD the transverse leakage profile is represented by a second degree polynomial and the face diffusion coefficients of these nodes are obtained by solving the transverse integrated neutron diffusion equation analytically, which depends on the transverse leakage profile. As a result, the average face current density of the nodes can be written as a function of the face diffusion coefficients and of average fluxes, as done in the Classical Finite Difference Method. Therefore, any eigenvalue problem (in the neutron diffusion theory) can be solved using the same computational tools which are used in the Classical Finite Difference Method. The software developed, which employs the ACMFD, was validated using three benchmarks, IAEA 3D benchmark, LRA 3D benchmark and LMW 3D benchmark, by comparing the calculated effective multiplication factor and the power density distribution with the reference results from this benchmark. The results of these tests were as expected for coarse mesh nodal calculations.

Índice

INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo 1	8
EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS	8
1.1 – Equação da Continuidade de Nêutrons	9
1.2 – Lei de Fick	10
1.3 – Equação de Difusão de Nêutrons	11
1.4 – Equação de Balanço Nodal	12
Capítulo 2	17
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS CLÁSSICO	17
Capítulo 3	24
EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS INTEGRADA TRANSVERSALMENTE	24
3.1 – Método de Expansão Nodal (NEM)	26
3.1.1 – Coeficientes da fuga transversal.....	29
3.1.2 – Coeficientes primários.....	33

3.1.3 – Coeficientes secundários.....	35
3.1.4 – Correntes parciais de saída.....	37
3.1.5 – Fluxo médio nodal.....	39
Capítulo 4	40
SOLUÇÃO ANATÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS INTEGRADA TRANSVERSALMENTE	40
4.1 – Método da decomposição	42
4.1.1 – Determinação da matriz de transformação de similaridade R_n	44
4.1.2 – Determinação dos autovalores λ	49
4.2 – Solução analítica para cálculo da função $\xi_{\ell,u}^n(\mathbf{u})$	51
4.2.1 – Solução da equação homogênea.....	52
4.2.2 – Solução particular.....	53
4.2.3 – Solução geral.....	58
4.3 – Determinação dos coeficientes \tilde{A}_u^n e \tilde{B}_u^n	60
4.4 – Densidade de corrente e coeficiente de difusão	63
Capítulo 5	70
DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE DE NÊUTRONS	70

5.1 – Processo iterativo de cálculo.....	75
Capítulo 6	79
APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	79
6.1 – Benchmark IAEA 3D.....	79
6.2 – Benchmark LRA 3D.....	89
6.3 – Benchmark LMW 3D.....	97
Capítulo 7	105
CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
Apêndice A	108
Apêndice B	110
Referências	121

Lista de Figuras

Figura 1	- Evolução da taxa de eletrificação dos domicílios brasileiros entre 1970 e 2000. Retirado de (Atlas de Energia Elétrica do Brasil, 2002).....	1
Figura 2	- Demanda energética no Brasil. Retirada de (Empresa de Pesquisa Energética, 2012).....	2
Figura 3	- Pastilha de combustível (dióxido de urânio). Retirada de (www.inb.gov.br).....	3
Figura 4	- Elemento combustível. Retirada de (www.inb.gov.br).....	4
Figura 5	- Angra II. Retirada de (www.eletronuclear.gov.br).....	5
Figura 6	- Representação de um nodo e suas arestas ao longo dos eixos cartesianos.....	12
Figura 7	- Representação das interfaces entre as malhas (m , n e k) e suas dimensões.....	18
Figura 8	- Representação das interfaces entre os nodos (m , n e k).....	64
Figura 9	- Representação de um nodo genérico n e seus nodos vizinhos.....	70
Figura 10	- Fluxograma do programa Nodalização.....	76
Figura 11	- Fluxograma do programa DFMG.....	77

Figura 12	- Modelo computacional relativo ao programa DFMG.....	78
Figura 13	- Configuração para simetria de 1/4 do benchmark IAEA 3D, na camada 3.....	80
Figura 14	- Configuração do benchmark IAEA 3D em um plano xz.....	81
Figura 15	- Configuração para simetria de 1/4 do benchmark LRA 3D.....	90
Figura 16	- Configuração do benchmark LRA 3D em um plano xz.....	91
Figura 17	- Configuração para simetria de 1/4 do benchmark LMW 3D.....	97
Figura 18	- Configuração do benchmark LMW 3D em um plano xz.....	98

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Parâmetros nucleares do benchmark IAEA 3D.....	82
Tabela 2 - Tolerâncias adotadas para os testes de convergência.....	83
Tabela 3 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 1x1.....	85
Tabela 4 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2.....	86
Tabela 5 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4.....	87
Tabela 1 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual.....	88
Tabela 2 - Configuração do computador.....	89
Tabela 3 - Tempo de CPU.....	89
Tabela 4 - Parâmetros nucleares do benchmark LRA 3D.....	91
Tabela 5 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2....	94
Tabela 6 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4....	95
Tabela 7 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual.....	96
Tabela 8 - Tempo de CPU.....	96
Tabela 9 - Parâmetros nucleares do benchmark LMW 3D.....	99

Tabela 10 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 1x1....	101
Tabela 11 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2....	102
Tabela 12 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4....	103
Tabela 13 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual.....	104
Tabela 14 - Tempo de CPU.....	104

INTRODUÇÃO

A demanda por energia elétrica no Brasil, como no resto do mundo, aumenta a cada ano que passa, seja devido à universalização do acesso a energia elétrica, veja Figura 1, ao aumento do parque industrial ou ao aumento do consumo médio residencial. No biênio 2010-2011 o consumo residencial apresentou um aumento de 4,4%, o setor industrial apresentou um aumento de 3,0% e os demais setores – público, agropecuário, comercial e transporte – quando analisados em blocos apresentaram variações positivas de 6,4% (EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA, 2012: Ano base 2011).

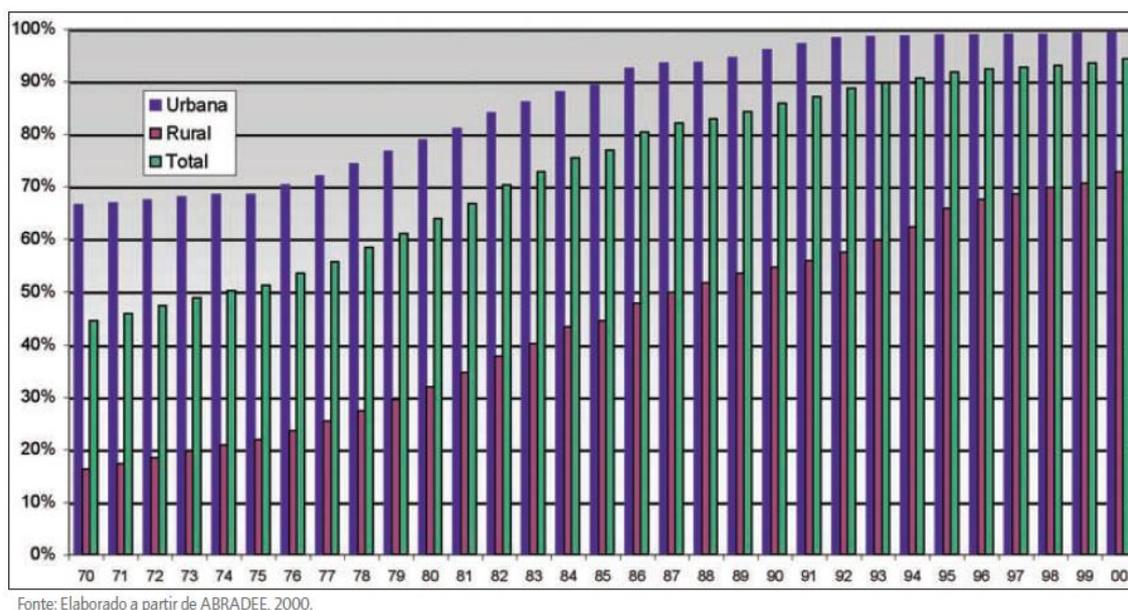
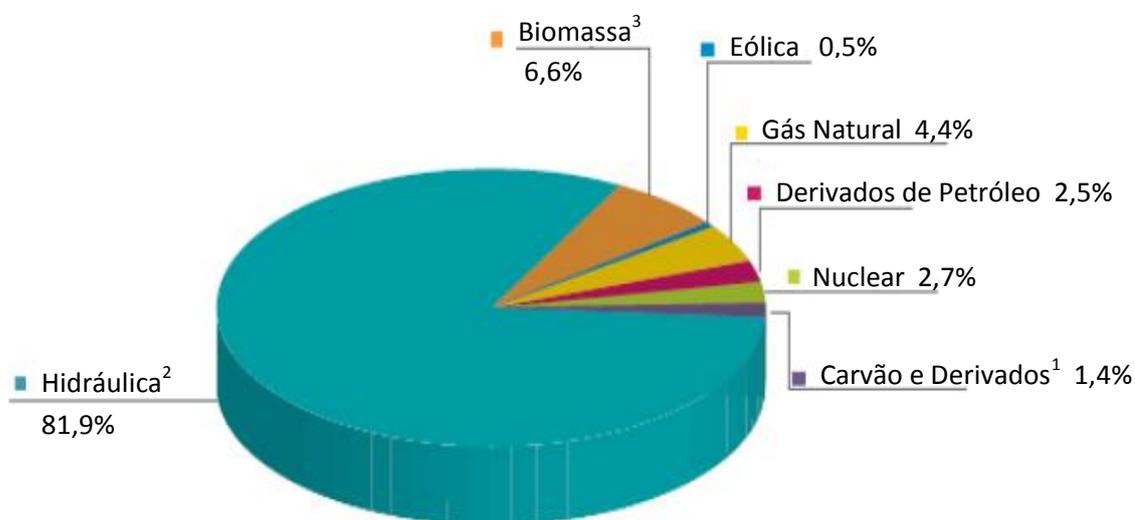


Figura 1 - Evolução da taxa de eletrificação dos domicílios brasileiros entre 1970 e 2000.
Fonte: Atlas de Energia Elétrica do Brasil, 2002

A matriz de geração elétrica do Brasil é predominantemente hidráulica, com aproximadamente 74% da energia elétrica gerada. A Figura 2 apresenta a estrutura da oferta interna de eletricidade no Brasil em 2011



¹ Inclui gás de coqueria recuperações

² Inclui importação de eletricidade

³ Inclui lenha, bagaço de cana, lixo e outras

Figura 2 - Demanda energética no Brasil. Fonte: Empresa de Pesquisa Energética, 2012

Com o aumento da demanda por energia elétrica, esforços cada vez maiores estão sendo empregados para o aumento de sua geração. O descontentamento da população com as fontes térmicas convencionais, altamente poluentes, pode contribuir para um cenário mais positivo para o setor nuclear nos próximos anos, uma vez que não há emissão para a atmosfera de gases nocivos como os óxidos de carbono (COx), os óxidos de azoto (NOx) e os óxidos de enxofre (SOx), entre outros na geração termonuclear e possui um pequeno impacto ambiental.

A energia nuclear tem uma das melhores taxas de geração de calor entre as fontes térmicas de geração de energia. Suas usinas se concentram em uma pequena área, não são sazonais, ou seja, não dependem de fatores climáticos, tem baixo impacto ambiental, durante a operação não emite gases nocivos, tem um combustível potente e de baixo custo e não possuem limitações geográficas, ou seja, podem ser instaladas próximas aos grandes centros urbanos(ELETROBRÁS/ELETRONUCLEAR, 2011).

O combustível utilizado nas usinas termonucleares do tipo PWR (sigla em inglês para reator à água pressurizada) é o urânio enriquecido ($^{235}\text{U}_{92}$), na forma de dióxido de urânio e fabricados na forma de pastilhas, conforme mostrado na Figura 3. Essas pastilhas, então são agrupadas nas varetas combustíveis e estas varetas por sua vez são agrupadas formando o elemento combustível (EC), conforme mostrado na Figura 4.



Figura 3 - Pastilha de combustível (dióxido de urânio).

Fonte: www.inb.gov.br

Para se ter uma ideia do poder energético do urânio, duas pastilhas de dióxido de urânio, como as mostradas na Figura 3, usadas em reatores PWRs, por exemplo, como as usadas nas usinas nucleares de Angra dos Reis, produzem energia suficiente para abastecer uma residência com quatro habitantes por um mês inteiro. A energia obtida de um quilograma de urânio enriquecido equivale à energia gerada pela queima de cinquenta e cinco vagões carregados de carvão, ou a queima de seis caminhões cheios de óleo (FREIRE, 2009).



Figura 4 - Elemento combustível. Fonte:
www.inb.gov.br

Com isso se tem uma noção real do poder de geração de energia de uma usina termonuclear, já que uma usina nuclear como Angra 2, veja Figura 5, que tem uma potência nominal de 1 350 MW elétricos, possui 103 toneladas de urânio, em seu núcleo, distribuídos em 17,5 milhões de pastilhas de UO_2 (dióxido de urânio).

A previsão da eletronuclear é que após a construção de Angra 3, a Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto, que passará a ser composta de três usinas nucleares, Angra 1, Angra 2 e Angra 3, será capaz de gerar o equivalente a 50% da demanda de eletricidade do estado do Rio de Janeiro(ELETROBRÁS/ ELETRONUCLEAR).

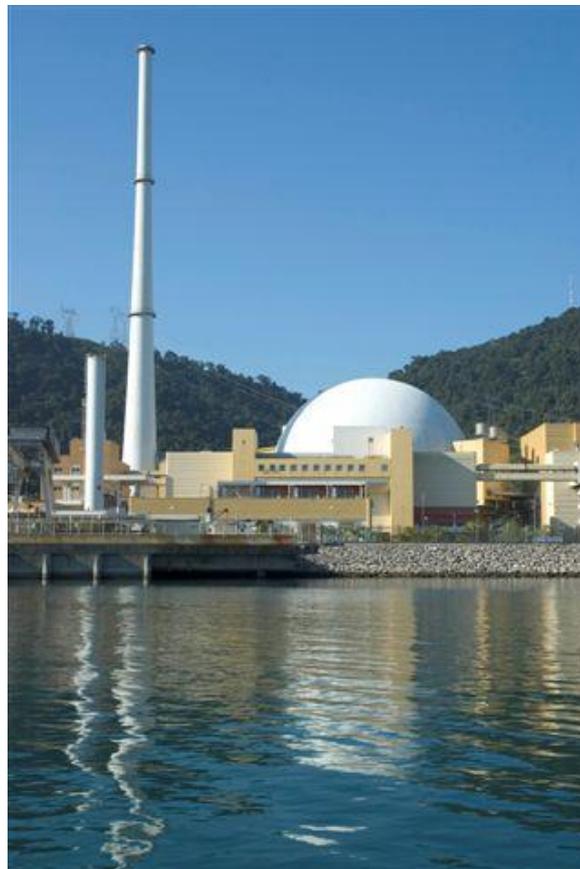


Figura 5 - Angra II. Fonte:
www.eletronuclear.gov.br

Nos reatores nucleares, que operam nestas usinas, há um balanço entre o número de nêutrons por unidade de energia que é produzido por fissão e/ou espalhamento e o número de nêutrons que é perdido por captura, espalhamento e/ou fuga através do contorno(DUDERSTADT & HAMILTON, 1976). Além disso, um dos problemas centrais no desenvolvimento de um reator nuclear é o cálculo do tamanho e da composição do sistema, requeridos para manter esse balanço estacionário. Desta forma, o estudo da população neutrônica em reatores nucleares é de grande interesse.

Com efeito, para cálculos das condições necessárias para atingir a criticalidade, podemos utilizar a teoria da difusão de nêutrons(DUDERSTADT & HAMILTON, 1976). Nesse caso, teoria da difusão de nêutrons recai em um problema de autovalor e autovetor. A solução desse problema nos fornece tanto o fator de multiplicação efetivo de nêutrons, definido como maior autovalor dominante, quanto a distribuição do fluxo de nêutrons no reator nuclear, que é o autovetor associado(ALVIM, 2007). Então, o problema de encontrar o fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons, consiste em resolver um problema de autovalor e autovetor, usando as equações, independentes de tempo, dos modelos matemáticos da teoria da difusão de nêutrons. Dentro desse contexto, este trabalho tem como objetivo resolver numericamente a equação de difusão de nêutrons independente do tempo, em geometria cartesiana para dois grupos de energia e três dimensões.

Há várias técnicas de solução da equação de difusão de nêutrons, uma das primeiras técnicas utilizada foi o Método de Diferenças Finitas Clássico (DFC)(ALVIM, 2007), uma outra técnica, uma das mais difundidas, é o Método de Expansão Nodal (NEM)(FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977) . A nossa proposta é resolver a equação de difusão de nêutrons utilizando o Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico (DFMGA)(CHAO, 1999; CHAO, 2000). O método

aqui proposto tem como base os trabalhos desenvolvidos por Y. A. Chao(CHAO, 1999; CHAO, 2000) e o trabalho de Cassiano de Souza Guimarães(GUIMARÃES, 2008) que procuram manter a mesma estrutura geral do Método de Diferenças Finitas Clássico.

O objetivo desta dissertação é desenvolver uma técnica de solução da equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente(FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977), esperando que ela possa ser usada individualmente para determinar o valor do fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons em um reator nuclear ou para acelerar um método já existente, como o Método de Expansão Nodal (NEM, sigla em inglês)(FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977).

Esta dissertação de mestrado está organizada em 7 capítulos. No capítulo 1 apresentamos a equação da continuidade de nêutrons em geometria cartesiana e formulação multigrupo e a lei de Fick, e obtemos, a partir da equação da continuidade, a equação de difusão de nêutrons e a equação de balanço nodal. Já no capítulo 2 apresentamos de forma sucinta o método de Diferenças Finitas Clássico. No capítulo 3 falamos da diferença entre os Métodos de Expansão Nodal (NEM), de Diferenças Finitas Clássico (DFC) e de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico (DFMGA), obtemos a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente e, por último, apresentamos o método NEM. No capítulo 4, resolvemos analiticamente a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente. No capítulo 5 fazemos a discretização espacial da equação da continuidade e apresentamos o processo iterativo de cálculo. No capítulo 6 apresentamos e analisamos os resultados. E finalmente no capítulo 7 apresentamos as conclusões e a sugestão para trabalhos futuros.

Capítulo 1

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS

O problema central na teoria dos reatores nucleares é a determinação da distribuição de nêutrons dentro do reator, pois é a distribuição de nêutrons que determina a taxa na qual variam as reações nucleares que ocorrem dentro do reator. A maioria dos estudos considera o movimento de nêutrons como um processo de difusão. Com efeito, supõe-se que nêutrons tendem a difundir a partir de regiões de alta densidade de nêutrons para regiões de baixa densidade de nêutrons, da mesma forma que as moléculas de um gás se difundem tendendo a deixar uniforme a distância entre as moléculas do gás em todo volume que o gás ocupa (DUDERSTADT & HAMILTON, 1976).

A equação de difusão de nêutrons é uma equação de derivadas parciais que descreve a variação de densidade de nêutrons e representa o balanço entre produção e perda de nêutrons. Ela é obtida substituindo a lei de Fick na equação da continuidade de nêutrons.

Neste capítulo, primeiro, apresentaremos a equação da continuidade e a lei de Fick, depois obteremos a equação de difusão de nêutrons e a equação de balanço nodal.

1.1 - Equação da Continuidade de Nêutrons

A equação da continuidade de nêutrons em geometria cartesiana na formulação multigrupos de energia, é dada por:

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{\partial}{\partial u} J_{gu}(x,y,z) + \Sigma_{Rg}(x,y,z) \phi_g(x,y,z) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}(x,y,z) \phi_{g'}(x,y,z) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}(x,y,z) \phi_{g'}(x,y,z). \quad (1.1)$$

Onde J_{gu} é a densidade de corrente do grupo g (g é o grupo de energia, por convenção adotaremos que a energia decresce com o aumento do índice g) para a direção u ($u = x, y$ e z), $\Sigma_{Rg}(x,y,z)$ é a seção de choque macroscópica de remoção para nêutrons do grupo g , $\phi_g(x,y,z)$ é o fluxo de nêutrons do grupo g , k_{eff} é o fator de multiplicação efetivo, χ_g é o espectro de fissão para nêutrons do grupo g , $v \Sigma_{fg'}(x,y,z)$ é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g' multiplicado pelo número médio de nêutrons emitidos por fissão e $\Sigma_{gg'}(x,y,z)$ é a seção de choque de espalhamento do grupo g' para o grupo g .

O primeiro termo do lado esquerdo da equação da continuidade, equação (1.1), representa a fuga de nêutrons, o segundo termo da mesma equação representa a remoção

de nêutrons através da interação nêutron – núcleo, os dois termos do lado direito da equação são os termos de fonte de fissão e de espalhamento, respectivamente.

1.2 - Lei de Fick

Segundo a lei de Fick (LAMARSH, 1966) a densidade de corrente de nêutrons é diretamente proporcional ao gradiente do fluxo de nêutrons, onde a constante de proporcionalidade é o coeficiente de difusão, que depende do meio material. O sinal negativo indica que a difusão acontece da região de maior densidade para a de menor densidade de nêutrons.

$$J_{gu}(x, y, z) = -D_g(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(x, y, z) \quad ; \quad \text{para } u = x, y, z . \quad (1.2)$$

Onde $D_g(x, y, z)$ é o coeficiente de difusão do meio material, para nêutrons do grupo g .

1.3 - Equação de Difusão de Nêutrons

Para obtermos a equação de difusão de nêutrons(DUDERSTADT & HAMILTON, 1976), substituímos a equação (1.2), lei de Fick, na equação (1.1), equação da continuidade de nêutrons, resultando em

$$\begin{aligned} - \sum_{u=x,y,z} \frac{\partial}{\partial u} \left[D_g(x, y, z) \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(x, y, z) \right] + \Sigma_{Rg}(x, y, z) \phi_g(x, y, z) = \\ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \lambda_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}(x, y, z) \phi_{g'}(x, y, z) + \\ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}(x, y, z) \phi_{g'}(x, y, z) . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Obtemos assim a equação de difusão nêutrons em geometria cartesiana na formulação multigrupos de energia.

1.4 - Equação de Balanço Nodal

Na discretização espacial do núcleo de um reator nuclear, o núcleo é subdividido em nodos, que são paralelepípedos retos cujas arestas podem ou não ser congruentes, a Figura 6 representa um nodo genérico n e suas arestas.

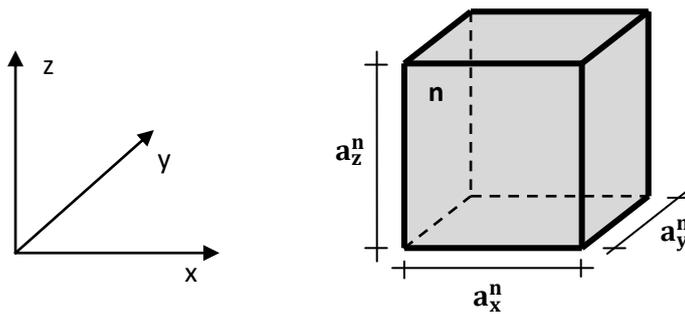


Figura 6 - Representação de um nodo e suas arestas ao longo dos eixos cartesianos.

onde:

$$\mathbf{a}_u^n = \begin{cases} \mathbf{a}_x^n ; u = x \\ \mathbf{a}_y^n ; u = y \\ \mathbf{a}_z^n ; u = z \end{cases} .$$

Para obtermos a equação de balanço nodal, equação esta que relaciona as densidades de corrente nas faces do nodo, conforme representado na Figura 6, com o fluxo de nêutron médio no nodo, devemos aplicar o operador de média em volume na equação da continuidade.

Aplicando então o operador de média em volume, dado por:

$$\frac{1}{a_x^n a_y^n a_z^n} \int_0^{a_x^n} \int_0^{a_y^n} \int_0^{a_z^n} (\bullet) dx dy dz ,$$

na equação da continuidade de nêutrons, equação (1.1), obtém-se a equação de balanço nodal .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_x^n} (\bar{J}_{gxr}^n - \bar{J}_{gx\ell}^n) + \frac{1}{a_y^n} (\bar{J}_{gyr}^n - \bar{J}_{gy\ell}^n) + \frac{1}{a_z^n} (\bar{J}_{g zr}^n - \bar{J}_{g z\ell}^n) + \Sigma_{Rg}^n \bar{\phi}_g^n = \\ & \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n . \end{aligned} \quad (1.4)$$

Onde n representa o nodo enquanto que r e ℓ representam as faces direita e esquerda, para uma dada direção, respectivamente, conforme mostrado na Figura 6. Neste nodo os parâmetros nucleares de multigrupos são uniformes, ou seja, não variam espacialmente. O fluxo médio e as densidades de corrente médias nas faces são assim definido:

Fluxo médio de nêutron no nodo:

$$\bar{\phi}_g^n \equiv \frac{1}{a_x^n a_y^n a_z^n} \int_0^{a_x^n} \int_0^{a_y^n} \int_0^{a_z^n} \phi_g(x, y, z) dx dy dz . \quad (1.5)$$

Densidades de corrente médias nas faces do nodo n, para direção u:

$$\bar{J}_{gus}^n \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} J_{gu}(u_s^n, v, w) dv dw , \quad (1.6)$$

onde:
$$u_s^n = \begin{cases} 0 & \text{se } s = \ell \\ a_u^n & \text{se } s = r \end{cases} .$$

A equação de balanço nodal, equação (1.4), possui sete incógnitas para cada grupo de energia, seis são as densidades de corrente médias em cada face do nodo, \bar{J}_{gus}^n ($u = x, y, z$ e $s = \ell, r$), e uma é o fluxo médio no nodo, $\bar{\phi}_g^n$. A relação existente entre as densidades de corrente médias nas faces do nodo e o fluxo médio no nodo, as chamadas equações de acoplamento, são obtidas a partir da lei de Fick; Substituindo a equação (1.2), na equação (1.6), obtemos a seguinte equação:

$$\bar{j}_{\text{gus}}^n \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} -D_g(u_s^n, v, w) \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(u, v, w) \Big|_{u=u_s^n} dv dw . \quad (1.7)$$

Como os parâmetros nucleares são uniformes dentro do nodo, da equação (1.7) obtemos:

$$\bar{j}_{\text{gus}}^n \equiv -D_g^n \left(\frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(u, v, w) dv dw \right) \Big|_{u=u_s^n} \quad (1.8)$$

ou

$$\bar{j}_{\text{gus}}^n = -D_g^n \frac{d}{du} \bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u) \Big|_{u=u_s^n} ; \quad \text{com } u_s^n = \begin{cases} 0 & \text{se } s = \ell \\ a_u^n & \text{se } s = r \end{cases} , \quad (1.9)$$

onde $\bar{\Psi}_u^n(u)$ é o fluxo médio de nêutrons na área transversal a direção u do nodo n , dado por:

$$\bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u) \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} \phi_g^n(u, v, w) dv dw . \quad (1.10)$$

A equação (1.9) fornece uma relação direta entre a densidade de corrente média na face do nodo, \bar{J}_{gus}^n , com o fluxo médio na face do nodo, $\bar{\Psi}_{\text{gus}}^n$.

Para resolvermos a equação de balanço nodal, equação (1.4), precisamos determinar as densidades de corrente médias, \bar{J}_{gus}^n , que são obtidas a partir da lei de Fick, equação (1.9), que relaciona esta densidade de corrente média com a derivada do fluxo médio de nêutrons na face do nodo, $\bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u)$. É justamente no modo de obtenção deste fluxo médio na face do nodo que o método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico (DFMGA) se diferencia do método de Diferenças Finitas Clássico (DFC). Em DFC a derivada do fluxo médio na face, $\left. \frac{d}{du} \bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u) \right|_{u=u_g^n}$, é aproximado por diferenças entre valores discretos da função, enquanto que em DFMGA o fluxo médio de nêutrons na face, $\bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u)$, é obtido através da solução analítica da equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente (a obtenção desta equação será feita na seção 3.1, onde o operador de média em área é aplicado à equação de difusão de nêutrons).

Capítulo 2

MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS CLÁSSICO

Um dos primeiros métodos de solução da equação de difusão de nêutrons foi o método de Diferenças Finitas Clássico (DFC) (ALVIM, 2007), este método consiste em aproximar a parte de uma curva delimitada por dois pontos muito próximos pela secante que passa por esses dois pontos.

É um método de excelente acurácia, porém com um inconveniente, por ser um método de malha fina, ou seja o reator nuclear é subdividido em um grande número de malhas, requer um grande tempo computacional no seu processamento numérico. Já no método que descreveremos nesta dissertação, método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico (DFMGA), as malhas (que no caso do método DFMGA são chamadas de nodos) possuem suas dimensões da mesma ordem de grandeza das dimensões radiais de um elemento combustível. Com isso, esperamos diminuir bastante o tempo computacional mantendo a excelente acurácia do DFC. DFMGA é um método nodal, pois trabalha com nodos da mesma ordem de grandeza dos elementos combustível, mas procura manter a mesma estrutura, em relação ao arranjo dos fluxos adjacentes, do DFC.

Neste capítulo descreveremos sucintamente o método de Diferenças Finitas Clássico, pois o mesmo servirá como guia para escrevermos as equações discretizadas do DFMGA.

Necessitamos determinar as equações de acoplamento, que ao substituir na equação de balanço nodal, obteremos uma equação, onde as únicas incógnitas serão os fluxos médios na malha n e em seus vizinhos.

Para obtermos a densidade de corrente em função do fluxo médio, utilizamos a condição de continuidade de corrente, a condição de continuidade de fluxo, o operador diferenças finitas e a lei de Fick nas interfaces entre os nodos. A Figura 7 representa as malhas m , n e k , e a interface entre estes nodos na direção u .

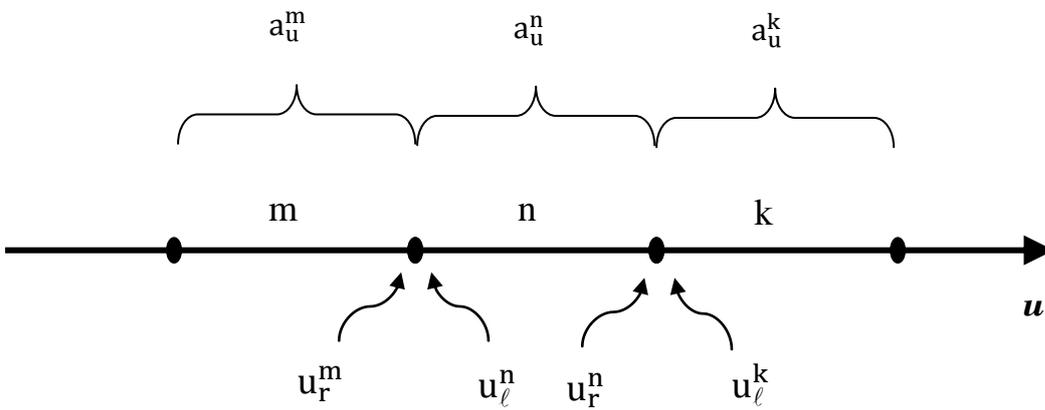


Figura 7 - Representação das interfaces entre as malhas (m , n e k) e suas dimensões.

Aplicando as condições descritas acima na interface entre as malhas m e n , obtemos:

a condição de continuidade de corrente

$$\bar{J}_{gur}^m = \bar{J}_{gul}^n ,$$

a condição de continuidade de fluxo

$$\bar{\Psi}_{gur}^m = \bar{\Psi}_{gul}^n ,$$

o operador diferenças finitas

$$\frac{d}{du} \bar{\Psi}_{gu}^m(u) \Big|_{u=u_r^m} = \frac{\bar{\Psi}_{gur}^m - \bar{\phi}_g^m}{a_u^m/2} \quad (2.1)$$

e

$$\frac{d}{du} \bar{\Psi}_{gu}^n(u) \Big|_{u=u_l^n} = \frac{\bar{\phi}_g^n - \bar{\Psi}_{gul}^n}{a_u^n/2} , \quad (2.2)$$

a Lei de Fick:

$$\bar{J}_{gur}^m = -D_g^m \frac{d}{du} \bar{\Psi}_{gu}^m(u) \Big|_{u=u_r^m} \quad (2.3)$$

e

$$\bar{J}_{gul}^n = -D_g^n \frac{d}{du} \bar{\Psi}_{gu}^n(u) \Big|_{u=u_l^n} \quad (2.4)$$

Substituindo o operador diferenças finitas, equações (2.1) e (2.2), na lei de Fick, equações (2.3) e (2.4), obtemos que:

$$\bar{J}_{gur}^m = -D_g^m \frac{\bar{\Psi}_{gul}^n - \bar{\phi}_g^m}{a_u^m/2} \quad (2.5)$$

e

$$\bar{j}_{gu\ell}^n = -D_g^n \frac{\bar{\phi}_g^n - \bar{\Psi}_{gu\ell}^n}{a_u^n/2} . \quad (2.6)$$

Igualando as equações (2.5) e (2.6) devido à continuidade de corrente e usando a continuidade de fluxo, resulta que:

$$-D_g^m \frac{\bar{\Psi}_{gu\ell}^n - \bar{\phi}_g^m}{a_u^m/2} = -D_g^n \frac{\bar{\phi}_g^n - \bar{\Psi}_{gu\ell}^n}{a_u^n/2} , \quad (2.7)$$

que após uma pequena manipulação algébrica obtemos o fluxo médio na face entre as malhas m e n, em função do fluxo médio nas malhas m e n, temos que:

$$\bar{\Psi}_{gu\ell}^n = \frac{D_g^m a_u^n \bar{\phi}_g^m + D_g^n a_u^m \bar{\phi}_g^n}{D_g^m a_u^n + D_g^n a_u^m} . \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (2.8) na equação (2.6) obtemos, após uma manipulação algébrica, a densidade de corrente média na face entre as malhas m e n, onde as únicas incógnitas são os fluxos médios nas malhas,

$$\bar{J}_{gu\ell}^n = \frac{2D_g^m D_g^n}{D_g^m a_u^n + D_g^n a_u^m} \bar{\phi}_g^m - \frac{2D_g^m D_g^n}{D_g^m a_u^n + D_g^n a_u^m} \bar{\phi}_g^n, \quad (2.9)$$

que podemos reescrevê-la como:

$$\bar{J}_{gu\ell}^n = D_{gur}^m \bar{\phi}_g^m - D_{gu\ell}^n \bar{\phi}_g^n, \quad (2.10)$$

onde

$$D_{gur}^m \equiv \frac{2D_g^m D_g^n}{D_g^m a_u^n + D_g^n a_u^m} \quad (2.11)$$

e

$$D_{gu\ell}^n \equiv \frac{2D_g^m D_g^n}{D_g^m a_u^n + D_g^n a_u^m}. \quad (2.12)$$

Ao realizar estes mesmos procedimentos para a interface entre as malhas n e k, obtemos a densidade de corrente média na face entre as malhas n e k.

$$\bar{J}_{gur}^n = D_{gur}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gu\ell}^k \bar{\phi}_g^k, \quad (2.13)$$

onde

$$D_{gur}^n \equiv \frac{2D_g^n D_g^k}{D_g^n a_u^k + D_g^k a_u^n}, \quad (2.14)$$

e

$$D_{gu\ell}^k \equiv \frac{2D_g^n D_g^k}{D_g^n a_u^k + D_g^k a_u^n}, \quad (2.15)$$

sendo a_u^m , a_u^n e a_u^k as dimensões das malhas m , n e k , respectivamente, para a direção u , conforme ilustra a Figura 7, D_g^m , D_g^n e D_g^k os coeficientes de difusão das malhas m , n e k para o grupo g de energia.

Será mostrado no capítulo 4 que, através do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, é possível escrever as densidades de corrente média, nas faces de um nodo da mesma forma que as equações (2.10) e (2.13), redefinindo os coeficientes de difusão D_{gus}^n .

Capítulo 3

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS INTEGRADA TRANSVERSALMENTE

Os três métodos citados anteriormente, DFC, NEM e DFMGA, são utilizados para resolver a equação de difusão de nêutrons, equação (1.3). O DFC (ALVIM, 2007), que foi uma das primeiras técnicas empregadas para a solução da equação de difusão de nêutrons, resolve a equação de difusão de nêutrons aproximando a derivada do fluxo médio na face por diferenças entre valores discretos. O NEM (FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977), um dos métodos nodal mais difundido e consistente, aplica o operador de média em área na equação de difusão de nêutrons, equação (1.3), obtendo assim a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, equação (3.1), e depois, para resolver esta faz uma expansão polinomial de quarta ordem do fluxo médio de nêutrons na face e de segunda ordem do termo correspondente à fuga transversal. Já o DFMGA, após obter a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, da mesma forma que o NEM, resolve-a analiticamente expandindo o termo que corresponde à fuga transversal em um polinômio de segunda ordem (conforme o NEM).

Agora determinaremos a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente.

Aplicando o operador de média em área, dado por:

$$\frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} (\bullet) dw dv ,$$

na equação de difusão de nêutrons, equação (1.3), e considerando os parâmetros nucleares uniformes dentro de cada nodo, obtemos a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente à direção u ,

$$\begin{aligned} -D_g^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\Psi}_{gu}^n(u) + \Sigma_{Rg}^n \bar{\Psi}_{gu}^n(u) = \\ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^n \bar{\Psi}_{g'u}^n(u) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'} \bar{\Psi}_{g'u}^n(u) - L_{gu}^n(u) , \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $L_{gu}^n(u)$ é a fuga de nêutrons transversal à direção u , definida pela seguinte equação:

$$L_{gu}^n(u) \equiv \frac{-D_g^n}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi_g(u, v, w) + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \phi_g(u, v, w) \right) dw dv . \quad (3.2)$$

No capítulo 2 fizemos uma breve explicação do DFC, e explicamos por que o método DFMGA, que pode ser considerado um método nodal, pois utiliza os nodos com dimensões da mesma ordem de grandeza dos elementos combustíveis, recebe o nome de método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico. Mesmo não utilizando o operador de diferenças finitas, ou seja, mesmo não aproximando a derivada do fluxo médio na face por diferença entre valores discretos. Neste capítulo, determinamos, a partir da equação de difusão de nêutrons, a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente e comentamos sobre dois métodos de solução desta equação, o método DFMGA e o NEM. Na próxima seção, descreveremos o método NEM.

3.1 - Método de Expansão Nodal (NEM)

O NEM utiliza a equação da continuidade de nêutrons, a lei de Fick e o operador de média em área para obter a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, equação (3.1). Para resolver esta equação, é feita uma expansão polinomial de quarta ordem no fluxo médio de nêutrons na face e uma expansão polinomial de segunda ordem no termo correspondente à fuga transversal, Resultando,

$$\bar{\Psi}_{gu}^n(u) = \sum_{k=0}^4 c_{kgu}^n h_k \left(\frac{u}{a_u^n} \right) \quad (3.3)$$

e

$$L_{gu}^n(u) = \sum_{k=0}^2 \alpha_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right), \quad (3.4)$$

onde α_{kgu}^n são os coeficientes do termo de fuga, c_{0gu}^n , c_{1gu}^n e c_{2gu}^n são os coeficientes primários, c_{3kgu}^n e c_{4gu}^n são os coeficientes secundários. Os polinômios $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$, que representam as funções de base do NEM (FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977), são definidos da seguinte forma:

$$h_0\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 1, \quad (3.5)$$

$$h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 2\frac{u}{a_u^n} - 1, \quad (3.6)$$

$$h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 6\frac{u}{a_u^n}\left(1 - \frac{u}{a_u^n}\right) - 1, \quad (3.7)$$

$$h_4\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 6\frac{u}{a_u^n}\left(1 - \frac{u}{a_u^n}\right)\left(2\frac{u}{a_u^n} - 1\right) \quad (3.8)$$

e

$$h_4\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 6 \frac{u}{a_u^n} \left(1 - \frac{u}{a_u^n}\right) \left(5 \left(\frac{u}{a_u^n}\right)^2 - 5 \frac{u}{a_u^n} + 1\right), \quad (3.9)$$

e possuem as seguintes propriedades

$$h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 0 ; \quad \forall k \leq 3, \quad (3.10)$$

$$\int_0^{a_u^n} h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) du = 0, \quad (3.11)$$

$$\int_0^{a_u^n} h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) \frac{d^2 h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)}{du^2} du = \begin{cases} -12 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}, \quad (3.12)$$

$$\int_0^{a_u^n} h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) \frac{d^2 h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)}{du^2} du = \begin{cases} 12 & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{se } k \neq 4 \end{cases}, \quad (3.13)$$

$$\int_0^{a_u^n} h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) du = \begin{cases} 1/3 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k = 2 \\ 1/5 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k \neq 4 \end{cases} \quad (3.14)$$

e

$$\int_0^{a_u^n} h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) du = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1 \\ 1/5 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k = 3 \\ -3/35 & \text{se } k \neq 4 \end{cases} . \quad (3.15)$$

Nas três próximas subseções mostraremos os processos utilizados para a obtenção dos coeficientes da expansão de quarta ordem do fluxo médio de nêutrons na face, $\bar{\Psi}_{gu}^n(u)$, e da expansão de segunda ordem da fuga transversal, $L_{gu}^n(u)$, ou seja, os coeficientes, c_{kgu}^n ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), da equação (3.3) e os coeficientes, α_{kgu}^n ($k = 0, 1, 2$), da equação (3.4).

3.1.1 - Coeficientes da fuga transversal

Para determinarmos os coeficientes α_{0gu}^n , α_{1gu}^n e α_{2gu}^n , utilizamos as propriedades das funções de base $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$.

Para o cálculo de α_{0gu}^n , usamos a condição de consistência,

$$\frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} L_{gu}^n(u) du \equiv \bar{L}_{gu}^n, \quad (3.16)$$

onde \bar{L}_{gu}^n representa a fuga transversal média no nodo n e direção u ($u = x, y, z$), pois pelas propriedades dos polinômios $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$, onde

$$\int_0^{a_u^n} h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) du = 0, \quad (3.17)$$

para $k \geq 1$, a consequente integração da equação (3.4) resulta em

$$\alpha_{0gu}^n = \bar{L}_{gu}^n; \quad \forall u = x, y, z. \quad (3.18)$$

Com isso, a equação (3.4) torna-se:

$$L_{gu}^n(u) = \bar{L}_{gu}^n + \sum_{k=1}^2 \alpha_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right). \quad (3.19)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (3.19), obtemos os demais coeficientes α_{1gu}^n e α_{2gu}^n ,

$$\alpha_{1gu}^n = \frac{1}{2} (L_{gur}^n - L_{gu\ell}^n) \quad (3.20)$$

e

$$\alpha_{2gu}^n = \bar{L}_{gu}^n - \frac{1}{2} (L_{gur}^n + L_{gu\ell}^n), \quad (3.21)$$

onde $L_{gus}^n \equiv L_{gu}^n(u_s^n)$, para $s = \ell, r$.

Para obtermos L_{gus}^n , impomos a condição de continuidade à fuga transversal, $L_{gu}^n(u)$, e à sua derivada espacial, na interface entre dois nodos m e n , conforme mostrado na Figura 7, quais sejam:

$$L_{gu\ell}^n = L_{gur}^m \quad (3.22)$$

e

$$\frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \Big|_{u=u_\ell^n} = \frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \Big|_{u=u_r^m}. \quad (3.23)$$

As derivadas da equação (3.23) podem ser aproximadas por diferenças finitas, resultando em:

$$\frac{\bar{L}_{gu}^n - L_{gu\ell}^n}{a_u^n/2} = \frac{L_{gur}^m - \bar{L}_{gu}^m}{a_u^m/2}. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.24), obtemos após alguma manipulação algébrica a seguinte equação:

$$L_{gur}^m = \frac{a_u^n \bar{L}_{gu}^m + a_u^m \bar{L}_{gu}^n}{a_u^n + a_u^m}. \quad (3.25)$$

Para o cálculo das fugas transversais médias, \bar{L}_{gu}^n , primeiro substituímos a equação (3.2) na equação (3.16), depois utilizamos a equação (1.9), e então fazendo o uso das definições de correntes parciais,

$$\bar{J}_{\text{gus}}^{\pm n} = \bar{J}_{\text{gus}}^{\pm n} - \bar{J}_{\text{gus}}^{\mp n}, \quad (3.26)$$

obtemos:

$$\bar{L}_{\text{gu}}^n = \sum_{u=v,w} \frac{1}{a_u^n} [(\bar{J}_{\text{gur}}^{+n} - \bar{J}_{\text{gur}}^{-n}) - (\bar{J}_{\text{gul}}^{+n} - \bar{J}_{\text{gul}}^{-n})]. \quad (3.27)$$

Completando assim o cálculo de todas as incógnitas necessárias para determinar os três coeficientes $\alpha_{0\text{gu}}^n$, $\alpha_{1\text{gu}}^n$ e $\alpha_{2\text{gu}}^n$ da equação (3.4), que representa a expansão do termo de fuga transversal.

3.1.2 - Coeficientes primários

Para determinarmos os coeficientes primários $c_{0\text{gu}}^n$, $c_{1\text{gu}}^n$ e $c_{2\text{gu}}^n$, utilizamos as propriedades das funções de base $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$.

Para o cálculo de $c_{0\text{gu}}^n$, usamos a condição de consistência, equação (3.28)

$$\frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \bar{\Psi}_{\text{gu}}^n(u) du \equiv \bar{\phi}_g^n, \quad (3.28)$$

e a propriedade representada pela equação (3.11) do polinômio $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$. A consequente integração da equação (3.3) resulta em

$$c_{0gu}^n = \bar{\phi}_g^n ; \quad \forall u = x, y, z. \quad (3.29)$$

Com isso, a equação (3.3) torna-se:

$$\bar{\Psi}_{gu}^n(u) = \bar{\phi}_g^n + \sum_{k=1}^4 c_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right). \quad (3.30)$$

Para determinar os demais coeficientes primários c_{1gu}^n e c_{2gu}^n , utilizamos a equação (3.30) e a aproximação da difusão, equação (3.31).

$$\bar{\Psi}_{gus}^n(u_s^n) = 2 (J_{gus}^{+n} - J_{gus}^{-n}), \quad (3.31)$$

obtendo:

$$c_{1gu}^n = (J_{gur}^{+n} + J_{gur}^{-n}) - (J_{gu\ell}^{+n} + J_{gu\ell}^{-n}) \quad (3.32)$$

e

$$c_{2gu}^n = \bar{\phi}_g^n - [(J_{gur}^{+n} + J_{gur}^{-n}) + (J_{gu\ell}^{+n} + J_{gu\ell}^{-n})]. \quad (3.33)$$

Restando-nos agora calcular os coeficientes secundários.

3.1.3 - Coeficientes secundários

Para determinar os coeficientes secundários c_{3gu}^n e c_{4gu}^n , utilizamos a técnica de resíduo ponderado (FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977) aplicada a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, obtendo assim a seguinte equação:

$$\int_0^{a_u^n} \omega_i(u/a_u^n) \left\{ -D_g^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\Psi}_{gu}^n(u) + \Sigma_{Rg}^n \bar{\Psi}_{gu}^n(u) - \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^n \bar{\Psi}_{g'u}^n(u) - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'} \bar{\Psi}_{g'u}^n(u) + L_{gu}^n(u) \right\} du = 0, \quad (3.34)$$

onde a função peso $\omega_i(u/a_u^n)$ são as funções de base do NEM, de grau um e grau dois, $h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$ e $h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$, para o cálculo dos coeficientes c_{3gu}^n e c_{4gu}^n , respectivamente.

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) na equação (3.34), e utilizando as propriedades das funções de base representadas pelas equações (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15) obtemos um sistema de equações, equações (3.35) e (3.36), de onde retiramos os coeficientes secundários.

$$\left\{ 12 \frac{D_g^n}{(a_u^n)^2} + \frac{1}{5} \Sigma_{Rg}^n \right\} c_{3gu}^n - \frac{1}{5} \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g'}}^2 \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g v \Sigma_{fg'}^n + \Sigma_{gg'} \right\} c_{3g'u}^n =$$

$$\frac{1}{3} \alpha_{1gu}^n - \frac{1}{3} \left\{ \Sigma_{Rg}^n c_{1gu}^n - \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g'}}^2 \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g v \Sigma_{fg'}^n + \Sigma_{gg'} \right\} c_{1g'u}^n \right\} \quad (3.35)$$

e

$$\left\{ 12 \frac{D_g^n}{(a_u^n)^2} + \frac{3}{35} \Sigma_{Rg}^n \right\} c_{4gu}^n - \frac{3}{35} \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g'}}^2 \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g v \Sigma_{fg'}^n + \Sigma_{gg'} \right\} c_{4g'u}^n =$$

$$\frac{1}{5} \alpha_{2gu}^n - \frac{1}{5} \left\{ \Sigma_{Rg}^n c_{2gu}^n - \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g'}}^2 \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g v \Sigma_{fg'}^n + \Sigma_{gg'} \right\} c_{2g'u}^n \right\}. \quad (3.36)$$

3.1.4 - Correntes parciais de saída

Necessitamos determinar as correntes parciais de saída para obtermos a solução da equação de balanço nodal, com isso, substituímos as equações (3.26) e (3.3) na equação (1.9), e utilizamos os valores de u_s^n para a face direita e esquerda do nodo, obtemos:

$$\bar{J}_{gul}^{+n} - \bar{J}_{gul}^{-n} = -D_g^n \{2c_{1gu}^n + 6c_{2gu}^n - 6c_{3gu}^n + 6c_{4gu}^n\} \quad (3.37)$$

e

$$\bar{J}_{gur}^{+n} - \bar{J}_{gur}^{-n} = -D_g^n \{2c_{1gu}^n - 6c_{2gu}^n - 6c_{3gu}^n - 6c_{4gu}^n\}. \quad (3.38)$$

Substituindo os coeficientes primários, equações (3.32) e (3.33), nas equações (3.37) e (3.38), obtemos um sistema de equações para as correntes parciais, e deste sistema obtivemos as correntes parciais como se segue:

$$\bar{J}_{gul}^{-n} = A_{ogu}^n \left\{ \bar{\phi}_g^{-n} + c_{4gu}^n \right\} + A_{1gu}^n \bar{J}_{gul}^{+n} + A_{2gu}^n \bar{J}_{gur}^{-n} - A_{3gu}^n c_{3gu}^n \quad (3.39)$$

e

$$\bar{J}_{\text{gur}}^{+n} = A_{0\text{gu}}^n \left\{ \bar{\phi}_g^{-n} + c_{4\text{gu}}^n \right\} + A_{2\text{gu}}^n \bar{J}_{\text{gu}l}^{+n} + A_{1\text{gu}}^n \bar{J}_{\text{gur}}^{-n} - A_{3\text{gu}}^n c_{3\text{gu}}^n, \quad (3.40)$$

onde:

$$A_{0\text{gu}}^n = \frac{6 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right)}{\left(1 + 12 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right) \right)}, \quad (3.41)$$

$$A_{1\text{gu}}^n = \frac{\left(1 - 48 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right)^2 \right)}{\left(\left(1 + 12 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right) \right) \left(1 + 4 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right) \right) \right)}, \quad (3.42)$$

$$A_{2\text{gu}}^n = \frac{-8 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right)}{\left(\left(1 + 12 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right) \right) \left(1 + 4 \left(\frac{D_{\text{gu}}^n}{a_{\text{u}}^n} \right) \right) \right)} \quad (3.43)$$

e

$$A_{3gu}^n = \frac{6 \left(\frac{D_{gu}^n}{a_u^n} \right)}{\left(1 + 4 \left(\frac{D_{gu}^n}{a_u^n} \right) \right)}. \quad (3.44)$$

3.1.5 - Fluxo médio nodal

Substituindo as correntes parciais, equações (3.39) e (3.40), na equação (3.26), obtemos a densidade de corrente nas faces do nodo. Substituindo essas densidades de corrente na equação de balanço nodal, equação (1.4), obtemos a equação da qual são calculados, através de um processo iterativo, os fluxos médios de nêutrons nos nodos, equação (3.45).

$$\left(\sum_{u=x,y,z} 2 \left(\frac{A_{ogu}^n}{a_u^n} \right) + \Sigma_{Rg}^n \right) \bar{\phi}_g^n = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'} \bar{\phi}_{g'}^n + \sum_{u=x,y,z} 2 \left(\frac{A_{ogu}^n}{a_u^n} \right) (2(\bar{J}_{gur}^- + \bar{J}_{gu\ell}^+) - c_{4gu}^n). \quad (3.45)$$

Capítulo 4

SOLUÇÃO ANATÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS INTEGRADA TRANSVERSALMENTE

Neste capítulo resolveremos analiticamente a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, equação (3.1). Para isto iremos trabalhar com dois grupos de energia ($g = 1, 2$), sem upscattering (não há ganho de energia pelo nêutron após o espalhamento) e fazendo o espectro de fissão χ_g igual a 1 para o grupo 1 e igual a zero para o grupo 2 (significa que pela fissão só há produção de nêutrons do grupo 1). Usando essas informações na equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente obtemos as equações (4.1) e (4.2). A equação (4.1) é a equação para nêutrons rápidos (grupo 1) e a equação (4.2) é a equação para nêutrons térmicos (grupo 2):

$$-D_1^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\Psi}_{1u}^n(u) + \Sigma_{R1}^n \bar{\Psi}_{1u}^n(u) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \left(\nu \Sigma_{f1}^n \bar{\Psi}_{1u}^n(u) + \nu \Sigma_{f2}^n \bar{\Psi}_{2u}^n(u) \right) - L_{1u}^n(u) \quad (4.1)$$

e

$$-D_2^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\Psi}_{2u}^n(u) + \Sigma_{a2}^n \bar{\Psi}_{2u}^n(u) = \Sigma_{21}^n \bar{\Psi}_{1u}^n(u) - L_{2u}^n(u). \quad (4.2)$$

Onde a seção de choque macroscópica de remoção para nêutrons do grupo 1 de energia, Σ_{R1}^n , é igual a soma da seção de choque macroscópica de absorção para nêutrons do grupo 1 de energia, Σ_{a1}^n , com a seção de choque de espalhamento do grupo 1 de energia para o grupo 2, Σ_{21}^n .

$$\Sigma_{R1}^n = \Sigma_{a1}^n + \Sigma_{21}^n. \quad (4.3)$$

Para simplificar a notação escrevemos as equações (4.1) e (4.2) na forma matricial,

$$\frac{d^2}{du^2} \bar{\Psi}_{\sim u}^n(u) + \left(D_n^{-1} \left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n \right] \right) \bar{\Psi}_{\sim u}^n(u) = D_n^{-1} L_{\sim u}^n(u), \quad (4.4)$$

onde:

$$\bar{\Psi}_{\sim u}^n(u) \equiv \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1u}^n(u) \\ \bar{\Psi}_{2u}^n(u) \end{bmatrix},$$

$$D_n \equiv \begin{bmatrix} D_1^n & 0 \\ 0 & D_2^n \end{bmatrix},$$

$$F_n \equiv \begin{bmatrix} v\Sigma_{f1}^n & v\Sigma_{f2}^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_n \equiv \begin{bmatrix} \Sigma_{a1}^n & 0 \\ -\Sigma_{21}^n & \Sigma_{a2}^n \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{L}_u^n(u) \equiv \begin{bmatrix} L_{1u}^n(u) \\ L_{2u}^n(u) \end{bmatrix}.$$

4.1 - Método da decomposição

Para resolvermos a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente na forma matricial, equação (4.4), utilizamos o método da decomposição.

Existe uma matriz $R_n(2 \times 2)$ que diagonaliza a matriz $D_n^{-1} \left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n \right]$, ou seja:

$$R_n^{-1} \left(D_n^{-1} \left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n \right] \right) R_n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \equiv \Lambda_n , \quad (4.5)$$

onde λ_ℓ^n ($\ell = 1, 2$) são os autovalores de $D_n^{-1} \left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n \right]$.

Os elementos da matriz R_n (matriz de transformação de similaridade) são os autovetores associados a λ_ℓ^n .

Para obter a solução da equação (4.4), podemos utilizar uma técnica de transformação linear, introduzindo um vetor $\xi_{\tilde{u}}^n(u)$, tal que:

$$\bar{\Psi}_{\tilde{u}}^n(u) = R_n \xi_{\tilde{u}}^n(u) . \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) na equação (4.4), obtemos a equação (4.7):

$$\frac{d^2}{du^2} \xi_{\tilde{u}}^n(u) + \Lambda_n \xi_{\tilde{u}}^n(u) = S_{\tilde{u}}^n(u), \quad (4.7)$$

onde a matriz coluna, $S_{\tilde{u}}^n(u)$, associada a fuga transversal é definida pela equação (4.8).

$$\tilde{S}_u^n(u) \equiv R_n^{-1} D_n^{-1} L_u^n(u) . \quad (4.8)$$

Usando a equação (4.5) na equação (4.7), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2}{du^2} \xi_{\ell,u}^n(u) + \lambda_\ell^n \xi_{\ell,u}^n(u) = S_{\ell,u}^n(u) \quad ; \quad \text{para } \ell = 1, 2 . \quad (4.9)$$

Na seção 4.2 resolveremos analiticamente a equação diferencial (4.9).

4.1.1 – Determinação da matriz de transformação de similaridade R_n

Da equação (4.5) obtemos que:

$$D_n^{-1} \left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n \right] \tilde{r}_\ell^n = \lambda_\ell^n \tilde{r}_\ell^n , \quad (4.10)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{r}}_\ell^n \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1\ell}^n \\ \tilde{\mathbf{r}}_{1\ell}^n \\ \mathbf{r}_{2\ell}^n \\ \tilde{\mathbf{r}}_{2\ell}^n \end{bmatrix} \quad \text{com } \ell = 1, 2. \quad (4.11)$$

Reescrevendo a equação (4.10), obtemos

$$\left[\frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}_n - \Sigma_n \right] \tilde{\mathbf{r}}_\ell^n = \lambda_\ell^n \mathbf{D}_n \tilde{\mathbf{r}}_\ell^n, \quad (4.12)$$

onde, após substituir os elementos da equação (4.12) pelas suas respectivas matrizes chegamos a

$$\left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} \begin{bmatrix} v_{\Sigma_{f1}}^n & v_{\Sigma_{f2}}^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_{a1}^n & 0 \\ -\Sigma_{21}^n & \Sigma_{a2}^n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1\ell}^n \\ \mathbf{r}_{2\ell}^n \end{bmatrix} = \lambda_\ell^n \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^n & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1\ell}^n \\ \mathbf{r}_{2\ell}^n \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e após alguma manipulação algébrica temos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_{\text{eff}}} v_{\Sigma_{f1}}^n - \Sigma_{a1}^n & \frac{1}{k_{\text{eff}}} v_{\Sigma_{f2}}^n \\ \Sigma_{21}^n & -\Sigma_{a2}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1\ell}^n \\ \mathbf{r}_{2\ell}^n \end{bmatrix} = \lambda_\ell^n \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^n & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1\ell}^n \\ \mathbf{r}_{2\ell}^n \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

que podemos reescrevê-la como

$$\begin{bmatrix} -P_1 & S_1 \\ S_2 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1\ell}^n \\ r_{2\ell}^n \end{bmatrix} = \lambda_\ell^n \begin{bmatrix} D_1^n & 0 \\ 0 & D_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1\ell}^n \\ r_{2\ell}^n \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

onde:

$$P_1 \equiv \Sigma_{a1}^n - \frac{1}{k_{\text{eff}}} v \Sigma_{f1}^n, \quad (4.16)$$

$$P_2 \equiv \Sigma_{a2}^n, \quad (4.17)$$

$$S_1 \equiv \frac{1}{k_{\text{eff}}} v \Sigma_{f2}^n \quad (4.18)$$

e

$$S_2 \equiv \Sigma_{21}^n. \quad (4.19)$$

- ♦ Para o cálculo da matriz coluna \tilde{r}_1^n

Da equação (4.15), obtemos o seguinte sistema de equações

$$-P_1 r_{11}^n + S_1 r_{21}^n = \lambda_1^n D_1^n r_{11}^n \quad (4.20)$$

e

$$S_2 r_{11}^n - P_2 r_{21}^n = \lambda_1^n D_2^n r_{21}^n . \quad (4.21)$$

Fazendo o elemento da matriz de transformação de similaridade r_{21}^n igual a um, da equação (4.20) obtemos

$$r_{11}^n = \frac{S_1}{\lambda_1^n D_1^n + P_1} . \quad (4.22)$$

Logo a matriz coluna \tilde{r}_1^n fica assim representada que:

$$\tilde{r}_1^n = \begin{bmatrix} S_1 \\ \lambda_1^n D_1^n + P_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

- ♦ Para o cálculo da matriz coluna \tilde{r}_2^n

Da equação (4.15), obtemos o seguinte sistema de equações

$$-P_1 r_{12}^n + S_1 r_{22}^n = \lambda_2^n D_1^n r_{12}^n, \quad (4.24)$$

$$S_2 r_{12}^n - P_2 r_{22}^n = \lambda_2^n D_2^n r_{22}^n. \quad (4.25)$$

Fazendo o elemento da matriz de transformação de similaridade r_{22}^n igual a um, da equação (4.24) obtemos

$$r_{12}^n = \frac{S_1}{\lambda_2^n D_1^n + P_1}. \quad (4.26)$$

Logo a matriz coluna \tilde{r}_2^n fica assim representada:

$$\tilde{r}_2^n = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{\lambda_2^n D_1^n + P_1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Com isto obtemos a matriz de transformação de similaridade R_n

$$R_n = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{\lambda_1^n D_1^n + P_1} & \frac{S_1}{\lambda_2^n D_1^n + P_1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

4.1.2 – Determinação dos autovalores λ

Partindo da equação (4.5), para determinarmos os autovalores, chegamos a

$$\det \left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} F_n - \Sigma_n - \lambda^n D_n \right) = 0, \quad (4.29)$$

que podemos reescrevê-la como,

$$\det \begin{bmatrix} -(P_1 + \lambda^n D_1^n) & S_1 \\ S_2 & -(P_2 + \lambda^n D_2^n) \end{bmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Calculando o determinante da equação (4.30) e o igualando a zero, chegamos a

$$a (\lambda^n)^2 + b \lambda^n + c = 0, \quad (4.31)$$

onde:

$$a \equiv D_1^n D_2^n, \quad (4.32)$$

$$b \equiv D_1^n P_2 + D_2^n P_1 \quad (4.33)$$

e

$$c \equiv P_1 P_2 - S_1 S_2. \quad (4.34)$$

As raízes da equação (4.31) são os autovalores associados ao autovetor R_n (Matriz de transformação de similaridade), que são obtidas pelas equações (4.35) e (4.36).

$$\lambda_1^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.35)$$

e

$$\lambda_2^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.36)$$

4.2 - Solução analítica para cálculo da função $\xi_{\ell,u}^n(\mathbf{u})$

A solução geral $\xi_{\ell,u}^n(\mathbf{u})$, da equação (4.9), é a soma da solução da equação homogênea, $\xi_{\ell,u,\text{hom}}^n(\mathbf{u})$, com a solução particular, $\xi_{\ell,u,\text{pat}}^n(\mathbf{u})$, ou seja:

$$\xi_{\ell,u}^n(\mathbf{u}) = \xi_{\ell,u,\text{hom}}^n(\mathbf{u}) + \xi_{\ell,u,\text{pat}}^n(\mathbf{u}). \quad (4.37)$$

4.2.1 - Solução da equação homogênea

A solução homogênea consiste em resolver a equação (4.38)

$$\frac{d^2}{du^2} \xi_{\ell,u}^n(u) + \lambda_{\ell}^n \xi_{\ell,u}^n(u) = 0, \quad (4.38)$$

cuja solução é da forma da equação (4.39):

$$\xi_{\ell,u,\text{hom}}^n(u) = A_{\ell,u}^n \operatorname{sn}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) + B_{\ell,u}^n \operatorname{cn}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right), \quad (4.39)$$

onde:

$$\operatorname{sn}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \equiv \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_{\ell}^n > 0 \\ \operatorname{senh}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_{\ell}^n < 0 \end{cases}, \quad (4.40)$$

$$\text{cn}\left(\beta_\ell^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \equiv \begin{cases} \cos\left(\beta_\ell^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_\ell^n > 0 \\ \cosh\left(\beta_\ell^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_\ell^n < 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

e

$$\beta_\ell^n \equiv \sqrt{|\lambda_\ell^n|} . \quad (4.42)$$

4.2.2 - Solução particular

Para determinar a solução particular da equação (4.9), é feita uma expansão polinomial até segunda ordem do termo de fuga transversal.

$$L_{g,u}^n(u) = \alpha_{0,g,u}^n h_0\left(\frac{u}{a_u^n}\right) + \alpha_{1,g,u}^n h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) + \alpha_{2,g,u}^n h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) ,$$

sendo:

$$h_0\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 1,$$

$$h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = 2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) - 1$$

e

$$h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) = -6\left(\frac{u}{a_u^n}\right)^2 + 6\left(\frac{u}{a_u^n}\right) - 1,$$

onde $h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right)$ ($k = 0, 1, 2$) são as mesmas funções de base utilizadas no método NEM(FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977).

Da equação (4.8) obtemos:

$$S_{\ell,u}^n(u) = \sum_{g=1}^2 \frac{q_{\ell,g}^n L_{g,u}^n(u)}{D_g^n}, \quad (4.43)$$

onde Q_n é a inversa da matriz de transformação de similaridade, ou seja, $Q_n = R_n^{-1}$, sendo

$$Q_n \equiv \begin{vmatrix} q_{11}^n & q_{12}^n \\ q_{21}^n & q_{22}^n \end{vmatrix} \quad (4.44)$$

e

$$q_{11}^n = r_{22}^n / (r_{11}^n r_{22}^n - r_{12}^n r_{21}^n), \quad q_{12}^n = -r_{12}^n / (r_{11}^n r_{22}^n - r_{12}^n r_{21}^n),$$

$$q_{21}^n = -r_{21}^n / (r_{11}^n r_{22}^n - r_{12}^n r_{21}^n), \quad q_{22}^n = r_{11}^n / (r_{11}^n r_{22}^n - r_{12}^n r_{21}^n),$$

onde os r^n são os elementos da matriz de transformação de similaridade, dados pela equação (4.28)

$$R_n \equiv \begin{vmatrix} r_{11}^n & r_{12}^n \\ r_{21}^n & r_{22}^n \end{vmatrix}. \quad (4.45)$$

Fazendo uma expansão polinomial de segunda ordem do termo que corresponde à fuga transversal da equação (4.43), chegamos a:

$$S_{\ell,u}^n(\mathbf{u}) = \left(\sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{0_{g,u}}^n \right) h_0 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right) + \left(\sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{1_{g,u}}^n \right) h_1 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right) + \left(\sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{2_{g,u}}^n \right) h_2 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right). \quad (4.46)$$

Após reorganizarmos a equação (4.46), obtemos:

$$S_{\ell,u}^n(\mathbf{u}) = c_{0_{\ell,u}}^n h_0 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right) + c_{1_{\ell,u}}^n h_1 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right) + c_{2_{\ell,u}}^n h_2 \left(\frac{\mathbf{u}}{a_u^n} \right), \quad (4.47)$$

onde:

$$c_{0_{\ell,u}}^n = \sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{0_{g,u}}^n, \quad (4.48)$$

$$c_{1,\ell,u}^n = \sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{1g,u}^n \quad (4.49)$$

e

$$c_{2,\ell,u}^n = \sum_{g=1}^2 \left(\frac{q_{\ell g}^n}{D_g^n} \right) \alpha_{2g,u}^n . \quad (4.50)$$

Logo, a solução particular é da forma:

$$\xi_{\ell,u,\text{part}}^n(u) = b_{0\ell u}^n h_0 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) + b_{1\ell u}^n h_1 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) + b_{2\ell u}^n h_2 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) . \quad (4.51)$$

Os coeficientes $b_{0\ell u}^n$, $b_{1\ell u}^n$ e $b_{2\ell u}^n$ são obtidos por identificação de parâmetros, vide apêndice A. Após determiná-los obtemos a solução particular, $\xi_{\ell,u,\text{part}}^n(u)$, da equação (4.9):

$$\xi_{\ell,u,\text{part}}^n(u) = \frac{S_{\ell,u}^n(u)}{\lambda_\ell^n} + \frac{12c_{2,\ell,u}^n}{(\lambda_\ell^n a_u^n)^2} \quad (4.52)$$

4.2.3 - Solução geral

Substituindo as equações (4.39) e (4.52) na equação (4.37) obtemos a equação (4.53), que é a solução geral da equação (4.9),

$$\xi_{\ell,u}^n(u) = A_{\ell,u}^n \operatorname{sn}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) + B_{\ell,u}^n \operatorname{cn}\left(\beta_{\ell}^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) + \frac{S_{\ell,u}^n(u)}{\lambda_{\ell}^n} + \frac{12c_{2,\ell,u}^n}{(\lambda_{\ell}^n a_u^n)^2}. \quad (4.53)$$

Substituindo a equação (4.53) na equação (4.6), obtemos a solução analítica da equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente $\bar{\Psi}_{\sim u}^n(u)$ (fluxo médio de nêutrons na área transversal à direção u do nodo n , na forma matricial), equação (4.54).

$$\bar{\Psi}_{\sim u}^n(u) = R_n S_u^n(u) \tilde{A}_u^n + R_n C_u^n(u) \tilde{B}_u^n + R_n \xi_{\sim u, \text{part}}^n(u), \quad (4.54)$$

onde:

$$S_u^n(u) = \begin{bmatrix} \operatorname{sn}\left(\beta_1^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & 0 \\ 0 & \operatorname{sn}\left(\beta_2^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$C_u^n(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \text{cn}\left(\beta_1^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & 0 \\ 0 & \text{cn}\left(\beta_2^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$\tilde{A}_u^n = \begin{bmatrix} A_{1,u}^n \\ A_{2,u}^n \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{B}_u^n = \begin{bmatrix} B_{1,u}^n \\ B_{2,u}^n \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

e

$$\tilde{\xi}_{u,\text{part}}^n(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \xi_{1,u,\text{part}}^n(\mathbf{u}) \\ \xi_{2,u,\text{part}}^n(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

com $\xi_{\ell,u,\text{part}}^n(\mathbf{u})$; para $\ell = 1$ e 2 , dados pela equação (4.52).

4.3 - Determinação dos coeficientes \tilde{A}_u^n e \tilde{B}_u^n

Para o cálculo dos coeficientes \tilde{A}_u^n e \tilde{B}_u^n usaremos a condição de consistência, equação (3.28), e a lei de Fick, equação (1.9), escritas na forma matricial. Então, fazendo uso de $\bar{\Psi}_u^n(u)$, equação (4.54), obtemos os coeficientes \tilde{A}_u^n e \tilde{B}_u^n , equações (4.60) e (4.61), respectivamente:

$$\tilde{A}_u^n = M_{A,us}^n \left(R_n^{-1} \bar{\phi}_u^n - \bar{\xi}_{part}^n \right) + N_{A,us}^n \left(R_n^{-1} D_n^{-1} \bar{J}_{us}^n + \bar{\xi}_{us,part}^n \right) \quad (4.60)$$

e

$$\tilde{B}_u^n = M_{B,us}^n \left(R_n^{-1} \bar{\phi}_u^n - \bar{\xi}_{part}^n \right) + N_{B,us}^n \left(R_n^{-1} D_n^{-1} \bar{J}_{us}^n + \bar{\xi}_{us,part}^n \right), \quad (4.61)$$

onde:

$$M_{B,us}^n \equiv \bar{C}_n^{-1} (I - \bar{S}_n M_{A,us}^n), \quad (4.62)$$

$$N_{B,us}^n \equiv \bar{C}_n^{-1} \bar{S}_n N_{A,us}^n , \quad (4.63)$$

$$N_{A,us}^n \equiv \left(C'_{us}{}^n \bar{C}_n^{-1} \bar{S}_n - S'_{us}{}^n \right)^{-1} , \quad (4.64)$$

$$M_{A,us}^n \equiv N_{A,us}^n C'_{us}{}^n \bar{C}_n^{-1} , \quad (4.65)$$

$$\bar{\xi}_{\sim part}^n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \xi_{\sim u,part}^n (u) du , \quad (4.66)$$

$$\xi_{\sim us,part}^n \equiv \left. \frac{d}{du} \xi_{\sim u,part}^n (u) \right|_{u=u_s^n} , \quad (4.67)$$

$$C'_{us}{}^n \equiv \left. \frac{d}{du} C_u^n(u) \right|_{u=u_s^n} , \quad (4.68)$$

$$\bar{C}_n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} C_u^n(u) du , \quad (4.69)$$

$$\bar{S}_n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} S_u^n(u) du, \quad (4.70)$$

e

$$S'_{us}^n \equiv \frac{d}{du} S_u^n(u) \Big|_{u=u_s^n}. \quad (4.71)$$

Substituindo as equações (4.60) e (4.61) na equação (4.54), obtemos a equação (4.72), que representa o fluxo de nêutrons na face s ($s = \ell, r$) transversal à direção u ($u = x, y, z$):

$$\bar{\Psi}_{us}^n = \hat{C}_{f,us}^n \bar{\phi}_{us}^n + \hat{C}_{j,us}^n D_n^{-1} \bar{J}_{us}^n - R_n \bar{T}_{us}^n, \quad (4.72)$$

onde:

$$\hat{C}_{f,us}^n \equiv R_n C_{f,us}^n R_n^{-1}, \quad (4.73)$$

$$\hat{C}_{j,us}^n \equiv R_n C_{j,us}^n R_n^{-1}, \quad (4.74)$$

$$\tilde{T}_{us}^n \equiv C_{f,us}^n \tilde{\xi}_{\sim part}^n - C_{j,us}^n \tilde{\xi}_{\sim us,part}^n - \tilde{\xi}_{\sim us,part}^n, \quad (4.75)$$

$$C_{f,us}^n \equiv S_{us}^n M_{A,us}^n + C_{us}^n M_{B,us}^n \quad (4.76)$$

e

$$C_{j,us}^n \equiv S_{us}^n N_{A,us}^n + C_{us}^n N_{B,us}^n. \quad (4.77)$$

4.4 - Densidade de corrente e coeficientes de difusão

Para escrever a densidade de corrente média na área da face do nodo n , transversal à direção u , usaremos a condição de continuidade de fluxo e a condição de continuidade de corrente, da mesma forma que no método de Diferenças Finitas Clássico.

A Figura 8 representa as interfaces entre os nodos m, n e k na direção u (u = x, y ou z).

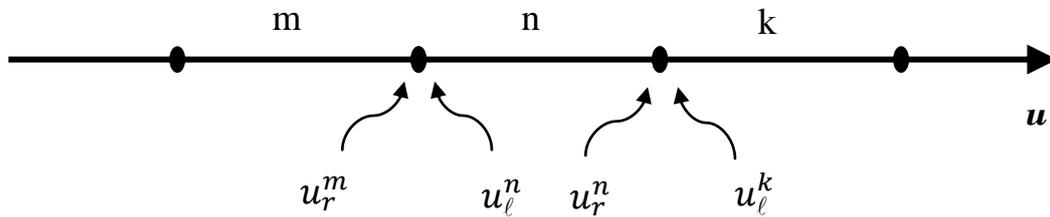


Figura 8 - Representação das interfaces entre os nodos (m , n e k).

Então, da condição de continuidade de fluxo, temos que

$$\bar{\Psi}_{\sim ur}^m = \bar{\Psi}_{\sim ul}^n \quad (4.78)$$

e

$$\bar{\Psi}_{\sim ur}^n = \bar{\Psi}_{\sim ul}^k, \quad (4.79)$$

onde $\bar{\Psi}_{\sim ur}^n$ representa o fluxo médio na face direita do nodo n e $\bar{\Psi}_{\sim ul}^n$ o fluxo médio na face esquerda do nodo n.

E, da condição de continuidade de corrente, temos que

$$\bar{J}_{\sim ur}^m = \bar{J}_{\sim ul}^n \quad (4.80)$$

e

$$\bar{J}_{\sim ur}^n = \bar{J}_{\sim ul}^k, \quad (4.81)$$

onde $\bar{J}_{\sim ul}^n$ representa a corrente líquida na face esquerda do nodo n e $\bar{J}_{\sim ur}^n$ a corrente líquida na face direita do nodo n.

Agora, usando a equação (4.72), da equação (4.78) obtemos:

$$\hat{C}_{f,ur}^m \bar{\phi}_{\sim}^m + \hat{C}_{j,ur}^m D_m^{-1} \bar{J}_{\sim ur}^m - R_m \bar{T}_{\sim ur}^m = \hat{C}_{f,ul}^n \bar{\phi}_{\sim}^n + \hat{C}_{j,ul}^n D_n^{-1} \bar{J}_{\sim ul}^n - R_n \bar{T}_{\sim ul}^n. \quad (4.82)$$

Substituindo a equação (4.80) na equação (4.82), obtemos a equação (4.83)

$$\tilde{J}_{u\ell}^n = (\hat{C}_{j,u}^n D_n^{-1} + \hat{C}_{j,u}^m D_m^{-1})^{-1} \left\{ \left(\hat{C}_{f,u}^m \bar{\phi}^m - R_m T_{ur}^m \right) - \left(\hat{C}_{f,u}^n \bar{\phi}^n - R_n T_{u\ell}^n \right) \right\}. \quad (4.83)$$

onde, de acordo com o Apêndice B, temos:

$$\hat{C}_{j,u\ell}^n = \hat{C}_{j,u}^n, \quad (4.84)$$

$$\hat{C}_{j,ur}^m = -\hat{C}_{j,u}^m, \quad (4.85)$$

$$\hat{C}_{f,ur}^n = \hat{C}_{f,u}^n, \quad (4.86)$$

e

$$\hat{C}_{f,u\ell}^m = \hat{C}_{f,u}^m. \quad (4.87)$$

Agora definindo:

$$(\hat{C}_{j,u}^n D_n^{-1} + \hat{C}_{j,u}^m D_m^{-1})^{-1} \hat{C}_{f,u}^\theta \equiv \begin{bmatrix} b_{11u}^\theta & b_{12u}^\theta \\ b_{21u}^\theta & b_{22u}^\theta \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

e

$$(\hat{C}_{j,u}^n D_n^{-1} + \hat{C}_{j,u}^m D_m^{-1})^{-1} R_\theta \equiv \begin{bmatrix} d_{11u}^\theta & d_{12u}^\theta \\ d_{21u}^\theta & d_{22u}^\theta \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

para $\theta = m, n$, podemos reescrever a equação (4.83), para cada grupo de energia, como segue

$$\bar{J}_{gu\ell}^n = \sum_{g'=1}^2 \left(b_{gg'u}^m \bar{\phi}_{g'}^m - d_{gg'u}^m T_{g'ur}^m - b_{gg'u}^n \bar{\phi}_{g'}^n - d_{gg'u}^n T_{g'u\ell}^n \right). \quad (4.90)$$

Após alguma manipulação algébrica, a equação (4.90) pode ser assim escrita:

$$\bar{J}_{gu\ell}^n = D_{gur}^m \bar{\phi}_g^m - D_{gu\ell}^n \bar{\phi}_g^n, \quad (4.91)$$

onde:

$$D_{gur}^m \equiv \sum_{g'=1}^2 \left(b_{gg'u}^m \bar{\phi}_{g'}^m - d_{gg'u}^m T_{g'ur}^m \right) / \bar{\phi}_g^m \quad (4.92)$$

e

$$D_{gu\ell}^n \equiv \sum_{g'=1}^2 \left(b_{gg'u}^n \bar{\phi}_{g'}^n - d_{gg'u}^n T_{g'u\ell}^n \right) / \bar{\phi}_g^n. \quad (4.93)$$

Agora, usando a equação (4.72) novamente, da equação (4.79) obtemos, depois de alguma manipulação algébrica, como foi feito para $\bar{J}_{gu\ell}^n$, que

$$\bar{J}_{gur}^n = D_{gur}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gu\ell}^k \bar{\phi}_g^k, \quad (4.94)$$

onde:

$$D_{gur}^n \equiv \sum_{g'=1}^2 \left(b_{gg'u}^n \bar{\phi}_{g'}^n - d_{gg'u}^n T_{g'ur}^n \right) / \bar{\phi}_g^n \quad (4.95)$$

e

$$D_{gu\ell}^k \equiv \sum_{g'=1}^2 \left(b_{gg'u}^k \bar{\phi}_{g'}^k - d_{gg'u}^k T_{g'u\ell}^k \right) / \bar{\phi}_g^k. \quad (4.96)$$

Capítulo 5

DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE DE NÊUTRONS

Neste capítulo iremos determinar os elementos da matriz de discretização espacial, substituindo as correntes líquidas nas faces do nodo n , obtidas na seção 4.4, na equação de balanço nodal, equação (1.4).

Mas, observando a Figura 9, que representa o nodo genérico n e seus vizinhos; na direção x com os nodos da direita (n_d) e da esquerda (n_e), na direção y com os nodos da frente (n_f) e de trás (n_t) e na direção z com os nodos de baixo (n_b) e de cima (n_c), podemos escrever, de acordo com as equações (4.91) e (4.94), as densidades de corrente nas faces do nodo n .

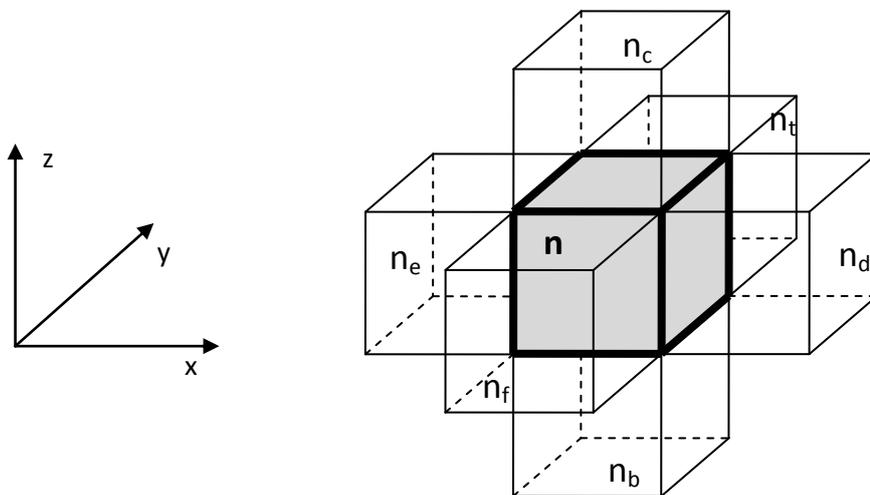


Figura 9 - Representação de um nodo genérico n e seus nodos vizinhos.

Densidade de corrente nas faces transversais à direção x ($u = x$):

$$\bar{J}_{gx\ell}^n = D_{gxr}^{n_e} \bar{\phi}_g^{n_e} - D_{gx\ell}^n \bar{\phi}_g^n \quad (5.1)$$

e

$$\bar{J}_{gxr}^n = D_{gxr}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gx\ell}^{n_d} \bar{\phi}_g^{n_d} . \quad (5.2)$$

Densidade de corrente nas faces transversais à direção y ($u = y$):

$$\bar{J}_{gy\ell}^n = D_{gyr}^{n_f} \bar{\phi}_g^{n_f} - D_{gy\ell}^n \bar{\phi}_g^n \quad (5.3)$$

e

$$\bar{J}_{gyr}^n = D_{gyr}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gy\ell}^{n_t} \bar{\phi}_g^{n_t} . \quad (5.4)$$

Densidade de corrente nas faces transversais à direção z (u = z):

$$\bar{J}_{gzl}^n = D_{g zr}^{n_b} \bar{\phi}_g^{n_b} - D_{gzl}^n \bar{\phi}_g^n \quad (5.5)$$

e

$$\bar{J}_{g zr}^n = D_{g zr}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gzl}^{n_c} \bar{\phi}_g^{n_c}. \quad (5.6)$$

Substituindo as equações (5.1) à (5.6), na equação de balanço nodal, equação (1.4), obtemos a equação (5.7).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_z^n} D_{g zr}^{n_b} \bar{\phi}_g^{n_b} - \frac{1}{a_y^n} D_{g yr}^{n_f} \bar{\phi}_g^{n_f} - \frac{1}{a_x^n} D_{g xr}^{n_e} \bar{\phi}_g^{n_e} + \\ & \left\{ \sum_{u=x,y,z} \frac{1}{a_u^n} (D_{g u l}^n + D_{g u r}^n) + \Sigma_{rg}^n \right\} \bar{\phi}_g^n - \frac{1}{a_x^n} D_{g xl}^{n_d} \bar{\phi}_g^{n_d} - \\ & \frac{1}{a_y^n} D_{g yl}^{n_t} \bar{\phi}_g^{n_t} - \frac{1}{a_z^n} D_{g zl}^{n_c} \bar{\phi}_g^{n_c} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Representando a equação (5.7) na forma matricial obtemos a equação (5.8) que como no método clássico de diferenças finitas, após considerar todos os nodos, é uma matriz heptadiagonal. Sendo assim, podemos aplicar os mesmos procedimentos computacionais utilizados no método de Diferenças Finitas Clássico. Logo,

$$\begin{aligned}
 & A_{n,n_b} \bar{\phi}_{\sim}^{nb} - A_{n,n_f} \bar{\phi}_{\sim}^{nf} - A_{n,n_e} \bar{\phi}_{\sim}^{ne} - A_{n,n} \bar{\phi}_{\sim}^n - \\
 & A_{n,n_d} \bar{\phi}_{\sim}^{nd} - A_{n,n_t} \bar{\phi}_{\sim}^{nt} - A_{n,n_c} \bar{\phi}_{\sim}^{nc} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} S_{\sim}^n, \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

onde:

$$S_{\sim}^n \equiv \begin{bmatrix} S_{f1}^n \\ S_{f2}^n \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad S_{fg}^n \equiv \chi_g \sum_{g'=1}^2 v_{\Sigma_{fg}^n} \bar{\phi}_{g'}^n, \quad (5.9)$$

$$A_{n,n} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n}^1 & -\Sigma_{12}^n \\ -\Sigma_{21}^n & a_{n,n}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

e

$$a_{n,n}^g \equiv \Sigma_{Rg}^n + \frac{1}{a_x^n} (D_{gx\ell}^n + D_{gxr}^n) + \frac{1}{a_y^n} (D_{gy\ell}^n + D_{gyr}^n) + \frac{1}{a_z^n} (D_{gz\ell}^n + D_{g zr}^n), \quad (5.11)$$

$$A_{n,n_b} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_b}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_b}^2 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad a_{n,n_b}^g \equiv \frac{1}{a_z^n} D_{g zr}^{n_b}, \quad (5.12)$$

$$A_{n,n_f} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_f}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_f}^2 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad a_{n,n_f}^g \equiv \frac{1}{a_y^n} D_{gyr}^{n_f}, \quad (5.13)$$

$$A_{n,n_e} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_e}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_e}^2 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad a_{n,n_e}^g \equiv \frac{1}{a_x^n} D_{gxr}^{n_e}, \quad (5.14)$$

$$A_{n,n_d} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_d}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_d}^2 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad a_{n,n_d}^g \equiv \frac{1}{a_x^n} D_{gx\ell}^{n_d}, \quad (5.15)$$

$$A_{n,n_t} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_t}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_t}^2 \end{bmatrix}; \quad \text{com} \quad a_{n,n_t}^g \equiv \frac{1}{a_y^n} D_{gy\ell}^{n_t}, \quad (5.16)$$

$$A_{n,n_c} \equiv \begin{bmatrix} a_{n,n_c}^1 & 0 \\ 0 & a_{n,n_c}^2 \end{bmatrix} ; \quad \text{com} \quad a_{n,n_c}^g \equiv \frac{1}{a_z^n} D_{gz\ell}^{n_c} \quad (5.17)$$

e

$$\bar{\phi}^n \equiv \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Com as equações apresentadas acima, e mais as condições de contorno, podemos calcular, através de processo iterativo (ALVIM, 2007), o fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons.

5.1 - Processo iterativo de cálculo

Na implementação deste método de solução da equação de difusão de nêutrons, DFPGA, foram elaborados dois programas em linguagem Fortran, um chamado de Nodalização, utilizado para dividir o reator nuclear em nodos, e o outro chamado de DFPG, utilizado para o cálculo do fator de multiplicação efetivo e da distribuição do fluxo de nêutrons, onde foi utilizado o método das Potências Normalizado (ALVIM, 2007) para o cálculo do fator de multiplicação efetivo e o método SOR para o cálculo da

distribuição do fluxo de nêutrons, no que diz respeito às iterações externas. As Figuras 10 e 11 mostram os programas principais e suas sub-rotinas, respectivamente para nodalização e DFMG, onde o nome das sub-rotinas dá a verdadeira ideia de suas funções.

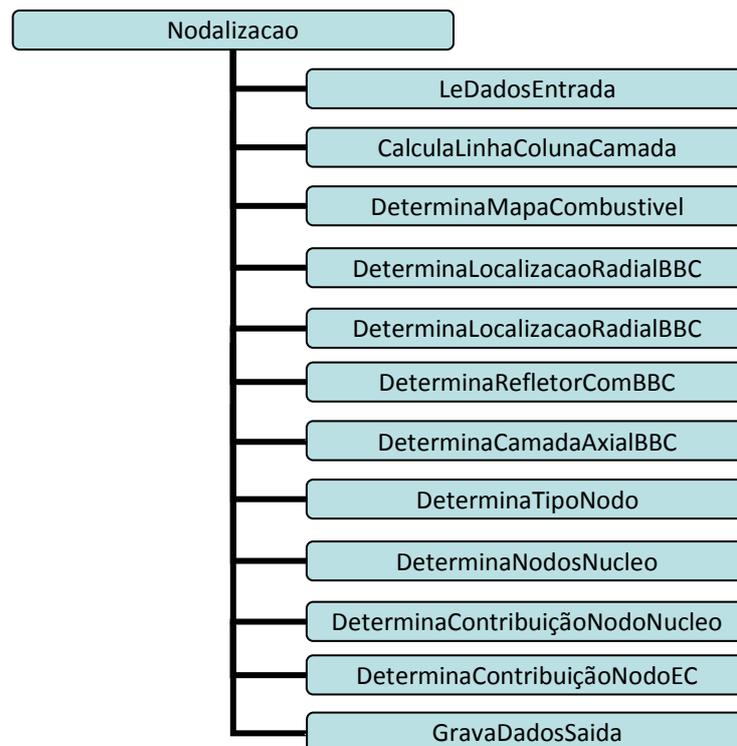


Figura 10 – Fluxograma do programa Nodalização

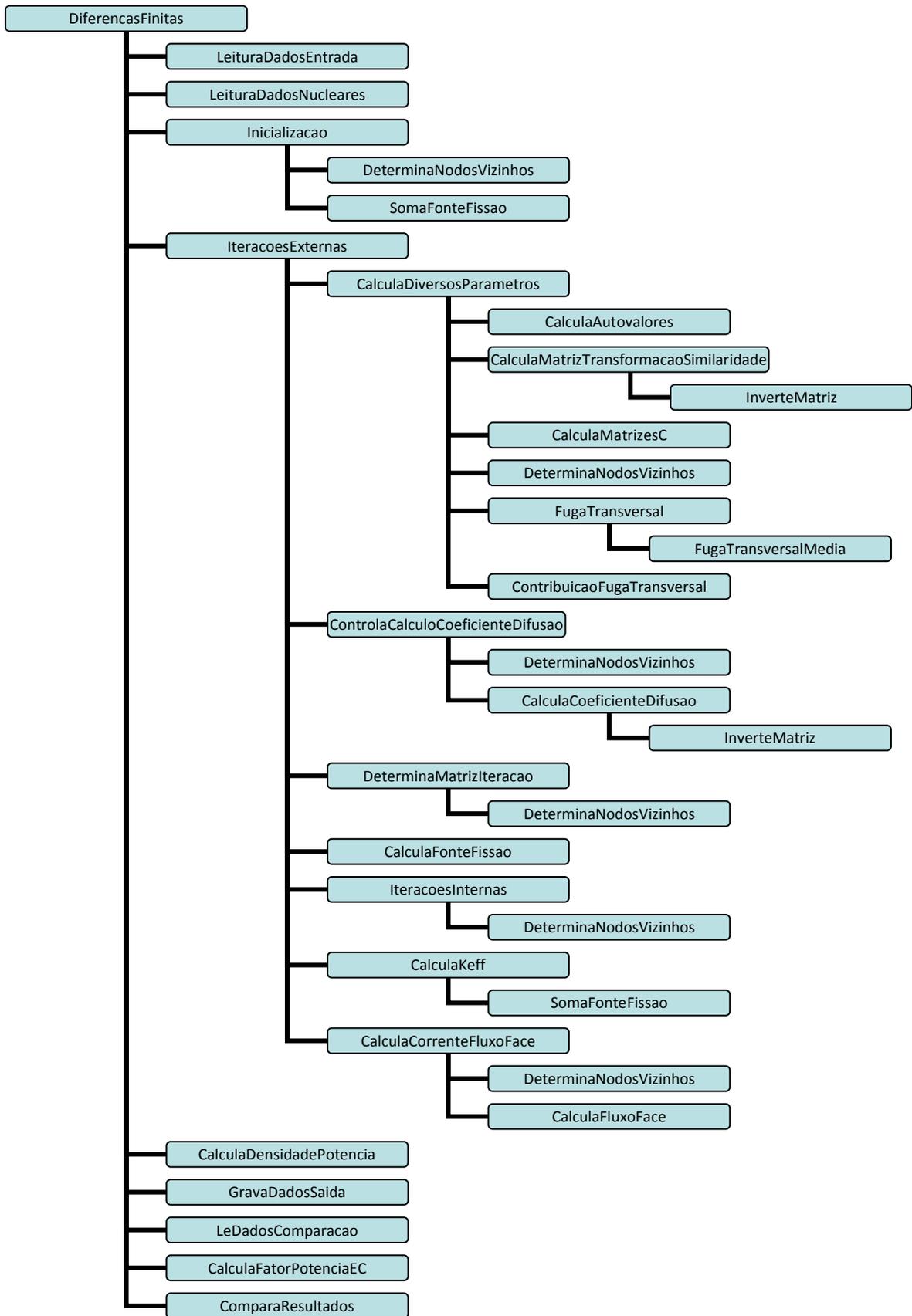


Figura 11 – Fluxograma do programa DFMG

No programa DFMG, após o processo iterativo onde é calculado o fator de multiplicação e o fluxo de nêutrons, testa-se a convergência desses valores, se o desvio percentual estiver acima de um valor estipulado nos dados de entrada, será realizado um novo cálculo. Esse “loop” cessará quando as condições de convergência forem atendidas. A Figura 12 mostra um modelo computacional simplificado.

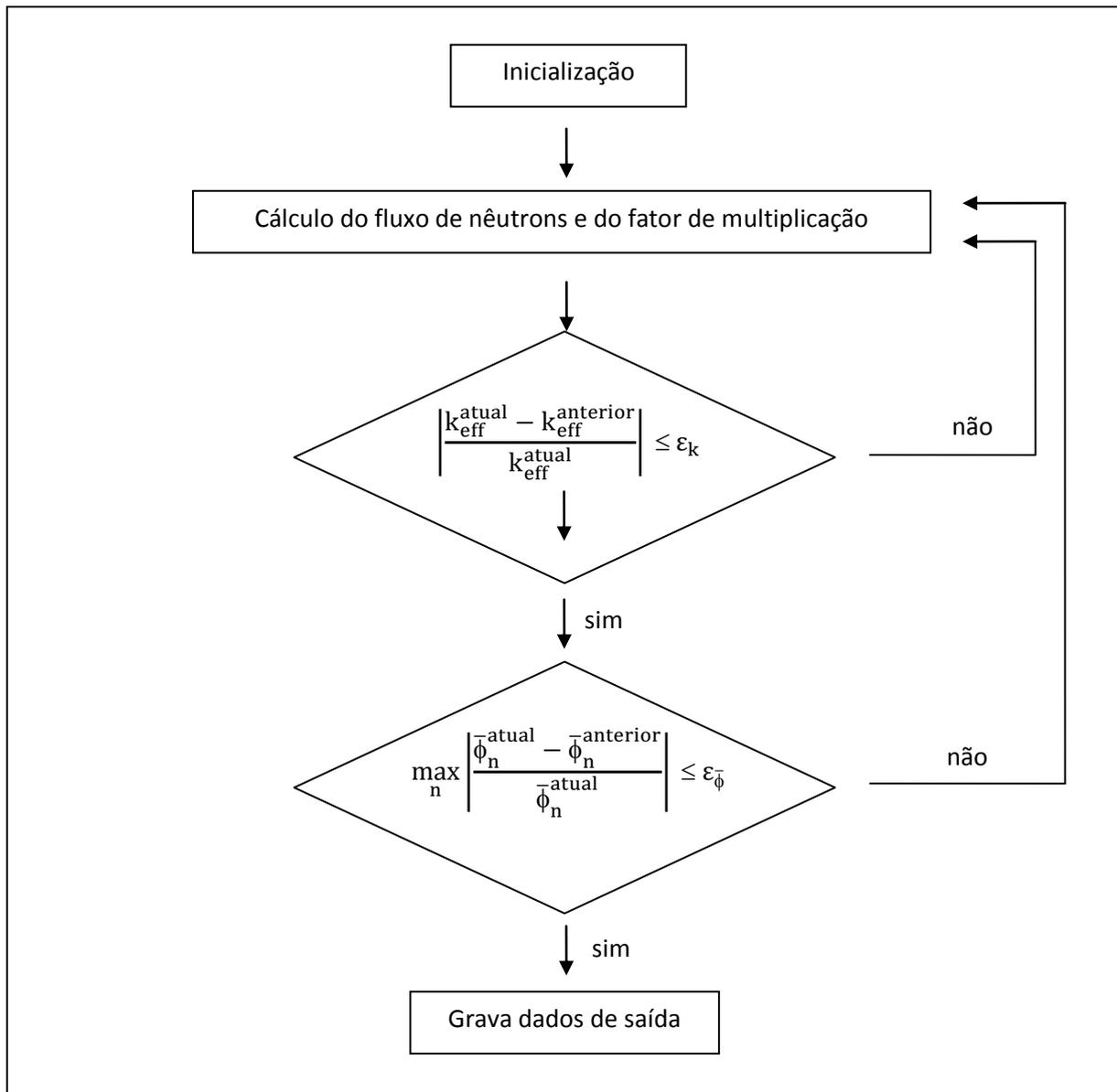


Figura 12 - Modelo computacional relativo ao programa DFMG

Capítulo 6

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, primeiramente apresentamos a geometria do reator nuclear, suas dimensões, as condições de contorno e os parâmetros nucleares dos benchmarks utilizados como referência. Em seguida, apresentamos os dados utilizados no processo iterativo de cálculo. Por fim, comparamos os resultados obtidos pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, com os resultados de referência, com a finalidade de validar o método apresentado nesta dissertação.

6.1 – Benchmark IAEA 3D

Este problema teste possui um núcleo com cento e setenta e sete elementos combustíveis, sendo nove com barras de controle totalmente inseridas e quatro com barras de controle parcialmente inseridas. O elemento combustível possui uma altura ativa de 340 cm e 20 cm de dimensões radiais. O núcleo é rodeado por sessenta e quatro nodos de refletores com 20 cm de espessura cada.

Para este teste utilizamos a configuração de 1/4 do núcleo. Na Figura 13 mostramos a simetria de 1/4 do núcleo do reator, na camada 3 (ver Figura 14), em xy, assim como as dimensões dos nodos no plano xy.

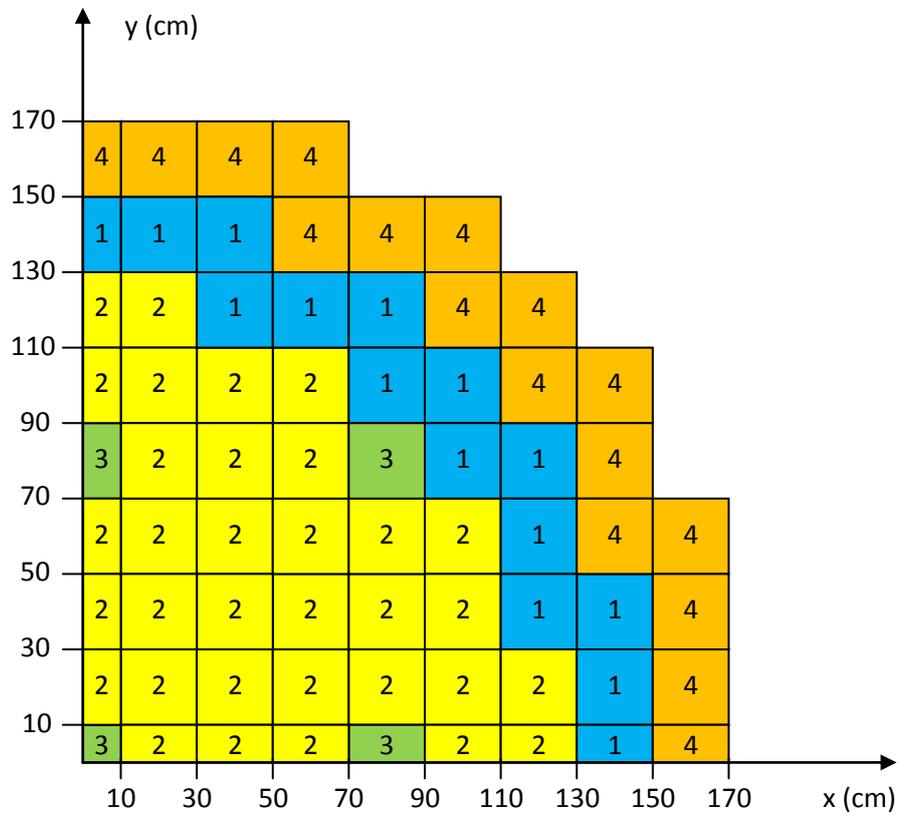


Figura 13 - Configuração para simetria de 1/4 do benchmark IAEA 3D, na camada 3

Na Figura 14 mostramos em um plano xz, a localização dos bancos de barra de controle (BBC) assim como as condições de contorno, onde n representa, neste caso, nodos no contorno.

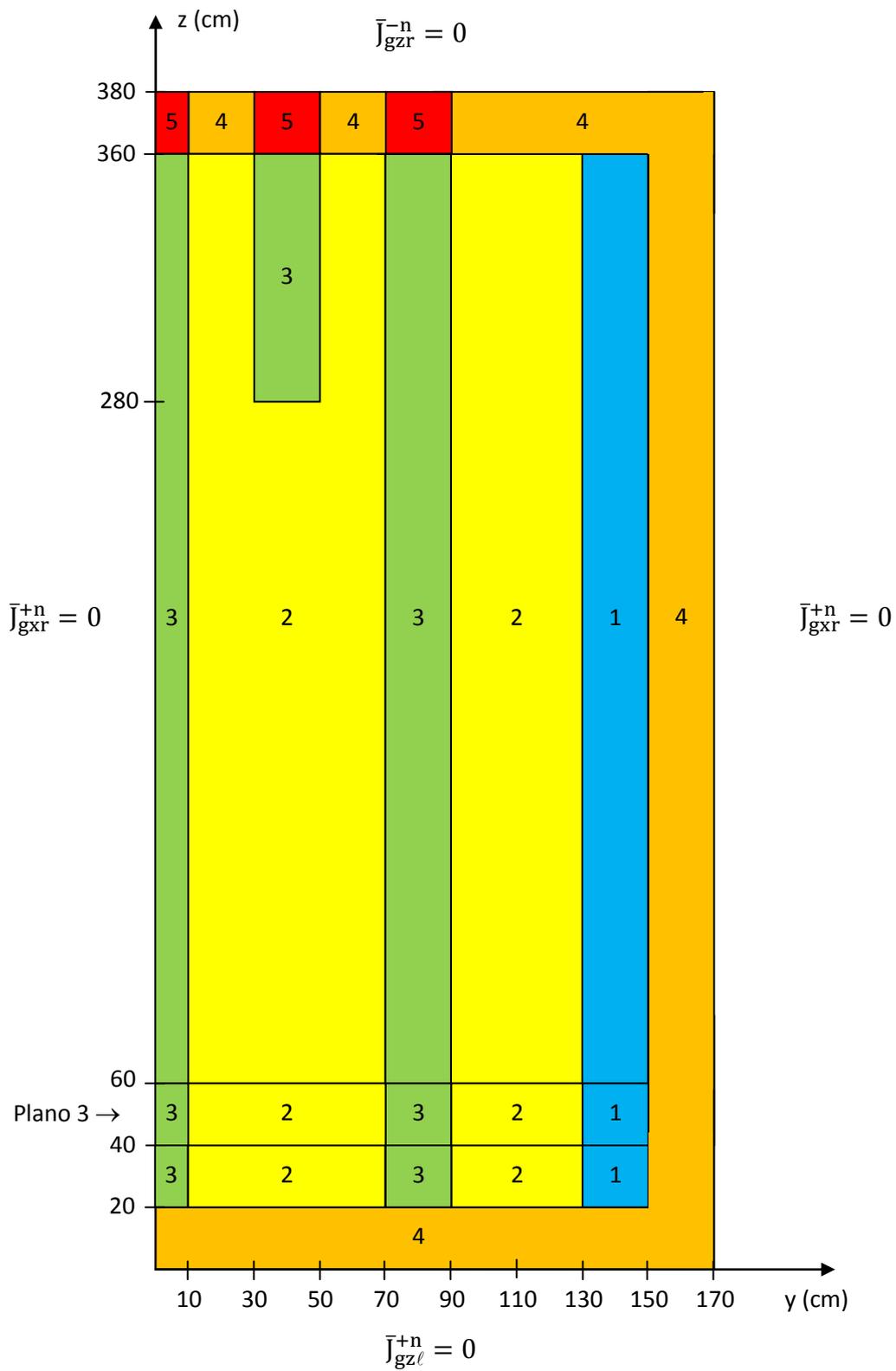


Figura 14 - Configuração do benchmark IAEA 3D em um plano xz

Na Tabela 1 apresentamos os parâmetros nucleares do benchmark IAEA 3D, com as seguintes classificações: Tipo 1 e 2 representam o combustível sem BBC, Tipo 3 representa o combustível com BBC, Tipo 4 representa o refletor superior, inferior e lateral sem BBC e Tipo 5 representa o refletor com BBC.

Tabela 1 - Parâmetros nucleares do benchmark IAEA 3D

Tipo	g	D_g (cm)	Σ_{ag} (cm)	$\Sigma_{gg'}$ (cm ⁻¹)	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm ⁻¹)
1	1	1,500	0,010	0,020	0,000
	2	0,400	0,080	0,000	0,135
2	1	1,500	0,010	0,020	0,000
	2	0,400	0,085	0,000	0,135
3	1	1,500	0,010	0,020	0,000
	2	0,400	0,130	0,000	0,135
4	1	2,000	0,000	0,040	0,000
	2	0,300	0,010	0,000	0,000
5	1	2,000	0,000	0,040	0,000
	2	0,300	0,055	0,000	0,000

Para este teste foram geradas três nodalizações, 1x1, 2x2 e 4x4. Na primeira, 1x1, este 1/4 de núcleo foi dividido em 1.311 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a mesma dimensão dos elementos combustíveis (20 cm) e em dezenove camadas axiais de 20 cm de altura cada. Na segunda, 2x2, o 1/4 de núcleo foi dividido em 4.579 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a metade da dimensão dos elementos combustíveis (10 cm) e em dezenove camadas axiais de 20 cm de altura cada. Já na

terceira, 4x4, o 1/4 de núcleo foi dividido em 18.316 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a quarta parte da dimensão dos elementos combustíveis (5 cm) e em dezenove camadas axiais de 20 cm de altura cada.

Para a solução numérica dos problemas teste, introduzimos no programa, criado em linguagem Fortran, a geometria do reator nuclear e suas dimensões, as condições de contorno, os parâmetros nucleares e as tolerâncias para os testes de convergência.

Os testes de convergência são feitos segundo as equações (6.1) e (6.2), e as tolerâncias apresentadas na Tabela 2.

$$\left| \frac{k_{\text{eff}}^{\text{atual}} - k_{\text{eff}}^{\text{anterior}}}{k_{\text{eff}}^{\text{atual}}} \right| \leq \varepsilon_k \quad (6.1)$$

$$\max_{n,g} \left| \frac{\phi_{n,g}^{\text{atual}} - \phi_{n,g}^{\text{anterior}}}{\phi_{n,g}^{\text{atual}}} \right| \leq \varepsilon_\phi \quad (6.2)$$

Tabela 2 - Tolerâncias adotadas para os testes de convergência

Tolerância para o fator de multiplicação efetivo	$1,0 \times 10^{-9}$
Tolerância para o fluxo de nêutrons nas iterações externas	$1,0 \times 10^{-7}$
Tolerância para o fluxo de nêutrons nas iterações internas	$1,0 \times 10^{-3}$

As Tabelas 3, 4 e 5 mostram, para uma simetria de 1/4 de núcleo, a distribuição de potência normalizada. Nas tabelas a primeira linha representa o valor de referência, a segunda linha representa o valor obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e a terceira linha representa o valor do desvio percentual relativo entre os valores calculado e de referência. O elemento combustível marcado indica o maior desvio percentual encontrado (2,75% para a configuração de 1x1, 1,44% para a configuração de 2x2 e finalmente 0,95% para a configuração de 4x4).

Para calcularmos o desvio percentual relativo, para a comparação de resultados, utilizamos a equação (6.3), onde o valor calculado é obtido do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o valor de referência é obtido do benchmark IAEA 3D.

$$\text{Desvio percentual} = \frac{\text{Valor de referência} - \text{Valor calculado}}{\text{Valor de referência}} \times 100 . \quad (6.3)$$

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 3 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 1x1

0,773	0,753	0,707					
0,781	0,762	0,724					
1,00	1,25	2,36					
0,958	0,974	0,997	0,864	0,608			
0,961	0,978	1,001	0,877	0,625			
0,33	0,40	0,36	1,55	2,75			
0,953	1,055	1,088	0,923	0,699	0,597		
0,950	1,053	1,089	0,927	0,702	0,611		
-0,32	-0,15	0,08	0,40	0,50	2,32		
0,610	1,072	1,181	0,972	0,475	0,699	0,608	
0,610	1,065	1,177	0,968	0,478	0,702	0,625	
-0,01	-0,68	-0,36	-0,44	0,58	0,50	2,75	
1,195	1,291	1,311	1,179	0,972	0,923	0,864	
1,182	1,282	1,304	1,174	0,968	0,927	0,877	
-1,12	-0,69	-0,54	-0,44	-0,44	0,40	1,55	
1,423	1,432	1,369	1,311	1,181	1,088	0,997	0,707
1,409	1,419	1,358	1,304	1,177	1,089	1,001	0,724
-1,00	-0,88	-0,80	-0,54	-0,36	0,08	0,36	2,36
1,283	1,398	1,432	1,291	1,072	1,055	0,974	0,753
1,266	1,384	1,419	1,282	1,065	1,053	0,978	0,762
-1,32	-0,98	-0,88	-0,69	-0,68	-0,15	0,40	1,25
0,729	1,283	1,423	1,195	0,610	0,953	0,958	0,773
0,726	1,266	1,409	1,182	0,610	0,950	0,961	0,781
-0,44	-1,32	-1,00	-1,12	-0,01	-0,32	0,33	1,00

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 4 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2

0,773 0,780 0,92	0,753 0,760 0,99	0,707 0,717 1,44					
0,958 0,961 0,30	0,974 0,977 0,32	0,997 1,001 0,45	0,864 0,871 0,86	0,608 0,617 1,41			
0,953 0,952 -0,13	1,055 1,054 -0,06	1,088 1,089 0,09	0,923 0,924 0,15	0,699 0,701 0,30	0,597 0,604 1,22		
0,610 0,610 -0,03	1,072 1,068 -0,40	1,181 1,178 -0,25	0,972 0,970 -0,25	0,475 0,477 0,43	0,699 0,701 0,30	0,608 0,617 1,41	
1,195 1,187 -0,67	1,291 1,285 -0,47	1,311 1,306 -0,40	1,179 1,175 -0,36	0,972 0,970 -0,25	0,923 0,924 0,15	0,864 0,871 0,86	
1,423 1,414 -0,61	1,432 1,424 -0,59	1,369 1,362 -0,53	1,311 1,306 -0,40	1,181 1,178 -0,25	1,088 1,089 0,09	0,997 1,001 0,45	0,707 0,717 1,44
1,283 1,273 -0,81	1,398 1,389 -0,65	1,432 1,424 -0,59	1,291 1,285 -0,47	1,072 1,068 -0,40	1,055 1,054 -0,06	0,974 0,977 0,32	0,753 0,760 0,99
0,729 0,726 -0,42	1,283 1,273 -0,81	1,423 1,414 -0,61	1,195 1,187 -0,67	0,610 0,610 -0,03	0,953 0,952 -0,13	0,958 0,961 0,30	0,773 0,780 0,92

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 5 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4

0,773 0,779 0,83	0,753 0,759 0,84	0,707 0,714 0,95					
0,958 0,960 0,26	0,974 0,976 0,25	0,997 1,001 0,40	0,864 0,868 0,52	0,608 0,613 0,85			
0,953 0,953 -0,05	1,055 1,054 -0,06	1,088 1,089 0,07	0,923 0,923 0,03	0,699 0,701 0,23	0,597 0,600 0,48		
0,610 0,610 -0,03	1,072 1,069 -0,27	1,181 1,179 -0,18	0,972 0,970 -0,17	0,475 0,476 0,31	0,699 0,701 0,23	0,608 0,613 0,85	
1,195 1,190 -0,46	1,291 1,287 -0,34	1,311 1,307 -0,27	1,179 1,176 -0,29	0,972 0,970 -0,17	0,923 0,923 0,03	0,864 0,868 0,52	
1,423 1,417 -0,42	1,432 1,426 -0,40	1,369 1,364 -0,36	1,311 1,307 -0,27	1,181 1,179 -0,18	1,088 1,089 0,07	0,997 1,001 0,40	0,707 0,714 0,95
1,283 1,276 -0,57	1,398 1,391 -0,47	1,432 1,426 -0,40	1,291 1,287 -0,634	1,072 1,069 -0,27	1,055 1,054 -0,06	0,974 0,976 0,25	0,753 0,759 0,84
0,729 0,727 -0,23	1,283 1,276 -0,57	1,423 1,417 -0,42	1,195 1,190 -0,46	0,610 0,610 -0,03	0,953 0,953 -0,05	0,958 0,960 0,26	0,773 0,779 0,83

A Tabela 6 apresenta o valor do fator de multiplicação obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o desvio percentual tomando o valor do benchmark IAEA 3D como valor de referência.

Tabela 6 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual

	IAEA 3D	DFMGA		
		1x1	2x2	4x4
k_{eff}	1,02903	1,02911	1,02910	1,02907
Desvio percentual (%)	ref.	0,008	0,007	0,004

A simulação nos forneceu valores condizentes com os de referência, mostrando que o método tem boa consistência, já que ao reduzirmos a malha de 1x1 para 2x2 e depois para 4x4, o maior desvio percentual de fluxo de nêutrons passou de 2,75% para 1,44% e depois para 0,95%, e o desvio percentual do fator de multiplicação passou de 0,008%, que já era extremamente baixo, para 0,007% e depois para 0,004%, quando comparados com os valores obtidos do benchmark IAEA 3D.

As Tabelas 7 e 8 mostram, respectivamente, a configuração do computador utilizado para obtermos a solução numérica dos problemas testes, e o tempo que o computador levou em cada uma das simulações.

Tabela 7 - Configuração do computador

Computador	Sistema
Intel(R) core(TM) i7 CPU 860 @ 2,80GHz 2,79 GHz, 3,18 GB de RAM	Microsoft Windows XP Professional Versão 2002 Service Pack 3

Tabela 8 - Tempo de CPU

	Matriz 1x1	Matriz 2x2	Matriz 4x4
Tempo de CPU (s)	14,89	46,42	308,98

6.2 – Benchmark LRA 3D

Este problema teste possui um núcleo com trezentos e dose elementos combustíveis, sendo duzentos e setenta e dois com barras de controle totalmente inseridas. O elemento combustível possui uma altura ativa de 300 cm e 15 cm de dimensões radiais. O núcleo é rodeado por cento e setenta e dois nodos de refletores com 20 cm de espessura cada(E. BREGA & E. SALINA, 1981).

Para este teste utilizamos a configuração de 1/4 do núcleo. Na Figura 15 mostramos a simetria de 1/4 do núcleo do reator em xy, assim como as dimensões dos nodos no plano xy.

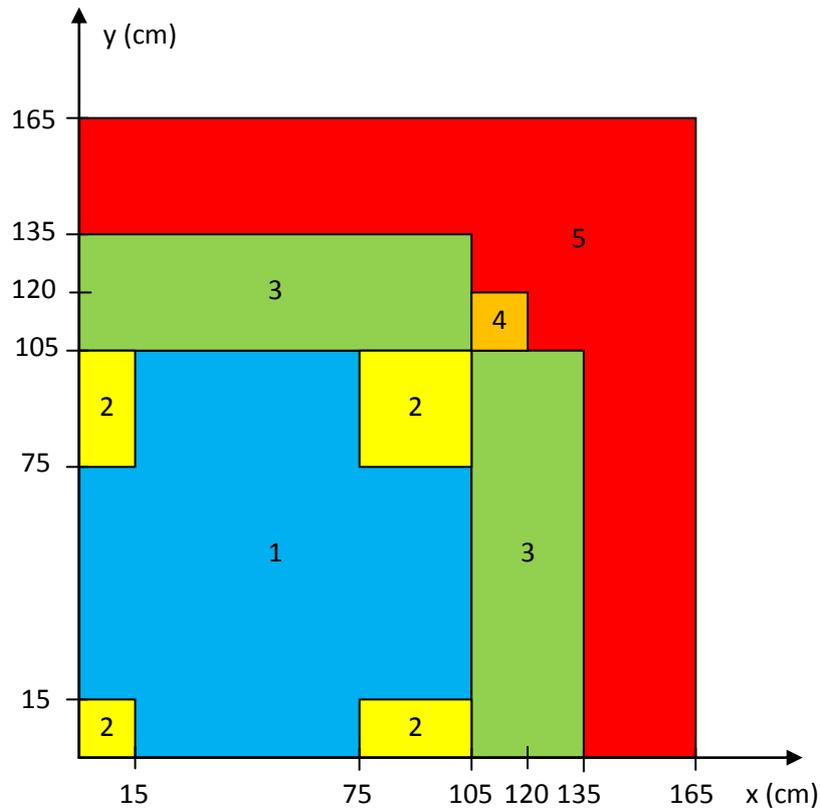


Figura 15 - Configuração para simetria de 1/4 do benchmark LRA 3D

Na Figura 16 mostramos em um plano xz, a localização dos bancos de barra de controle (BBC) assim como as condições de contorno.

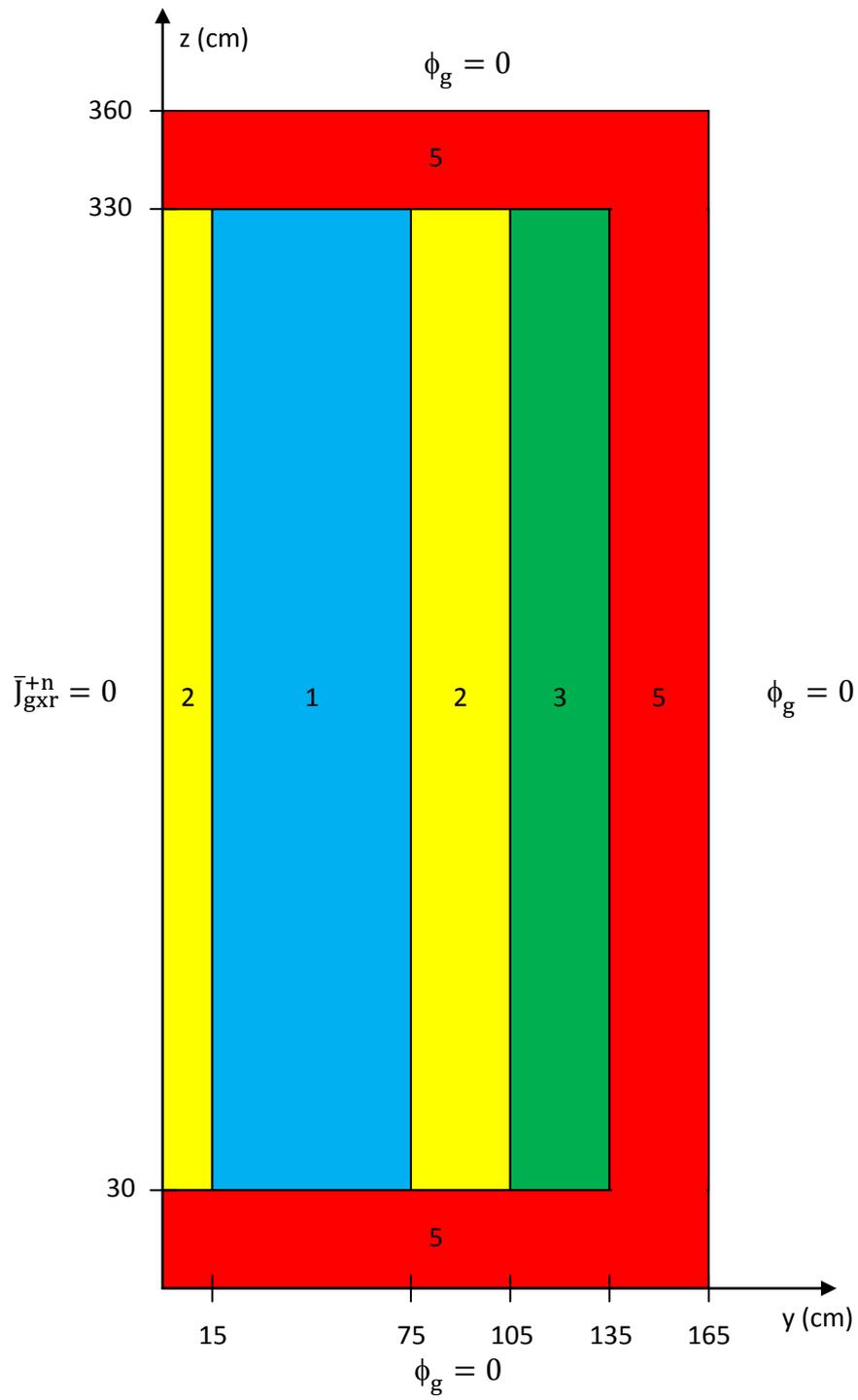


Figura 16 - Configuração do benchmark LRA 3D em um plano xz

Na Tabela 9 apresentamos os parâmetros nucleares do benchmark LRA 3D, com as seguintes classificações: Tipo 1 representa o combustível 1 com BBC, Tipo 2 representa o combustível 1 sem BBC, Tipo 3 representa o combustível 2 com BBC, Tipo 4 representa o combustível 2 sem BBC e Tipo 5 representa o refletor superior, inferior e lateral.

Tabela 9 - Parâmetros nucleares do benchmark LRA 3D

Tipo	g	D_g (cm)	Σ_{ag} (cm)	$\Sigma_{gg'}$ (cm ⁻¹)	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm ⁻¹)
1	1	1,255	0,008252	0,02533	0,004602
	2	0,211	0,1003	0,000	0,1091
2	1	1,268	0,007181	0,02767	0,004609
	2	0,1902	0,07047	0,000	0,08675
3	1	1,259	0,008002	0,02617	0,004663
	2	0,2091	0,08344	0,000	0,1021
4	1	1,259	0,008002	0,02617	0,004663
	2	0,2091	0,073324	0,000	0,1021
5	1	1,257	0,0006034	0,04754	0,000
	2	0,1592	0,01911	0,000	0,000

Para este problema teste foram geradas duas nodalizações, 2x2 e 4x4, já que quando rodamos o programa DFMG, em linguagem Fortran, para a nodalização 1x1 ele não convergiu. Na primeira, 2x2, o 1/4 de núcleo foi dividido em 11.616 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a metade da dimensão dos elementos combustíveis (7,5 cm) e em vinte camadas axiais de 15 cm de altura cada. Já na segunda, 4x4, o 1/4

de núcleo foi dividido em 46.464 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a quarta parte da dimensão dos elementos combustíveis (3,75 cm) e em vinte camadas axiais de 15 cm de altura cada.

Para a solução numérica dos problemas teste, introduzimos no programa, criado em linguagem Fortran, a geometria do reator nuclear e suas dimensões, as condições de contorno, os parâmetros nucleares e as tolerâncias para os testes de convergência. Os testes de convergência são feitos segundo as equações (6.1) e (6.2), e as tolerâncias apresentadas na Tabela 2.

As Tabelas 10 e 11 mostram, para uma simetria de 1/4 de núcleo, a distribuição de potência normalizada. Nas tabelas a primeira linha representa o valor de referência, a segunda linha representa o valor obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e a terceira linha representa o valor do desvio percentual relativo entre os valores calculado e de referência. O elemento combustível marcado indica o maior desvio percentual encontrado.

Para calcularmos o desvio percentual relativo, para a comparação de resultados, utilizamos a equação (6.3), onde o valor calculado é obtido do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o valor de referência é obtido do benchmark LRA 3D.

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 10 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2

0,924	0,867	0,827	0,853	0,932	0,972	0,848		
0,923	0,867	0,826	0,853	0,933	0,972	0,850		
-0,07	-0,05	-0,08	-0,02	0,06	0,03	0,22		
1,481	1,281	1,173	1,221	1,421	1,680	1,622	1,332	
1,480	1,280	1,172	1,221	1,421	1,680	1,622	1,335	
-0,06	-0,09	-0,06	0,00	0,02	0,02	0,01	0,19	
1,660	1,151	0,967	1,022	1,339	2,050	2,161	1,622	0,848
1,659	1,150	0,967	1,022	1,340	2,051	2,161	1,622	0,850
-0,09	-0,06	-0,04	0,04	0,07	0,03	0,01	0,01	0,22
1,384	0,940	0,783	0,843	1,152	1,851	2,050	1,680	0,972
1,383	0,939	0,783	0,843	1,153	1,852	2,051	1,680	0,972
-0,04	-0,05	-0,06	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,03
0,790	0,670	0,618	0,678	0,864	1,152	1,339	1,421	0,932
0,790	0,670	0,618	0,678	0,864	1,153	1,340	1,421	0,933
-0,01	-0,01	0,01	0,04	0,02	0,04	0,07	0,03	0,06
0,512	0,490	0,492	0,552	0,678	0,843	1,022	1,221	0,853
0,512	0,490	0,492	0,552	0,678	0,843	1,022	1,221	0,853
-0,05	0,05	0,00	0,08	0,04	0,05	0,04	0,00	-0,02
0,413	0,407	0,424	0,492	0,618	0,783	0,967	1,173	0,827
0,413	0,407	0,424	0,492	0,618	0,783	0,967	1,172	0,826
-0,01	-0,10	-0,01	0,00	0,01	-0,06	-0,04	-0,06	-0,08
0,440	0,399	0,407	0,490	0,670	0,940	1,151	1,281	0,867
0,440	0,399	0,407	0,490	0,670	0,939	1,150	1,280	0,867
0,04	0,07	-0,10	0,05	-0,01	-0,05	-0,06	-0,09	-0,05
0,612	0,440	0,413	0,512	0,790	1,384	1,660	1,481	0,924
0,611	0,440	0,413	0,512	0,790	1,383	1,659	1,480	0,923
-0,10	0,04	-0,01	-0,05	-0,01	-0,04	-0,09	-0,06	-0,07

Tabela 11 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4

0,924	0,867	0,827	0,853	0,932	0,972	0,848		
0,926	0,868	0,827	0,852	0,930	0,969	0,844		
0,23	0,17	0,00	-0,12	-0,19	-0,25	-0,44		
1,481	1,281	1,173	1,221	1,421	1,680	1,622	1,332	
1,484	1,283	1,173	1,220	1,418	1,674	1,616	1,324	
0,22	0,16	0,03	-0,09	-0,20	-0,26	-0,39	-0,57	
1,660	1,151	0,967	1,022	1,339	2,050	2,161	1,622	0,848
1,664	1,153	0,968	1,022	1,336	2,044	2,153	1,616	0,844
0,25	0,19	0,06	-0,05	-0,20	-0,28	-0,37	-0,39	-0,44
1,384	0,940	0,783	0,843	1,152	1,851	2,050	1,680	0,972
1,388	0,942	0,784	0,843	1,150	1,846	2,044	1,674	0,969
0,32	0,22	0,07	-0,01	-0,19	-0,26	-0,29	-0,35	-0,35
0,790	0,670	0,618	0,678	0,864	1,152	1,339	1,421	0,932
0,793	0,672	0,619	0,678	0,863	1,150	1,336	1,418	0,930
0,36	0,32	0,18	0,04	-0,01	-0,05	-0,20	-0,20	-0,19
0,512	0,490	0,492	0,552	0,678	0,843	1,022	1,221	0,853
0,514	0,492	0,493	0,553	0,678	0,843	1,022	1,220	0,852
0,40	0,44	0,26	0,19	0,04	-0,08	-0,05	-0,09	-0,12
0,413	0,407	0,424	0,492	0,618	0,783	0,967	1,173	0,827
0,415	0,409	0,426	0,493	0,619	0,784	0,968	1,173	0,827
0,58	0,42	0,38	0,26	0,18	0,07	0,06	0,03	0,00
0,440	0,399	0,407	0,490	0,670	0,940	1,151	1,281	0,867
0,443	0,402	0,409	0,492	0,672	0,942	1,153	1,283	0,868
0,75	0,73	0,42	0,44	0,32	0,22	0,19	0,16	0,17
0,612	0,44	0,413	0,512	0,790	1,384	1,660	1,481	0,924
0,616	0,443	0,415	0,514	0,793	1,388	1,664	1,484	0,926
0,71	0,75	0,58	0,40	0,36	0,32	0,25	0,22	0,23

A Tabela 12 apresenta o valor do fator de multiplicação obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o desvio percentual tomando o valor do benchmark LRA 3D como valor de referência.

Tabela 12 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual

	LRA 3D	DFMGA	
		2x2	4x4
k_{eff}	0,99639	0,99639	0,99636
Desvio percentual (%)	ref.	0,001	0,003

As Tabelas 7 e 13 mostram, respectivamente, a configuração do computador utilizado para obtermos a solução numérica dos problemas testes, e o tempo que o computador levou em cada uma das simulações.

Tabela 13 - Tempo de CPU

	Matriz 2x2	Matriz 4x4
Tempo de CPU (s)	78,25	289,59

6.3 – Benchmark LMW 3D

Este problema teste possui um núcleo com setenta e sete elementos combustíveis, sendo quatro com barras de controle totalmente retiradas e cinco com barras de controle parcialmente inseridas. O elemento combustível possui uma altura ativa de 160 cm e 20 cm de dimensões radiais. O núcleo é rodeado por quarenta nodos de refletores com 20 cm de espessura cada(LIMA, 2005).

Para este teste utilizamos a configuração de 1/4 do núcleo. Na Figura 17 mostramos a simetria de 1/4 do núcleo do reator em xy, assim como as dimensões dos nodos no plano xy.

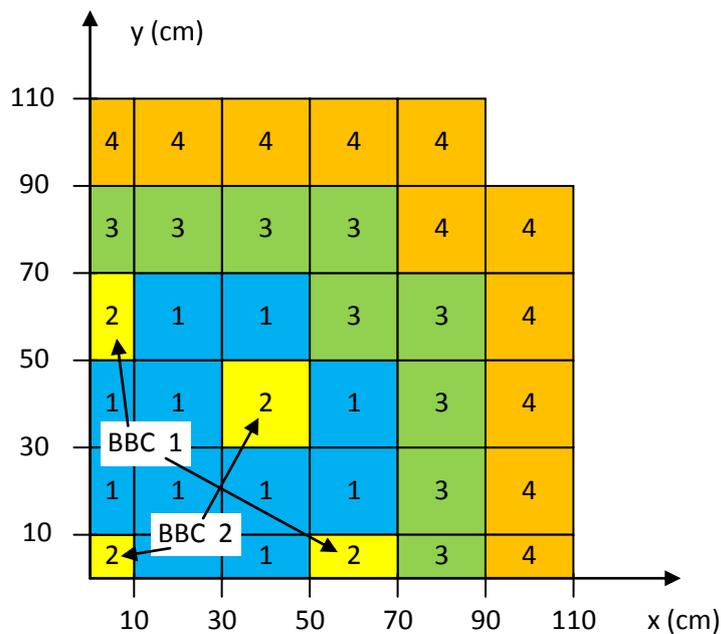


Figura 17 - Configuração para simetria de 1/4 do benchmark LMW 3D

Na Figura 18 mostramos em um plano xz, a localização dos bancos de barra de controle (BBC) assim como as condições de contorno.

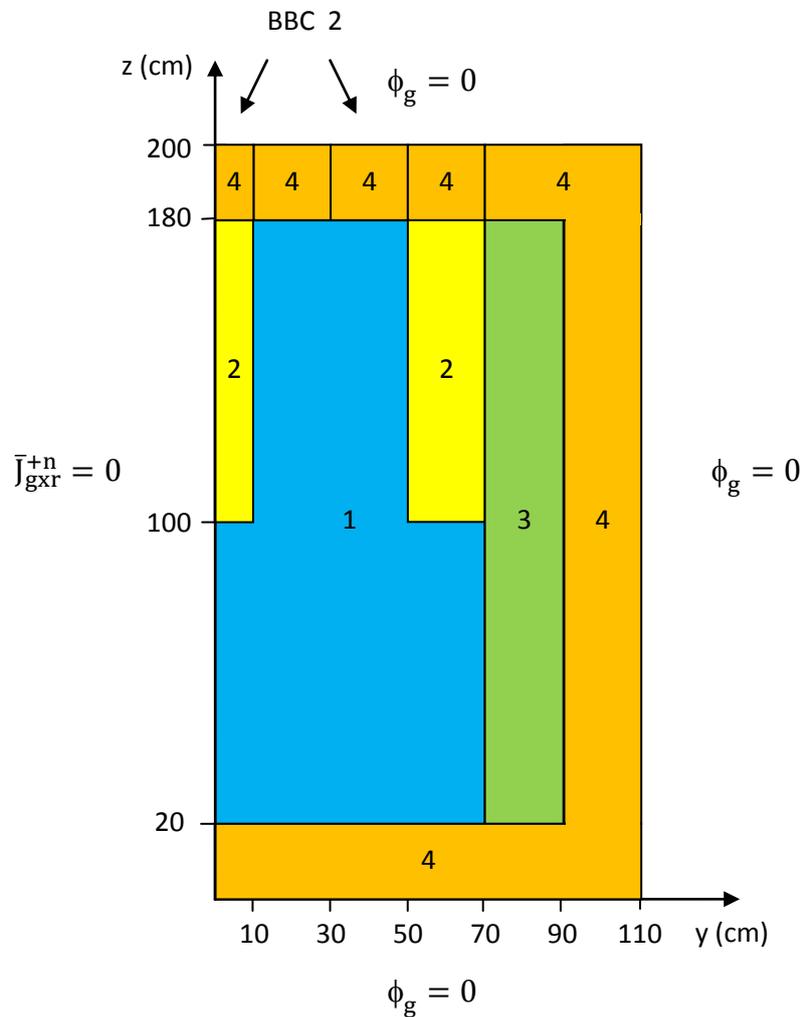


Figura 18 - Configuração do benchmark LMW 3D em um plano xz

Na Tabela 14 apresentamos os parâmetros nucleares do benchmark LMW 3D, com as seguintes classificações: Tipo 1 representa o combustível 1 sem BBC, Tipo 2

representa o combustível 1 com BBC, Tipo 3 representa o combustível 2 sem BBC e Tipo 3 representa o refletor superior, inferior e lateral.

Tabela 14 - Parâmetros nucleares do benchmark LMW 3D

Tipo	g	D_g (cm)	Σ_{ag} (cm)	$\Sigma_{gg'}$ (cm ⁻¹)	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm ⁻¹)
1	1	1,423913	0,01040206	0,0175555	0,006477691
	2	0,356306	0,08766217	0,0000000	0,1127328
2	1	1,423913	0,01095206	0,0175555	0,006477691
	2	0,356306	0,09146217	0,0000000	0,1127328
3	1	1,423913	0,01099263	0,01717768	0,007503284
	2	0,350574	0,09925634	0,00000000	0,1378004
4	1	1,634227	0,002660573	0,02759693	0,0000000
	2	0,264002	0,04936351	0,00000000	0,0000000

Para este teste foram geradas três nodalizações, 1x1, 2x2 e 4x4. Na primeira, 1x1, este 1/4 de núcleo foi dividido em 360 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a mesma dimensão dos elementos combustíveis (20 cm) e em oito camadas axiais de 20 cm de altura cada. Na segunda, 2x2, o 1/4 de núcleo foi dividido em 1.210 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a metade da dimensão dos elementos combustíveis (10 cm) e em oito camadas axiais de 20 cm de altura cada. Já na terceira, 4x4, o 1/4 de núcleo foi dividido em 4.840 nodos, com suas dimensões no plano xy sendo a quarta parte da dimensão dos elementos combustíveis (5 cm) e em oito camadas axiais de 20 cm de altura cada.

Para a solução numérica dos problemas teste, introduzimos no programa, criado em linguagem Fortran, a geometria do reator nuclear e suas dimensões, as condições de contorno, os parâmetros nucleares e as tolerâncias para os testes de convergência.

Os testes de convergência são feitos segundo as equações (6.1) e (6.2), e as tolerâncias apresentadas na Tabela 2.

As Tabelas 15, 16 e 17 mostram, para uma simetria de 1/4 de núcleo, a distribuição de potência normalizada. Nas tabelas a primeira linha representa o valor de referência, a segunda linha representa o valor obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e a terceira linha representa o valor do desvio percentual relativo entre os valores calculado e de referência. O elemento combustível marcado indica o maior desvio percentual encontrado.

Para calcularmos o desvio percentual relativo, para a comparação de resultados, utilizamos a equação (6.3), onde o valor calculado é obtido do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o valor de referência é obtido do benchmark LMW 3D.

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 15 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 1x1

0,713	0,695	0,617	0,423	
0,717	0,700	0,622	0,428	
0,55	0,65	0,76	1,28	
1,075	1,071	0,970	0,849	0,423
1,075	1,069	0,969	0,853	0,428
-0,04	-0,15	-0,06	0,44	1,28
1,426	1,382	1,233	0,970	0,617
1,420	1,377	1,230	0,969	0,622
-0,40	-0,36	-0,22	-0,06	0,76
1,640	1,575	1,382	1,071	0,695
1,631	1,568	1,377	1,069	0,700
-0,53	-0,46	-0,36	-0,15	0,65
1,708	1,640	1,426	1,075	0,713
1,701	1,631	1,420	1,075	0,717
-0,43	-0,53	-0,40	-0,04	0,55

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 16 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 2x2

0,713	0,695	0,617	0,423	
0,717	0,700	0,620	0,430	
0,60	0,65	0,50	1,60	
1,075	1,071	0,970	0,849	0,423
1,075	1,069	0,968	0,849	0,430
-0,05	-0,17	-0,25	0,05	1,60
1,426	1,382	1,233	0,970	0,617
1,422	1,378	1,230	0,968	0,620
-0,29	-0,30	-0,21	-0,25	0,50
1,640	1,575	1,382	1,071	0,695
1,633	1,569	1,378	1,069	0,700
-0,41	-0,35	-0,30	-0,17	0,65
1,708	1,640	1,426	1,075	0,713
1,703	1,633	1,422	1,075	0,717
-0,29	-0,41	-0,29	-0,05	0,60

	Valor de referência
	Valor obtido pelo DFMGA
	Desvio percentual (%)

Tabela 17 - Distribuição de potência normalizada para 1/4 do núcleo e matriz 4x4

0,713	0,695	0,617	0,423	
0,717	0,699	0,620	0,429	
0,60	0,65	0,46	1,52	
1,075	1,071	0,970	0,849	0,423
1,075	1,069	0,968	0,849	0,429
-0,04	-0,16	-0,26	-0,01	1,52
1,426	1,382	1,233	0,970	0,617
1,422	1,378	1,230	0,968	0,620
-0,27	-0,28	-0,21	-0,26	0,46
1,640	1,575	1,382	1,071	0,695
1,634	1,570	1,378	1,069	0,699
-0,39	-0,33	-0,28	-0,16	0,65
1,708	1,640	1,426	1,075	0,713
1,704	1,634	1,422	1,075	0,717
-0,26	-0,39	-0,27	-0,04	0,60

A Tabela 18 apresenta o valor do fator de multiplicação obtido pelo método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico e o desvio percentual tomando o valor do benchmark LMW 3D como valor de referência.

Tabela 18 - Fator de multiplicação efetivo e desvio percentual

	LMW 3D	DFMGA		
		1x1	2x2	4x4
k_{eff}	0,999467	0,99958	0,99952	0,99951
Desvio percentual (%)	ref.	0,011	0,005	0,004

As Tabelas 7 e 19 mostram, respectivamente, a configuração do computador utilizado para obtermos a solução numérica dos problemas testes, e o tempo que o computador levou em cada uma das simulações.

Tabela 19 - Tempo de CPU

	Matriz 1x1	Matriz 2x2	Matriz 4x4
Tempo de CPU (s)	3,77	6,52	27,47

Capítulo 7

CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem vários métodos de solução da equação da difusão de nêutrons, como o método de Diferenças Finitas Clássico (ALVIM, 2007), Método de Expansão Nodal (NEM sigla em inglês)(FINNEMAN, BENNEWITZ, & WAGNER, 1977) e o método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, entre outros. O método proposto neste trabalho, método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, que é baseado na metodologia desenvolvida por Y. A. Chao, reescreve a equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente, utilizando a Matriz de Transformação de similaridade e a Técnica de Transformação Linear, de tal forma que após expandirmos o termo relativo à fuga de nêutrons podemos chegar a uma solução analítica desta equação.

Este método, Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, também pode ser considerado um método nodal, já que os nodos utilizados para discretizar o reator nuclear possuem suas dimensões da mesma ordem de grandeza das dimensões radiais de um elemento combustível, diferentemente do método de Diferenças Finitas Clássico, que tem as dimensões das malhas limitadas, para uma boa acurácia, pelo comprimento de difusão, porém, o método de Diferenças Finitas de Malha Grossa analítico, procura manter a mesma estrutura, em relação ao arranjo dos fluxos adjacentes, do DFC, com isso, podemos aplicar os mesmos procedimentos computacionais utilizados no método de Diferenças Finitas Clássico.

Na implementação do método aqui proposto foram criados dois programas em linguagem Fortran. O primeiro, chamado de Nodalização, gera a nodalização do problema teste em três dimensões espaciais e em geometria cartesiana, onde o usuário poderá optar pelo tipo de simetria ($1/4$ ou $1/8$). O segundo, chamado de DFMG, resolve iterativamente o problema de autovalor e autovetor obtido da equação de difusão de nêutrons.

Com o intuito de demonstrar a eficiência do programa computacional desenvolvido com base no método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítico, apresentamos três casos testes de problemas benchmark encontrados na literatura, quais sejam: o problema benchmark IAEA 3D, o problema benchmark LRA 3D e o problema benchmark LMW 3D. E para testar a consistência do método, usamos três tipos de nodalização, a nodalização 1x1 que assume o nodo com a mesma dimensão radial do elemento combustível, a 2x2 que assume o nodo com a metade da dimensão radial do elemento combustível e a 4x4 que assume o nodo com a quarta parte da dimensão radial do elemento combustível.

O processamento numérico com o maior tempo computacional foi para o caso teste do benchmark LRA 3D com nodalização de 4x4, com um tempo de 289,59 segundos (em um computador intel core i7 de 2,80 Ghz de processamento, 3,18 GB de memória RAM e plataforma Windows XP Profissional), como se era de esperar, pois foi a simulação com o maior número de nodos (46.464 nodos). O processamento numérico com o menor tempo computacional foi para o caso teste do benchmark LMW 3D com nodalização de 1x1, com um tempo de 3,77 segundos. Com relação ao fator de multiplicação, todas as simulações obtiveram excelentes resultados quando comparados com seus valores de referência, com o maior desvio percentual obtido, de 0,011%, para o caso teste do benchmark LMW 3D com a nodalização de 1x1.

A distribuição de potência normalizada foi similar às obtidas dos benchmarks, com um desvio percentual máximo de 0,95% para o benchmark IAEA 3D com a nodalização de 4x4, de 0,22% para o benchmark LRA 3D com a nodalização de 2x2 e 1,28% para o benchmark LMW 3D com a nodalização de 1x1, em nodos localizados próximo ao refletor. É exatamente nesta região que foram obtidos os maiores desvios percentuais.

Por fim, como sugestão para trabalho futuro, proponho a utilização do DFMGA para acelerar o método nodal NEM, proponho também que se investigue outros perfis de fuga.

Apêndice A

Para determinar a solução particular da equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente desacoplada em grupos de energia, equação (4.9), é realizada uma expansão polinomial de segunda ordem no termo correspondente à fuga transversal, obtendo a equação (4.13). Isso implica que a solução particular também será um polinômio de segunda ordem e terá a forma da equação (4.14), sendo que os coeficientes $b_{0\ell u}^n$, $b_{1\ell u}^n$ e $b_{2\ell u}^n$ serão obtidos por identificação de parâmetros.

Substituindo as funções de base na equação (4.14), temos que:

$$\xi_{\ell,u,\text{pat}}^n(u) = b_{0\ell u}^n + b_{1\ell u}^n \left[2 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) - 1 \right] + b_{2\ell u}^n \left[-6 \left(\frac{u}{a_u^n} \right)^2 + 6 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) - 1 \right], \quad (\text{A.1})$$

e aplicando a derivada segunda em função de u na equação (A.1), obtemos:

$$\frac{d^2}{du^2} \xi_{\ell,u,\text{pat}}^n(u) = -\frac{12 b_{2\ell u}^n}{a_u^n}. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo as equações (A.2), (4.13) e (4.14) na equação (4.9) obtemos, após alguma manipulação algébrica, a equação abaixo.

$$\left[-\frac{12 b_{2\ell u}^n}{a_u^n} + \lambda_\ell^n b_{0\ell u}^n \right] + \left[\lambda_\ell^n b_{1\ell u}^n h_1 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) \right] + \left[\lambda_\ell^n b_{2\ell u}^n h_2 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) \right] =$$

$$\left[c_{0\ell,u}^n \right] + \left[c_{1\ell,u}^n h_1 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) \right] + \left[c_{2\ell,u}^n h_2 \left(\frac{u}{a_u^n} \right) \right] . \quad (\text{A.3})$$

Para que a igualdade da equação (A.3) seja verdadeira, os termos associados ao polinômio do lado esquerdo da equação devem ser iguais aos do lado direito da mesma equação.

Através dos termos associados ao polinômio de grau um, obtemos a equação (A.4), através dos termos associados ao polinômio de grau dois, obtemos a equação (A.5) e através dos termos associados ao polinômio de grau zero, obtemos, após alguma manipulação algébrica, a equação (A.6).

$$b_{1\ell u}^n = \frac{c_{1\ell,u}^n}{\lambda_\ell^n} , \quad (\text{A.4})$$

$$b_{2\ell u}^n = \frac{c_{2\ell,u}^n}{\lambda_\ell^n} , \quad (\text{A.5})$$

$$b_{0\ell u}^n = \frac{c_{0\ell,u}^n}{\lambda_\ell^n} + \frac{12 c_{2\ell,u}^n}{\lambda_\ell^n a_u^n} . \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as equações (A.4), (A.5) e (A.6) na equação (4.14), obtemos a equação (4.15) que é a solução particular da equação de difusão de nêutrons integrada transversalmente desacoplada em grupos de energia.

Apêndice B

Derivando as equações (B.1) e (B.2), obtemos as equações (B.3) e (B.4).

$$S_{us}^n \equiv \operatorname{sn}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \equiv \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \operatorname{senh}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

e

$$C_{us}^n \equiv \operatorname{cn}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \equiv \begin{cases} \cos\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \cosh\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

$$S'_{us}{}^n \equiv \begin{cases} \frac{d}{du} \left[\operatorname{sen}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \right] & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \frac{d}{du} \left[\operatorname{senh}\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \right] & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases},$$

$$S'_{us}^n \equiv \begin{cases} \beta_k^n \cos\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \cosh\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

e

$$C'_{us}^n \equiv \begin{cases} \frac{d}{du} \left[\cos\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \right] & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \frac{d}{du} \left[\cosh\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) \right] & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases},$$

$$C'_{us}^n \equiv \begin{cases} -\beta_k^n \sin\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \sinh\left(\beta_k^n \left\{u - \frac{a_u^n}{2}\right\}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

Aplicando as equações (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) na face esquerda do nodo n , ou seja, fazendo $u = 0$, obtemos:

$$S_{u\ell}^n \equiv \begin{cases} \sin\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \sinh\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.5})$$

$$C_{u\ell}^n \equiv \begin{cases} \cos\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \cosh\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.6})$$

$$S_{u\ell}^n \equiv \begin{cases} \beta_k^n \cos\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \cosh\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.7})$$

e

$$C'_{u\ell} \equiv \begin{cases} -\beta_k^n \operatorname{sen}\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \operatorname{senh}\left(-\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.8})$$

Agora aplicando as equações (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) na face direita do nodo n , ou seja fazendo $u = a_u^n$, obtemos:

$$S_{ur}^n \equiv \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \operatorname{senh}\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.9})$$

$$C_{ur}^n \equiv \begin{cases} \cos\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \cosh\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.10})$$

$$S_{ur}^n \equiv \begin{cases} \beta_k^n \cos\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \cosh\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.11})$$

e

$$C'_{ur} \equiv \begin{cases} -\beta_k^n \text{sen}\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n > 0 \\ \beta_k^n \text{senh}\left(\beta_k^n \frac{a_u^n}{2}\right) & \text{se } \lambda_k^n < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.12})$$

Como:

$$\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(-\theta)$$

e

$$\sinh (\theta) = -\sinh (-\theta) ,$$

obtemos, comparando a equação (B.5) com a equação (B.9) e a equação (B.8) com a equação (B.12), as equações (B.13) e (B.14).

$$S_{u\ell}^n = -S_{ur}^n \quad \forall \quad \lambda_k^n \quad \text{com} \quad k = 1, 2 \quad (\text{B.13})$$

e

$$C'_{u\ell}{}^n = -C'_{ur}{}^n \quad \forall \quad \lambda_k^n \quad \text{com} \quad k = 1, 2 . \quad (\text{B.14})$$

e como:

$$\cos (\theta) = \cos (-\theta)$$

e

$$\cosh (\theta) = \cosh (-\theta) ,$$

obtemos comparando a equação (B.6) com a equação (B.10) e a equação (B.7) com a equação (B.11), as equações (B.15) e (B.16).

$$C_{u\ell}^n = C_{ur}^n \quad \forall \quad \lambda_k^n \quad \text{com} \quad k = 1, 2 \quad (\text{B.15})$$

e

$$S'_{u\ell}{}^n = S'_{ur}{}^n \quad \forall \quad \lambda_k^n \quad \text{com} \quad k = 1, 2 . \quad (\text{B.16})$$

Substituindo a equação (4.48) na equação (4.45), obtemos a equação (B.17)

$$\hat{C}_{j,us}^n \equiv R_n (S_{us}^n N_{A,us}^n + C_{us}^n N_{B,us}^n) R_n^{-1} . \quad (\text{B.17})$$

Sabendo que

$$\bar{S}_n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} S_u^n(u) du \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \operatorname{sn} \left(\beta_1^n \left\{ u - \frac{a_u^n}{2} \right\} \right) du = 0, \quad (\text{B.18})$$

as equações (4.35) e (4.34) se transformam em

$$N_{A,us}^n \equiv (-S'_{us})^{-1} \quad (\text{B.19})$$

e

$$N_{B,us}^n \equiv 0. \quad (\text{B.20})$$

Logo, substituindo as equações (B.19) e (B.20) na equação (B.17), obtemos a equação (B.21)

$$\hat{C}_{j,us}^n \equiv R_n (S_{us}^n (-S'_{us})^{-1}) R_n^{-1}. \quad (\text{B.21})$$

Aplicando a equação (B.21) nas faces esquerda e direita do nodo n , obtemos, respectivamente, as equações (B.22) e (B.23)

$$\hat{C}_{j,ul}^n \equiv R_n (S_{ul}^n (-S'_{ul})^{-1}) R_n^{-1} \quad (\text{B. 22})$$

e

$$\hat{C}_{j,ur}^n \equiv R_n (S_{ur}^n (-S'_{ur})^{-1}) R_n^{-1} , \quad (\text{B. 23})$$

de onde podemos concluir, observando as equações (B.13) e (B.16), que:

$$\hat{C}_{j,ul}^n = -\hat{C}_{j,ur}^m . \quad (\text{B. 24})$$

Substituindo a equação (4.47) na equação (4.44), obtemos a equação (B.25)

$$\hat{C}_{f,us}^n \equiv R_n (S_{us}^n M_{A,us}^n + C_{us}^n M_{B,us}^n) R_n^{-1} , \quad (\text{B. 25})$$

Sabendo que $\bar{S}_n = 0$, equação (B.18), as equações (4.36) e (4.33) se transformam em

$$M_{A,us}^n \equiv (-S'_{us})^{-1} C_{us}^n \bar{C}_n^{-1} \quad (\text{B. 26})$$

e

$$M_{B,us}^n \equiv \bar{C}_n^{-1}. \quad (B.27)$$

Logo, substituindo as equações (B.26) e (B.27) na equação (B.25), obtemos a equação (B.28)

$$\hat{C}_{f,us}^n \equiv R_n \left(S_{us}^n (-S'_{us})^{-1} C'_{us} \bar{C}_n^{-1} + C_{us}^n \bar{C}_n^{-1} \right) R_n^{-1}, \quad (B.28)$$

Aplicando a equação (B.37) nas faces esquerda e direita do nodo n, obtemos, respectivamente, as equações (B.38) e (B.39)

$$\hat{C}_{f,u\ell}^n \equiv R_n \left(S_{u\ell}^n (-S'_{u\ell})^{-1} C'_{u\ell} \bar{C}_n^{-1} + C_{u\ell}^n \bar{C}_n^{-1} \right) R_n^{-1} \quad (B.28)$$

e

$$\hat{C}_{f,ur}^n \equiv R_n \left(S_{ur}^n (-S'_{ur})^{-1} C'_{ur} \bar{C}_n^{-1} + C_{ur}^n \bar{C}_n^{-1} \right) R_n^{-1}, \quad (B.28)$$

de onde podemos concluir, observando as equações (B.13), (B.14), (B.15) e (B.16), que:

$$\hat{C}_{f,ur}^n = \hat{C}_{f,u\ell}^m. \quad (\text{B.24})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVIM, A. C. (2007). *Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear*. Curitiba - PR: Ed. Certa.

CHAO, Y. A. (1999). *A theoretical analysis of the coarse mesh finite difference representation in advanced nodal methods*. The Proceeding of M&C'Madrid, Mathematics and Computacional, Vol 1, pp. 117-126, Madrid, Spain, September 27-30.

CHAO, Y. A. (2000). *Coarse mesh finite difference method and applications*. ANS International Topical Meeting on Advances in Reactor Physics and Mathematics and Computation into the Next Millennium, Vol 1, Pensylvania, Usa, may 7-12.

DUDERSTADT, J., & HAMILTON, L. J. (1976). *Nuclear Reactor Analysis*. New York: John Wile & Sons.

E. BREGA, D. P., & E. SALINA. (1981). Computation accuracy and efficiency of a coarse-mesh analitic nodal method for LWR transient problems, in comparasion with a apace-time synthesis method. *Anal os nuclear energys* , Vol 8, pp. 509 to 524.

ELETROBRÁS/ ELETRONUCLEAR. (s.d.). Acesso em 18 de 04 de 2013, disponível em <http://www.eletronuclear.gov.br/AEmpresa/CentralNuclear/Angra3.aspx>

ELETROBRÁS/ELETRONUCLEAR. (Julho de 2011). *Panorama da Energia Nuclear no Mundo*. Acesso em 28 de 12 de 2011, disponível em <http://www.eletronuclear.gov.br/downloads/19/771.pdf>

EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. (2012: Ano base 2011). *Balanço Energético Naciona (BEN)*. Acesso em 08 de Março de 2013, disponível em www.epe.gov.br

FINNEMAN, H., BENNEWITZ, F., & WAGNER, M. R. (1977). *Interface current techniques for multidimensional reactor calculation*. Atomkernenergie, vol. 300, pp. 123-127.

FREIRE, F. S. (Agosto de 2009). Aperfeiçoamento do Modelo de um Grupo Modificado para Aplicação na Recarga do Núcleo. *Tese de Doutorado*. Brasil: COPPE/UFRJ / Programa de Engenharia Nuclear.

GUIMARÃES, C. D. (Março de 2008). Utilização do Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa Analítica para a Solução Numérica da Equação de Difusão de Nêutrons. *Dissertação de Mestrado*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

LAMARSH, J. R. (1966). *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. Cambridge: M.I.T.

LIMA, Z. R. (Outubro de 2005). Aplicação do método dos pseudos-hamônicos à cinética multidimensional. *Tese de Doutorado*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

NETO, W. D. (Fevereiro de 2011). Novo Procedimento para a Pesquisa de Criticalidade Usando Métodos Nodais de Malha Grossa. *Dissertação de Mestrado*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PELEGRINELI, S. Q. (2012). Solução analítica da equação de difusão integrada transversalmente no método nodal. *Dissertação de Mestrado*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ROSSATO, R. (16 de Dezembro de 2011). Extensões da Equação de Difusão: Soluções e Aplicações. *Tese de Doutorado*. Maringá, Paraná, Brasil.

U.S. DOE NUCLEAR ENERGY RESEARCH ADVISORY COMMITTEE . (2002).