



SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA
SISTEMAS SUBCRÍTICOS CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO LINEAR DA
REATIVIDADE

Edson Henrice Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves
Daniel Artur Pinheiro Palma

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2013

SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA
SISTEMAS SUBCRÍTICOS CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO LINEAR DA
REATIVIDADE

Edson Henrice Júnior

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc.

Dr. Daniel Artur Pinheiro Palma, D.Sc.

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Dr. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2013

Henrice Júnior, Edson

Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual para Sistemas Subcríticos Considerando uma Variação Linear da Reatividade / Edson Henrice Júnior. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XI, 59 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves

Daniel Artur Pinheiro Palma

Dissertação (Mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 58-59.

1. Sistemas Subcríticos. 2. Equações da cinética pontual. 3. Função Gama Incompleta. I. Gonçalves, Alessandro da Cruz Gonçalves *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe, meu pai,
minha irmã e minha esposa.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus orientadores Alessandro da Cruz Gonçalves e Daniel Artur Pinheiro Palma que aceitaram me orientar e me proporcionaram chegar até aqui.

Agradeço a todos os meus amigos que sempre confiaram em mim e que hoje, mesmo longe ou perto sempre me incentivam. Em especial, aqueles que acho que levarei para a vida toda, como o Marco Antônio, Adriano, Leandro, Jorge e o Leonardo.

Não posso esquecer do Thiago, um amigo que passou horas e horas estudando junto ao longo destes últimos anos, sem essa ajuda certamente seria muito mais difícil ter chegado aqui.

Tenho que agradecer a uma categoria muito especial de amigos, minha sogra, meu sogro e minha cunhada, que também me deram muito mais que apoio .

Outros, mais que amigos, parceiros de ideal no GELA, e mais que amizade, me fornecem um lugar seguro onde posso conversar mais intimamente com Deus através das minhas orações e ações.

Agradeço em especial à minha mãe, minha irmã e meu pai que me dedicaram todo o carinho, esforço e sacrifício para que eu pudesse chegar até aqui.

E finalmente a minha esposa Gabriela que esteve comigo nestes últimos dez anos aguentando o meu bom ou meu mau humor, e que em todos os momentos sempre me ajudou e me apoiou.

A todos, muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA
SISTEMAS SUBCRÍTICOS CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO LINEAR DA
REATIVIDADE

Edson Henrice Júnior

Fevereiro/2013

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves
Daniel Artur Pinheiro Palma.

Programa: Engenharia Nuclear

Nesta dissertação é apresentada uma solução analítica para o conjunto de equações da cinética pontual para reatores subcríticos proposta por Silva (2011). Esta solução advém da equação diferencial ordinária não homogênea que rege a densidade de nêutrons e que apresenta a função Gama incompleta em sua forma funcional. O método utilizado se mostrou vantajoso e permitiu aplicações práticas tais como a inserção linear de reatividade considerando fonte externa constante ou ambos variando linearmente.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYTICAL SOLUTION OF POINT KINETIC EQUATIONS FOR SUB-CRITICAL SYSTEMS ASSUMING A VARIATION LINEAR REACTIVITY

Edson Henrice Júnior

February /2013

Advisors: Alessandro da Cruz Gonçalves
Daniel Artur Pinheiro Palma

Department: Nuclear Engineering

This dissertation presents an analytical solution for the set of point kinetic equations applied to subcritical reactors, as proposed by Silva (2011). This solution stems from the ordinary, non-homogeneous differential equation that rules the neutron density and that presents the incomplete Gamma function in its functional form. The method used proved advantageous and allowed practical applications such as the linear insertion of reactivity, considering an external constant source or with both varying linearly.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES SUBCRÍTICOS SEGUNDO SILVA.	6
2.1 Introdução.....	6
2.2 Desenvolvimento das equações da cinética pontual a partir da função importância ε_0^+	7
3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL CONSIDERANDO VARIAÇÃO LINEAR DA REATIVIDADE E FONTE EXTERNA DE NÊUTRONS CONSTANTE.....	14
3.1 Introdução.....	14
3.2 Redefinição das unidades	14
3.3 Equação diferencial ordinária que rege a densidade de nêutrons.....	16
3.4 Variação linear de reatividade e fonte externa constante.	19
3.4.1 Solução para $t \geq t_0$	19
3.4.2 Solução para $0 \leq t < t_0$	21
3.5 Método numérico de referência.....	23
3.5.1 Validação do método de referência	24
3.6 Avaliação numérica dos termos da equação diferencial que rege a densidade de nêutrons	29
4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL CONSIDERANDO VARIAÇÃO LINEAR DA REATIVIDADE E DA FONTE EXTERNA DE NÊUTRONS.....	39
4.1 Introdução.....	39
4.2 Fonte externa e reatividade variando linearmente.....	39
4.3 Obtenção de uma expressão sem funções especiais.....	44
4.4 Comparação entre o método proposto e a metodologia proposta por Zhang et al, aplicado em sistemas subcríticos no intervalo $0 \leq t \leq t_0$	50
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	52

6 CONCLUSÕES.....	56
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Emissões de CO_2 direta e indireta na geração de energia elétrica (RONDINELLI et al.,2012).	1
Figura 2- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ para uma exponencial.....	31
Figura 3- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ para uma exponencial.....	31
Figura 4- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ para duas exponenciais.....	32
Figura 5- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ para duas exponenciais.....	33
Figura 6- Termos da equação (3.51) para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ segundo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55).	37
Figura 7- Termos da equação (3.51) para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ segundo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55).	37
Figura 8- Comparação entre o método proposto, a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang e o método de referência para reatividade $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e fonte externa $q = 10^8$ nêutrons/s e $R=6$, aproximação (4.41).	54
Figura 9- Comparação entre o método proposto, a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang e o método de referência para reatividade $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$, fonte externa $q = 10^8$ nêutrons/s e $R=1$, aproximação (4.40).	55

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1-Parâmetros cinéticos utilizados para os cálculos comparativos entre o método de referência e a solução analítica para reatividade e fontes constantes.	28
Tabela 2- Comparativo entre a solução numérica e o método de referência.....	28
Tabela 3- comparação entre o valor obtido através do método de referencia e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 1345$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$	34
Tabela 4- comparação entre o valor obtido através do método de referencia e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 6729$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$.	35
Tabela 5- Comparativo entre o valor tabelado da função Gama e o valor obtido para a aproximação de Amore(2005) para $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$ e $a = 2,555928461$.	48
Tabela 6 - Comparativo entre o valor tabelado da função Gama e o valor obtido para a aproximação de Amore(2005) para $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e $a = 16,55928457$	49
Tabela 7 -Comparação entre o método numérico e o método proposto para coeficiente angular da fonte $r_q = 8264$ e 41322 ; reatividade $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$ e $R=1$, aproximação (4.40)	52
Tabela 8- Comparação entre o método numérico e o método proposto para coeficiente angular da fonte $r_q = 8264$ e 41322 ; reatividade $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e $R=6$, aproximação (4.41)	53

1 INTRODUÇÃO

O consumo de energia elétrica vem aumentando ano após ano em todo o mundo. Como comparação, no Brasil a demanda deve crescer em um ritmo bem acelerado, mais de 4% a cada ano nas próximas décadas (EPE,2011). Para suprir esta demanda, serão necessários investimentos em diversas fontes de geração de energia. Porém, se torna necessário avaliar os danos causados ao meio ambiente devido à geração de energia elétrica em cada alternativa.

Um dos principais problemas ambientais é o aquecimento global, que possui uma correlação direta com o efeito estufa, tendo como principal origem as emissões de dióxido de carbono, CO_2 . Para avaliação da emissão de CO_2 nas fontes de geração de energia mais utilizadas atualmente pode-se analisar o gráfico abaixo. Os estudos para a obtenção destes resultados foram desenvolvidos com base no método “Life Cycle Assessment – LCA” (ciclo de vida de uma instalação), que permite estimar o balanço de material e de energia em toda cadeia produtiva de uma determinada fonte geradora (RONDINELLI et al.,2012).

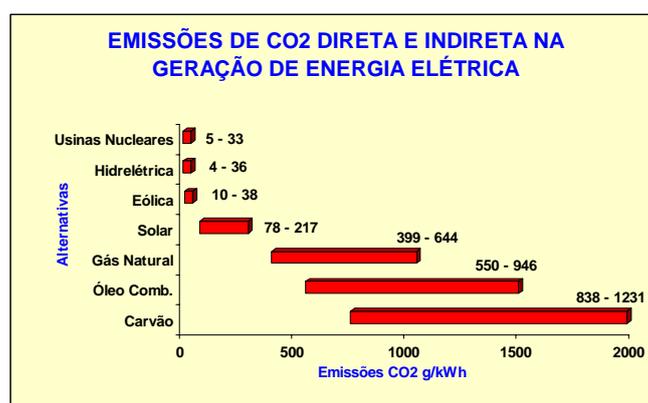


Figura 1- Emissões de CO_2 direta e indireta na geração de energia elétrica

(RONDINELLI et al.,2012).

A partir da Figura 1, pode-se observar que a energia nuclear é uma das fontes que menos gera CO_2 , tornando atrativa sua utilização por não contribuir significativamente para o efeito estufa, comparada às demais fontes. Porém, um dos problemas ambientais no que diz respeito à produção de energia por via nuclear e que mais chama a atenção, é o armazenamento do combustível queimado nos núcleos dos reatores. O combustível já queimado no núcleo do reator possui produtos de fissão e outros elementos transurânicos cujas meias-vidas podem chegar a milhares de anos, tendo que ser estocados por um longo período de tempo em locais apropriados, gerando diversas dificuldades para sua armazenagem.

Outra preocupação constante da geração de energia elétrica a partir da fissão nuclear é o aumento da segurança na operação dos reatores nucleares. Neste aspecto da segurança nuclear, uma das principais prioridades é o controle da criticalidade de um reator de potência.

Para a solução destas e outras diversas questões na indústria nuclear, uma proposta de utilização de um reator com um núcleo subcrítico está sendo amplamente pesquisada, denominado como Accelerator Driven Systems (ADS). Este núcleo subcrítico é guiado por um feixe de prótons altamente energéticos gerados por um acelerador linear. Esses prótons, ao colidirem com um alvo apropriado, geram, a partir de reações de *spallation* (MUKAIYAMA et al. 2001), os nêutrons necessários para a manutenção da fissão nuclear dentro do reator, produzindo energia. Cada próton acelerado possui uma energia extremamente alta, e ao colidir com o alvo, produz assim até dezenas de nêutrons.

O controle da quantidade de nêutrons dentro deste núcleo se daria pela variação da intensidade do feixe de prótons, o que analogamente também pode ocorrer com a variação da reatividade devido à inserção ou retirada das barras de controle em um

reator crítico de potência. Outra característica inerente aos sistemas ADS é decorrente do fato de que o sistema sendo subcrítico, caso seja necessário, emergencialmente, o desligamento do sistema se daria imediatamente com o desligamento da fonte externa, eliminando-se assim a necessidade de barras de controle como as existentes em um reator nuclear convencional. Para um acidente postulado do tipo *station blackout*, o que ocorre quando há falha total dos sistemas de alimentação de energia elétrica (DANTAS, 2012), a fonte externa seria desligada automaticamente sem nenhuma intervenção e o núcleo subcrítico não sustentaria as fissões, tornando assim o sistema intrinsecamente mais seguro. Este controle dinâmico eliminaria problemas que ocorrem nos reatores atuais devido à queda ou a ejeção de barras de controle, o que altera a distribuição de potência no núcleo.

Algumas propostas para a manutenção da operação deste feixe estão em estudo atualmente. Uma delas seria a utilização da energia vinda de fontes externas à planta do reator tornando o feixe independente da energia gerada pelo mesmo e, a outra, mais discutida, seria a utilização de uma fração da energia gerada pelo reator para alimentação do acelerador de prótons, o que tornaria o sistema intrinsecamente acoplado.

Mais uma vantagem inerente a este sistema diz respeito ao estoque dos combustíveis queimados. Os atuais projetos de reatores operam com grande quantidade de combustível em seu núcleo para que o ciclo de operação seja o maior possível, o que acarreta significativas quantidades de rejeitos radioativos que possuem elementos cuja meia-vida pode ser de alguns milhares de anos. Os reatores ADS, em sua concepção, podem utilizar em seu núcleo o combustível já utilizado em reatores de outros tipos, podendo assim queimar ou transmutar grandes quantidades de isótopos transurânicos e/ou produtos de fissão e produzir energia simultaneamente (SCHICORR, 2001). Desta

forma, tais reatores poderiam transformar elementos que possuem meia vida de milhares de anos em outros de meia vida de algumas centenas de anos, diminuindo muito as dificuldades de armazenamento dos rejeitos de alta atividade. Esta proposta demonstra a contínua preocupação do setor nuclear para a melhoria tanto da segurança quanto das questões ambientais.

Em decorrência de características peculiares que são mais intensamente alteradas durante a operação destes sistemas, como a transmutação de actínidos e elementos transurânicos e consequentes alterações isotópicas no combustível, mudanças na reatividade em função do efeito Doppler e mudanças na densidade do refrigerante (SCHICORR, 2001), poderia haver variações significativas nos parâmetros de segurança. Portanto, para a utilização desses reatores estudos ainda devem ser realizados e um destes campos de estudos é o comportamento cinético destes reatores, necessário também para prever as consequências de distúrbios operacionais e acidentes ocasionados nestes sistemas.

Diferentes formalismos para as equações da cinética pontual para reatores subcríticos têm sido estudados, como por exemplo, as propostas de Gandini & Salvatore, (2002), Nishihara et al. (2003) e Silva (2011). Nesta dissertação, utilizar-se-á a equação proposta por Silva (2011), que se mostra ser mais promissora, pois apresenta melhores resultados para reatores mais subcríticos.

As equações propostas por Silva (2011) serão apresentadas de forma breve no Capítulo II. No Capítulo III, será apresentada a solução analítica para reatividade linear e fonte externa constante bem como o método de referência que será amplamente utilizado nesta dissertação e sua validação.

No Capítulo IV, será apresentada a solução analítica com a reatividade e fonte variando linearmente. O Capítulo V será reservado para a apresentação dos resultados e

discussões pertinentes a estes. Por fim, no Capítulo VI serão apresentadas as conclusões e perspectivas futuras desta dissertação.

2 EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES SUBCRÍTICOS SEGUNDO SILVA.

2.1 Introdução.

Neste capítulo é realizada uma breve descrição das equações da cinética pontual propostas por Silva (2011), dispensando desta forma um detalhamento minucioso no presente texto. Porém, sua abordagem é necessária, pois o objetivo final desta dissertação é a apresentação de uma solução analítica destas equações com uma aplicação prática da mesma.

Para tal desenvolvimento, segundo Silva (2011), é necessário buscar uma função importância que se aproxime do fluxo adjunto quanto mais próximo da criticalidade se encontra o núcleo do reator nuclear.

A representação do termo S^\dagger no problema adjunto de fonte é pela equação

$$A_0^\dagger \phi_0^+(\vec{r}) - F_0^\dagger \phi_0^+(\vec{r}) - S^\dagger = 0, \quad (2.1)$$

sendo o termo S^\dagger definido por:

$$S^\dagger = \eta \frac{v \Sigma_f}{N_0}, \quad (2.2)$$

onde

$$\eta = 1 - k_{eff}. \quad (2.3)$$

Em função da normalização durante o processo de obtenção do sistema de equações da cinética pontual para a obtenção da equação (2.1), verifica-se o aparecimento de um termo que independe da representação funcional de η .

Para contornar este problema, foi introduzido empiricamente um fator de subcriticalidade k_{sub} na equação (2.1), obtendo-se a nova função importância:

$$A_0^\dagger \phi_0^+(\vec{r}) - \frac{1}{k_{sub}} F_0^\dagger \phi_0^+(\vec{r}) = \eta \frac{v \Sigma_f}{N_0} . \quad (2.4)$$

2.2 Desenvolvimento das equações da cinética pontual a partir da função importância ε_0^+ .

Partindo-se do conjunto de equações (HENRY,1975),

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -A\Psi(\vec{r}, t) + (1 - \beta)F\Psi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i c_i(\vec{r}, t) + q_{ext}(\vec{r}, t) , \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(\vec{r}, t) = \beta_i F(\vec{r}, t) - \lambda_i c_i(\vec{r}, t), \quad i=1, \dots, I , \quad (2.6)$$

é possível multiplicar a equação (2.5) por $\varepsilon_0^+(\vec{r})$ e integrar por \vec{r} , obtendo-se:

$$\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle = -\langle \varepsilon_0^+ | A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1 - \beta) F | \Psi \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | c_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle . \quad (2.7)$$

Supondo que o sistema seja perturbado da seguinte maneira:

$$-A \rightarrow -A_0 + \delta A , \quad (2.8)$$

$$F \rightarrow \frac{1}{k_{sub}} F_0 + \delta F , \quad (2.9)$$

é possível substituir (2.8) e (2.9) em (2.7), obtendo-se:

$$\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle = \left\langle \varepsilon_0^+ \left| -A_0 + \delta A \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (1-\beta) \left(\frac{1}{k_{sub}} F_0 + \delta F \right) \right| \Psi \right\rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | c_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle \quad (2.10)$$

Somando e subtraindo o seguinte termo no lado direito da equação (2.10):

$$\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle , \quad (2.11)$$

obtem-se:

$$\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle = \left\langle \varepsilon_0^+ \left| -A_0 \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (1-\beta) \frac{1}{k_{sub}} F_0 \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (1-\beta) \delta F \right| \Psi \right\rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | c_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle - \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle , \quad (2.12)$$

onde novamente pode-se substituir a equação (2.8) na equação (2.12).

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| -A_0 \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (1-\beta) \frac{1}{k_{sub}} F_0 \right| \Psi \right\rangle + \\
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| (1-\beta) \delta F \right| \Psi \right\rangle &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right\rangle + \right. \\
\left. \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta \left(\frac{1}{k_{sub}} F_0 + \delta F \right) \right| \Psi \right\rangle \right. &- \left. \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| \Psi \right\rangle \right.
\end{aligned} \quad , \quad (2.13)$$

onde obtém-se :

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta F \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right\rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right\rangle \right. \\
- \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| \Psi \right\rangle &+ \left\langle \varepsilon_0^+ \left| -A_0 \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{k_{sub}} F_0 \right| \Psi \right\rangle
\end{aligned} \quad . \quad (2.14)$$

Pesando-se a equação (2.4) com Ψ e arrumando os termos de forma conveniente, tem-se:

$$\left\langle \varepsilon_0^+ \left| -A_0 \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{k_{sub}} F_0 \right| \Psi \right\rangle = -\eta \frac{v}{N_0} \left\langle \Sigma_f \right| \Psi \rangle . \quad (2.15)$$

Substituindo-se a equação (2.15) na equação (2.14), pode-se obter:

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A + \delta F \right| \Psi \right\rangle - \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| \Psi \right\rangle + \\
\sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right\rangle &- \eta \frac{v}{N_0} \left\langle \Sigma_f \right| \Psi \rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right\rangle .
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Para efetuar uma simplificação, o fluxo de nêutrons $\Psi(\vec{r}, t)$ é representado pela aproximação adiabática, como:

$$\Psi(\vec{r}, t) \approx N(t) \phi_0(\vec{r}) . \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) na equação (2.16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right| N(t) \phi_0 \right\rangle &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A + \delta F \right| N(t) \phi_0 \right\rangle - \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| N(t) \phi_0 \right\rangle + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right. \right\rangle - \eta \frac{v}{N_0} \left\langle \Sigma_f \left| N(t) \phi_0 \right. \right\rangle + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

o que implica em:

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \right| \phi_0 \right\rangle \frac{dN(t)}{dt} &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A + \delta F \right| \phi_0 \right\rangle N(t) - \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| \phi_0 \right\rangle N(t) + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right. \right\rangle - \eta \frac{v}{N_0} \left\langle \Sigma_f \left| \phi_0 \right. \right\rangle N(t) + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde se pode identificar $\left\langle \Sigma_f \left| \phi_0 \right. \right\rangle$ como sendo a taxa de fissão $T_f(t)$ no instante $t=0$, o

que implica que:

$$N_0 = v \left\langle \Sigma_f \left| \phi_0 \right. \right\rangle. \quad (2.20)$$

Substituindo-se a equação (2.20) na equação (2.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{v} \right| \phi_0 \right\rangle \frac{dN(t)}{dt} &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \delta A + \delta F \right| \phi_0 \right\rangle N(t) - \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \right| \phi_0 \right\rangle N(t) + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| c_i \right. \right\rangle - \eta N(t) + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dividindo-se todos os termos da equação (2.21) por um fator de normalização

$$I = \langle \varepsilon_0^+ | F | \phi_0 \rangle, \quad (2.22)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \varepsilon_0^+ | v^{-1} | \phi_0 \rangle}{I} \frac{dN(t)}{dt} = & \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \delta A + \delta F | \phi_0 \rangle}{I} N(t) - \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \phi_0 \rangle}{I} N(t) + \\ & \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\langle \varepsilon_0^+ | c_i \rangle}{I} - \frac{\eta}{I} N(t) + \frac{\langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle}{I}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Definindo-se os seguintes termos:

$$\Lambda_{eff}^\varepsilon \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | v^{-1} | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (2.24)$$

$$\rho^\varepsilon \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \delta A + \delta F | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (2.25)$$

$$\beta_{eff}^\varepsilon \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (2.26)$$

$$C_i^\varepsilon(t) \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | c_i \rangle}{I}, \quad (2.27)$$

$$Q^\varepsilon \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle}{I}, \quad (2.28)$$

$$\xi \equiv \frac{\eta}{I}, \quad (2.29)$$

sendo ρ^ε uma reatividade generalizada, Q^ε um termo relacionado à fonte externa, $\xi N(t)$ o termo de subcriticalidade introduzido pela função ε_0^+ e $C_i^\varepsilon(t)$ a concentração de precursores associada a função ε_0^+ . Sendo assim, a equação (2.23) torna-se:

$$\Lambda_{eff}^\varepsilon \frac{dN(t)}{dt} = (\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon) N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^\varepsilon(t) - \xi N(t) + Q^\varepsilon(t). \quad (2.30)$$

Para a determinação da concentração de precursores, parte-se então da equação (2.6), pesando-a com ε_0^+ . Utilizando-se a fatoração proposta na equação (2.17) e dividindo pelo fator de normalização I . Fazendo-se estas considerações, a equação (2.6) pode ser reescrita como:

$$\frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| c_i \right\rangle}{I} = \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ | \beta_i F | N(t) \cdot \phi_0 \right\rangle}{I} - \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ | \lambda_i | c_i \right\rangle}{I}, \quad (2.31)$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dt} C_i^\varepsilon(t) = \beta_{i,eff}^\varepsilon N(t) - \lambda_i C_i^\varepsilon(t). \quad (2.32)$$

Onde se pode definir $\beta_{i,eff}^\varepsilon$ como

$$\beta_{i,eff}^\varepsilon \equiv \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ | \beta_i F | N(t) \right\rangle}{I}. \quad (2.33)$$

No próximo capítulo as equações (2.30) e (2.32) serão mais bem abordadas, admitindo-se para isto a situação em que a reatividade varie linearmente e a fonte externa de nêutrons seja mantida constante.

3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL CONSIDERANDO VARIAÇÃO LINEAR DA REATIVIDADE E FONTE EXTERNA DE NÊUTRONS CONSTANTE

3.1 Introdução

Durante a operação normal de um reator de potência, a variação da reatividade corresponde a uma variação de forma linear durante certo período de tempo (FIGUEIRA, 2009). Sendo assim, a solução das equações da cinética pontual levando-se em consideração uma variação da reatividade como uma função de primeiro grau na forma $\rho(t) = A + Bt$, onde A e B são constantes, constitui um problema de grande importância para a física de reatores.

Neste capítulo far-se-á o desenvolvimento das equações da cinética pontual para reatores subcríticos proposta por Silva (2011) considerando a variação linear da reatividade e fonte externa de nêutrons constante utilizando-se como base a metodologia proposta por Zhang et al. (2008) até a obtenção de uma solução analítica.

3.2 Redefinição das unidades

Para a obtenção de uma solução analítica, deve-se partir do sistema de equações proposto por Silva (2011), conforme descrito no capítulo anterior nas equações (2.30) e (2.32). Com o intuito de manter as mesmas unidades dos conjuntos das equações da

cinética pontual para sistemas críticos existentes na literatura é possível proceder com a seguinte redefinição:

$$\tilde{C}_i(t) = \frac{C_i^\varepsilon(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon}, \quad (3.1)$$

$$q(t) = \frac{Q^\varepsilon(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon}, \quad (3.2)$$

o que possibilita escrever o novo conjunto de equações da cinética pontual para sistemas subcríticos da seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(\rho^\varepsilon(t) - \beta_{eff}^\varepsilon)N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \tilde{C}_i(t) - \frac{\xi N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + q(t). \quad (3.3)$$

$$\frac{d\tilde{C}_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i^\varepsilon N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} - \lambda_i \tilde{C}_i(t). \quad (3.4)$$

E, levando-se em consideração apenas um grupo de precursores pode-se obter:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(\rho^\varepsilon(t) - \beta_{eff}^\varepsilon)N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + \lambda \tilde{C}(t) - \frac{\xi N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + q(t), \quad (3.5)$$

$$\frac{d\tilde{C}(t)}{dt} = \frac{\beta_{eff}^\varepsilon N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} - \lambda \tilde{C}(t). \quad (3.6)$$

Onde $N(t)$ é a densidade de nêutrons num determinado instante, $\rho^\varepsilon(t)$ a reatividade do sistema, $q(t)$ a fonte externa, β_{eff}^ε a fração total de nêutrons retardados, λ a constante de decaimento efetiva, ξ o termo de subcriticalidade, $\tilde{C}(t)$ a

concentração de precursores de nêutrons retardados e $\Lambda_{eff}^\varepsilon$ o tempo médio de geração entre o surgimento e a subsequente absorção de nêutrons induzindo fissão.

3.3 Equação diferencial ordinária que rege a densidade de nêutrons

Nesta seção o conjunto de equações (3.5) e (3.6) será transformado em uma equação diferencial ordinária não homogênea de modo que aproximações referentes à variação temporal da densidade de nêutrons possam ser efetuadas e possibilite a obtenção de soluções analíticas em uma situação de interesse prático que é a inserção linear de reatividade no sistema.

Derivando a equação (3.5) em relação a t , resulta que:

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = \frac{1}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{d\rho^\varepsilon(t)}{dt} N(t) + \frac{(\rho^\varepsilon(t) - \beta_{eff}^\varepsilon)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \lambda \frac{d\tilde{C}(t)}{dt} - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dq(t)}{dt}, \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.6) em (3.7), obtém-se:

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = \frac{1}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{d\rho^\varepsilon(t)}{dt} N(t) + \frac{(\rho^\varepsilon(t) - \beta_{eff}^\varepsilon)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{\lambda \beta_{eff}^\varepsilon N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + \lambda(-\lambda \tilde{C}(t)) - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dq(t)}{dt} \quad (3.8)$$

A equação (3.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\lambda \tilde{C}(t) = -\frac{dN(t)}{dt} + \frac{(\rho^\varepsilon(t) - \beta_{eff}^\varepsilon) N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} - \frac{\xi N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + q(t) . \quad (3.9)$$

Substituindo-se a equação (3.9) na equação (3.8):

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = \frac{1}{\Lambda_{eff}^\epsilon} \frac{d\rho^\epsilon(t)}{dt} N(t) + \frac{(\rho^\epsilon(t) - \beta_{eff}^\epsilon)}{\Lambda_{eff}^\epsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{\lambda\beta_{eff}^\epsilon N(t)}{\Lambda_{eff}^\epsilon} + \lambda \left(-\frac{dN(t)}{dt} + \frac{(\rho^\epsilon(t) - \beta_{eff}^\epsilon)N(t)}{\Lambda_{eff}^\epsilon} - \frac{\xi N(t)}{\Lambda_{eff}^\epsilon} + q(t) \right) - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\epsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dq(t)}{dt} \quad (3.10)$$

Reescrevendo a equação anterior a fim de se organizar melhor cada termo, obtém-se que:

$$\Lambda_{eff}^\epsilon \frac{d^2N(t)}{dt^2} = (\rho^\epsilon(t) - \beta_{eff}^\epsilon - \lambda\Lambda_{eff}^\epsilon - \xi) \frac{dN(t)}{dt} + \left(\lambda\rho^\epsilon(t) - \lambda\xi + \frac{d\rho^\epsilon(t)}{dt} \right) N(t) + \lambda\Lambda_{eff}^\epsilon q(t) + \Lambda_{eff}^\epsilon \frac{dq(t)}{dt} \quad (3.11)$$

Neste ponto, faz-se necessário avaliar os termos da equação (3.11) a fim de saber a importância de cada um deles.

O termo que envolve a derivada primeira representa a taxa da variação da população de nêutrons. Para um reator de potência, por inúmeras questões, não é permitido que a população de nêutrons varie rapidamente, isto é, não é permitido grandes variações de reatividade. Em função disto, portanto, espera-se que esta derivada seja menor ainda e que não possua grandes variações.

O tempo médio de geração entre o surgimento e a subsequente absorção de nêutrons induzindo fissão também tem seu valor muito pequeno, da ordem de 10^{-5} . Portanto, o primeiro termo da equação (3.11) pode ser desprezado, isto é:

$$\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \frac{d^2 N(t)}{dt^2} \cong 0. \quad (3.12)$$

Posteriormente, esta aproximação será discutida novamente com um enfoque numérico a fim de ser mais bem avaliada.

Com a aproximação (3.12), pode-se reescrever a equação (3.11) como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\left(\lambda \rho^{\varepsilon}(t) - \lambda \xi + \frac{d\rho^{\varepsilon}(t)}{dt} \right)}{\left(-\rho^{\varepsilon}(t) + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} + \xi \right)} N(t) + \frac{\lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q(t) + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} \frac{dq(t)}{dt}}{\left(-\rho^{\varepsilon}(t) + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} + \xi \right)}. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que rege de maneira aproximada a densidade de nêutrons no reator para as situações em que as equações da cinética pontual são válidas.

Como o objetivo desta dissertação é encontrar uma solução analítica para as equações da cinética pontual com uma aplicação prática, faz-se necessário observar que a variação da reatividade e da fonte externa de nêutrons deve ser um evento amplamente estudado uma vez que a variação da população de nêutrons em reatores ADS se dá principalmente pela variação destes dois parâmetros. Com isto, na próxima seção será apresentada a solução analítica da equação (3.13) onde será abordada a situação em que ocorre uma inserção linear de reatividade considerando a fonte externa de nêutrons constante no tempo. No próximo capítulo, será feita uma abordagem mais ampla, onde será considerada uma inserção linear de reatividade com a fonte também variando linearmente com o tempo.

3.4 Variação linear de reatividade e fonte externa constante.

Nesta seção, será obtida a solução analítica das equações da cinética pontual para reatores subcríticos tendo-se como base o trabalho desenvolvido por Zhang et al. (2008). Para isto, considera-se a reatividade variando da seguinte forma:

$$\rho^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \rho_s + rt \rightarrow 0 \leq t < t_0 \\ \rho_s + rt_0 \rightarrow t_0 \leq t \end{cases}, \quad (3.14)$$

onde r é a taxa de inserção de reatividade, ρ_s a reatividade subcrítica do sistema e t_0 o instante em que a inserção de reatividade cessa passando a assumir um valor constante $\rho_s + rt_0$. Sendo assim, a equação (3.13) deve ser resolvida para cada intervalo de tempo separadamente.

3.4.1 Solução para $t \geq t_0$.

Para $t \geq t_0$ pode-se fazer as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= -|\rho_s| + rt_0 \\ \frac{dq(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\rho(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo as considerações (3.15) na equação (3.13) obtém-se à seguinte equação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(\lambda(-|\rho_s| + rt_0) - \lambda\xi)}{(|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^\varepsilon + \lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon + \xi)} N(t) + \frac{\lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{(|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^\varepsilon + \lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon + \xi)}. \quad (3.16)$$

Denotando-se as constantes:

$$\begin{aligned} B &= \lambda(-|\rho_s| + rt_0) - \lambda\xi \\ A &= |\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^\varepsilon + \lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon + \xi, \end{aligned} \quad (3.17)$$

e reescrevendo-se a equação (3.16) como

$$\frac{dN(t)}{dt} - \frac{B}{A} N(t) = \frac{\lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{A}, \quad (3.18)$$

que pode ser facilmente resolvida pelo método do fator integrante:

$$N(t) = e^{\frac{B}{A}t} \left[\int \frac{\lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{A} e^{-\frac{B}{A}t} dt + c_1 \right] = -\frac{\lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{B} + c_1 e^{\frac{B}{A}t}. \quad (3.19)$$

Impondo a condição $N(t) = N(t_0)$ pode-se determinar a constante c_1 :

$$c_1 = \left[N(t_0) + \frac{\lambda\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{A} \right] e^{-\frac{B}{A}t_0}. \quad (3.20)$$

Substituindo-se a equação (3.20) na equação (3.19), obtém-se a solução analítica aproximada válida quando $t \geq t_0$:

$$N(t) = -\frac{\lambda\Lambda_{eff}^{\varepsilon}q}{B} + \left[N(t_0) + \frac{\lambda\Lambda_{eff}^{\varepsilon}q}{B} \right] e^{\frac{B}{A}(t-t_0)} \quad (3.21)$$

3.4.2 Solução para $0 \leq t < t_0$.

Levando-se em consideração o intervalo de tempo $0 \leq t < t_0$, a variação de reatividade ocorre em um período de tempo curto em que a condição $\frac{1}{\lambda} \ll t_0 \ll \frac{1}{\beta}$ pode ser satisfeita. Com a aproximação prompt jump (DUDERSTADT and HAMILTON, 1976) e a suposição de que a concentração de precursores de nêutrons retardados permanece aproximadamente constante neste intervalo. Considerando-se primeiramente a concentração de precursores, é válido escrever que:

$$\tilde{C}(t) = \tilde{C}(0) = \frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0}{\lambda\Lambda_{eff}^{\varepsilon}}, \quad (3.22)$$

Impondo a condição inicial dada pela equação (3.22) na equação (3.5) obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{(\rho^{\varepsilon}(t) - \beta_{eff}^{\varepsilon} - \xi)}{\Lambda_{eff}^{\varepsilon}} N(t) + \frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N(0)}{\Lambda_{eff}^{\varepsilon}} + q. \quad (3.23)$$

Utilizando-se a aproximação prompt jump,

$$\frac{dN}{dt} \cong 0 \quad (3.24)$$

na equação (3.23), pode-se obter a densidade de nêutrons

$$N(t) = \frac{-\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 - \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{\rho^{\varepsilon}(t) - \beta_{eff}^{\varepsilon} - \xi} . \quad (3.25)$$

Para reatividade variando da forma

$$\rho^{\varepsilon}(t) = -|\rho_s| + rt , \quad (3.26)$$

obtem-se a seguinte expressão para a densidade de nêutrons para o intervalo de tempo analisado:

$$N(t) = \frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{|\rho_s| - rt + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \xi} . \quad (3.27)$$

Tomando-se o limite para um tempo $t = t_0$ na equação (3.27) determina-se $N(t_0)$,

$$N(t_0) = \frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \xi} , \quad (3.28)$$

e substituindo na equação (3.21) a equação (3.28), obtém-se:

$$N(t) = -\frac{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \lambda q}{B} + \left(\frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \xi} + \frac{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \lambda q}{B} \right) e^{\frac{B}{A}(t-t_0)} . \quad (3.29)$$

Finalmente, a solução completa toma a seguinte forma:

$$N(t) = \begin{cases} -\frac{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \lambda q}{\lambda(-|\rho_s| + rt_0) - \lambda \xi} + \left(\frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \xi} + \frac{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \lambda q}{\lambda(-|\rho_s| + rt_0) - \lambda \xi} \right) e^{\frac{\lambda(-|\rho_s| + rt_0) - \lambda \xi}{|\rho_s| - rt_0 + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} + \xi} (t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ \frac{\beta_{eff}^{\varepsilon} N_0 + \Lambda_{eff}^{\varepsilon} q}{|\rho_s| - rt + \beta_{eff}^{\varepsilon} + \xi}, & 0 \leq t \leq t_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Esta equação rege de forma aproximada a densidade de nêutrons para reatividade linear e fonte constante com base na metodologia proposta por Zhang et al. (2008).

3.5 Método numérico de referência

Uma solução de referência foi necessária para avaliação dos resultados obtidos nesta dissertação. Primeiramente ela servirá de base para a análise dos termos da equação (3.11), posteriormente esta solução servirá de base para comparação de resultados para que se possa alcançar o objetivo desta dissertação.

Para a obtenção da solução de referência será utilizado um método numérico com base na técnica de diferenças finitas (ALVIM, 2007) na discretização temporal das equações (3.5) e (3.6). Com isto, pode-se obter as seguintes equações:

$$N^{J+1} = N^J \left[1 + \frac{(\rho^{\varepsilon, J} - \beta_{eff}^{\varepsilon} - \xi)}{\Lambda_{eff}^{\varepsilon}} \Delta t \right] + q \Delta t + \left(\sum \lambda_i \tilde{C}^J \Delta t \right), \quad (3.31)$$

$$\tilde{C}^{J+1} = \frac{\beta_{i,eff}^{\varepsilon}}{\Lambda_{eff}^{\varepsilon}} N^J \Delta t + \tilde{C}^J (1 - \lambda \Delta t). \quad (3.32)$$

Para encontrar a condição inicial faz-se:

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{C}^0}{dt} = 0 &\Rightarrow \widetilde{C}^0 = \frac{\beta_{i,eff}^\varepsilon N^0}{\lambda \Lambda_{eff}^\varepsilon} \\ \frac{dN^0}{dt} = 0 &\Rightarrow N^0 = \frac{-q\Lambda}{\rho^{\varepsilon,J}(0) - \xi}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Para a implementação desta solução, foi feito um programa em Fortran utilizando-se para isto o compilador “Compaq Visual Fortran 6.6”.

Observou-se através de testes durante a solução numérica que é necessário escolher um valor de Δt que seja da ordem de $10^{-7}(s)$, para que seja garantida a convergência e estabilidade da solução numérica.

Este método é bastante aceito para a obtenção de resultados e o programa desenvolvido para obtenção da solução de referência foi validado frente à solução analítica do caso mais simples, o caso em que a reatividade e fonte são constantes.

3.5.1 Validação do método de referência

Para a obtenção de uma solução analítica para reatividade e fontes constantes, foi necessário partir da equação (3.7), onde foi considerado que a derivada da reatividade e da fonte iguais à zero, isto é, reatividade e fontes constantes:

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = \frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \lambda \frac{d\widetilde{C}(t)}{dt} - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} \quad (3.34)$$

Substituindo-se a derivada da concentração de nêutrons em relação ao tempo, equação (3.6), na equação (3.34):

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = \frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \lambda (\beta_{eff}^\varepsilon N(t) - \lambda \tilde{C}(t)) - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt}. \quad (3.35)$$

Substituindo-se (3.9) na equação (3.35):

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = \frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} + \lambda \left(\beta_{eff}^\varepsilon N(t) - \frac{dN(t)}{dt} + \frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon) N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} - \frac{\xi N(t)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + q \right) - \frac{\xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} \quad (3.36)$$

Organizando os termos da equação (3.36) e simplificando as constantes, obtêm-se:

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} - \frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon - \lambda \Lambda_{eff}^\varepsilon - \xi)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \frac{dN(t)}{dt} - \frac{(\lambda \rho^\varepsilon - \lambda \xi)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} N(t) = \lambda q. \quad (3.37)$$

Para a resolução desta equação diferencial, faz-se:

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{rt} \\ \frac{dN}{dt} &= r e^{rt} \\ \frac{d^2 N}{dt^2} &= r^2 e^{rt} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para simplificação da equação (3.37) as constantes serão denotadas como:

$$-\frac{(\rho^\varepsilon - \beta_{eff}^\varepsilon - \lambda \Lambda_{eff}^\varepsilon - \xi)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} = a_1 \quad (3.39)$$

e

$$-\frac{(\lambda\rho^\varepsilon - \lambda\xi)}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} = a_2 . \quad (3.40)$$

Substituindo-se estas equações descritas na equação (3.37) e explicitando a equação primeiramente em função da homogênea, obtém-se:

$$r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_2 e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt} (r^2 + a_1 r + a_2) = 0 . \quad (3.41)$$

Esta equação de segundo grau pode ser facilmente resolvida, encontrando-se as seguintes raízes:

$$\begin{aligned} \frac{(-a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2})}{2} &= r_1 \\ \frac{(-a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2})}{2} &= r_2 \end{aligned} . \quad (3.42)$$

A solução terá a seguinte forma então:

$$N(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} + S_p . \quad (3.43)$$

Onde:

$$S_p = \frac{\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{\rho^\varepsilon - \xi} . \quad (3.44)$$

Para encontrar k_1 e k_2 , impondo-se as condições iniciais para $N(0)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[\frac{\rho^\varepsilon - \xi}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \cdot N_0 + q - \left(N_0 + \frac{\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{\rho^\varepsilon - \xi} \right) r_2 \right] \\
k_2 &= N_0 - k_1 + \frac{\Lambda_{eff}^\varepsilon q}{\rho^\varepsilon - \xi}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

E finalmente a solução geral:

$$N(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} - \frac{q \Lambda_{eff}^\varepsilon}{\rho^\varepsilon - \xi}. \tag{3.46}$$

Com a solução analítica obtida na equação (3.46), foi possível efetuar uma comparação com o método de referência.

Os parâmetros cinéticos utilizados para a realização dos cálculos foram obtidos através de simulação computacional com o software Serpent 1.1.18, simulando um reator de 1,14 metros de diâmetro com ^{235}U a 14%, ^{238}U a 73% e ^{16}O a 11%. Estes dados foram obtidos durante o desenvolvimento de tese de doutorado (Antolin, Mauricio Quelhas). Os dados são apresentados a seguir na Tabela 1 e a comparação com a solução analítica, equação (3.46), com a solução numérica de referência, equações (3.31) e (3.32), podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 1-Parâmetros cinéticos utilizados para os cálculos comparativos entre o método de referência e a solução analítica para reatividade e fontes constantes.

Λ	1,21E-05 s
λ	0,21979 s ⁻¹
β	7,0765E-03
ξ	-0,77 E-10
q_0	10E+6 nêutrons/s
ρ^e	-0,005

Tabela 2- Comparativo entre a solução numérica e o método de referência

Tempo (s)	Método de referência (nêutrons/s)	Analítico (nêutrons/s)	Desvio %
1	1125,575	1125,574	9,59E-05
10	1849,264	1849,259	2,54E-04
20	2190,238	2190,234	1,73E-04
30	2327,504	2327,502	9,96E-05
40	2382,764	2382,763	5,35E-05
50	2405,010	2405,009	2,79E-05
60	2413,965	2413,965	1,48E-05

Através da Tabela 2, pode se observar que os valores obtidos para a densidade de nêutrons são compatíveis, apresentando desvios percentuais inferiores a 0,0003%, o que permite respaldar o programa desenvolvido para a obtenção da solução numérica de referência.

3.6 Avaliação numérica dos termos da equação diferencial que rege a densidade de nêutrons

A avaliação da importância de cada um dos termos da equação (3.11) é de grande relevância para esta dissertação. Com uma análise primária, foi possível efetuar uma simplificação na equação mencionada a fim de se obter uma equação diferencial mais simples e, como consequência, soluções mais fáceis.

Para tal avaliação foi necessária a obtenção de dados através da solução numérica de referência para obtenção da densidade de nêutrons para cada período de tempo de forma a servir de base para a avaliação de cada um dos termos.

De posse desses dados, foi possível efetuar a importação destes no software OriginPro8 para a efetuação de uma regressão não linear. Esta técnica pode ser uma boa tentativa para avaliação dos termos, pois a equação diferencial encontrada tem como solução, na maioria dos casos, alguma função envolvendo exponenciais ou outras funções não lineares.

Na literatura, existem algumas técnicas para que o ajuste seja efetuado. Apenas para ilustrar o processo e facilitar a escolha do tipo de função a ser ajustada, serão abordados brevemente alguns conceitos.

Em geral, a regressão não linear é utilizada na análise de dados em que as observações são constituídas por variável resposta y_i obtidas em função da variável independente x_i , onde $i = 1, \dots, n$ representa cada ponto. Assume-se que a relação entre a variável e a resposta/variável independente pode ser representada por uma equação da forma:

$$y = f(x; \theta) + \varepsilon, \quad (3.47)$$

onde θ representa um parâmetro desconhecido, ε representa erros aleatórios e $f(x; \theta)$ representa a função de regressão. Para o caso em análise, a função regressão deve ser contínua e possuir derivada segunda.

Através do software Origin é possível realizar testes de diversas funções, como a exponencial, sigmoidal entre outras, como sendo a própria função regressão, fornecendo automaticamente os parâmetros desconhecidos e fornecendo também um gráfico para análise de resíduos do modelo como balizamento do ajuste efetuado.

Para a realização dos cálculos do método de referência, os parâmetros cinéticos apresentados na Tabela 1 foram utilizados.

Para a efetuação dos cálculos, a fonte externa e a reatividade foram modeladas da seguinte forma:

$$\rho^e(t) = \rho_0 + r_\rho t, \quad (3.48)$$

$$q(t) = q_0 + r_q t. \quad (3.49)$$

Este procedimento foi efetuado utilizando-se alguns valores distintos de fonte e reatividade, isto é, o ajuste linear foi feito para cada conjunto de dados obtidos com a solução de referência.

Dentre as funções testadas, a que obteve melhores resultados foi a função exponencial. Para se efetuar uma análise da função ajustada utilizou-se o gráfico de análise de resíduos fornecido automaticamente pelo Origin. Este, por padrão, fornece a diferença entre o valor observado e o valor previsto pelo modelo. Nas Figuras 2 e 3, pode ser observado o gráfico de análise de resíduos para uma função regressão com apenas uma exponencial.

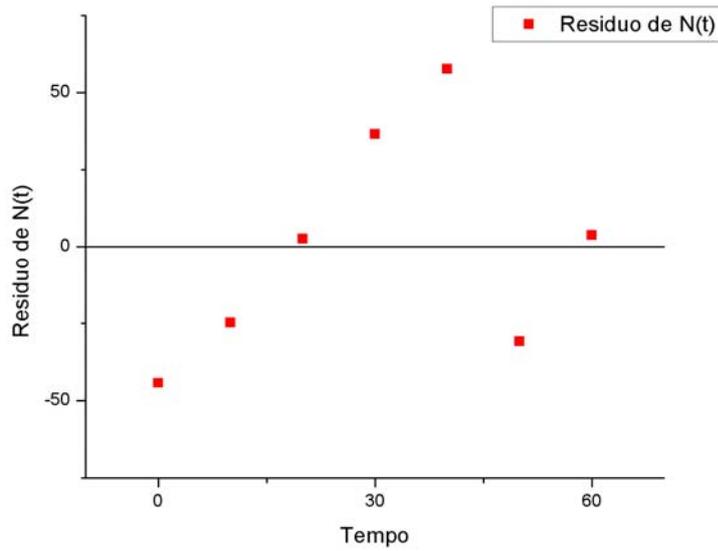


Figura 2- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ para uma exponencial.

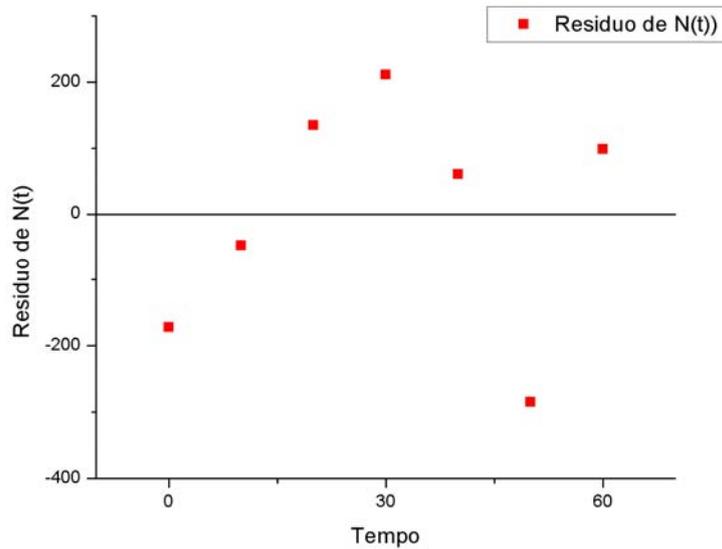


Figura 3- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ para uma exponencial.

Nas Figuras 2 e 3 pode-se observar que os resíduos foram discrepantes, isto é, a diferença entre o valor calculado pelo método de referência e o valor previsto pelo modelo de ajuste linear utilizado foram bem grandes. Outro aspecto que pode ser avaliado no gráfico de resíduos, é que ligando-se cada um dos pontos, sua dispersão em torno do zero apresenta uma tendência cossenoide, como o comportamento do desvio, ou seja, sua forma pode sugerir que o ajuste seja por uma exponencial de ordem superior (OriginLab).

Portanto, a partir da análise efetuada com uma exponencial na função regressão, verificou-se a necessidade de testes com uma nova função regressão com duas exponenciais, obtendo-se os gráficos apresentados nas Figuras 4 e 5.

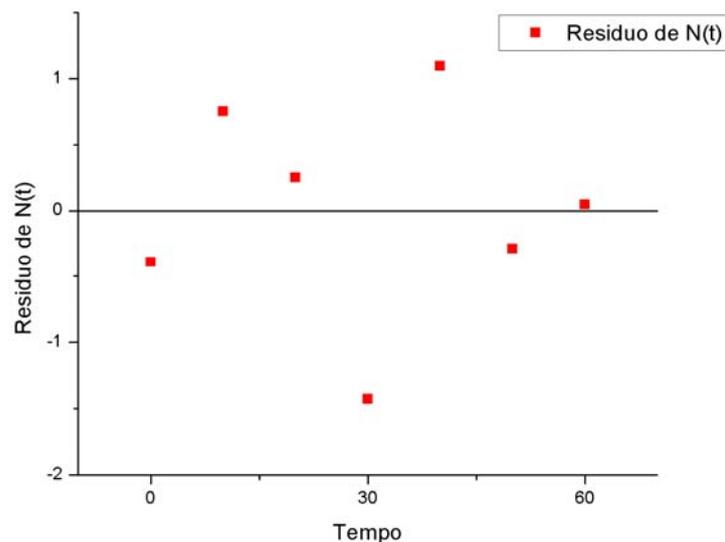


Figura 4- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ para duas exponenciais.

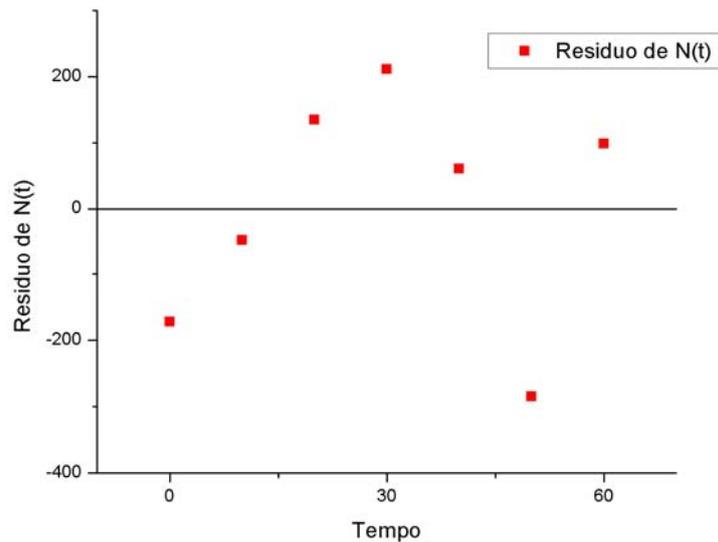


Figura 5- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ para duas exponenciais.

Através do gráfico de resíduos apresentado na Figura 4, pode-se verificar que os resíduos foram muito menores que os apresentados na Figura 2 e os pontos se apresentam aparentemente distribuídos de forma aleatória em torno do ponto zero, o que indica menores erros entre o valor ajustado e o valor obtido com o método de referência. Comparando-se as Figuras 3 e 5 geradas para os mesmos parâmetros cinéticos e função regressão com uma e duas exponenciais respectivamente, não foi possível uma melhoria quanto aos resíduos.

Portanto, comparando-se os modelos para uma e para duas exponenciais, é possível observar uma melhora para o segundo modelo analisado. Então, a função regressão escolhida foi a que contém duas exponenciais conforme mostrado abaixo:

$$y = y_0 + A_1 e^{-t/c_1} + A_2 e^{-t/c_2} . \quad (3.50)$$

Vale ressaltar que para cada conjunto de parâmetros cinéticos é obtido um novo ajuste, pois ele é feito somente através da solução obtida com o método de referência, isto é, levando-se em consideração apenas o tempo e a densidade de nêutrons obtidos.

O modelo de função regressão escolhido faz parte da solução geral proposta para uma grande variedade de equações diferenciais ordinárias.

De posse do ajuste linear, isto é, das constantes da equação (3.50), os pontos para cada intervalo de tempo foram calculados e os valores obtidos com o ajuste linear foram comparados com os valores obtidos através do método de referência.

Tabela 3- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 1345$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$

Tempo (s)	Método de referência (nêutrons/s)	Ajustado (nêutrons/s)	Desvio %
10	28,7	28,0	2,6
20	59,9	59,7	0,4
30	111,0	112,4	1,3
40	208,3	207,2	0,5
50	459,6	459,9	0,1
60	2009,0	2009,0	0,0

Tabela 4- comparação entre o valor obtido através do método de referência e o valor obtido com o ajuste linear para $r_q = 6729$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$

Tempo (s)	Método de referência (nêutrons/s)	Ajustado (nêutrons/s)	Desvio %
10	702,8	750,1	6,7
20	1757,9	1623,5	7,6
30	3377,3	3166,0	6,3
40	5950,6	5890,0	1,0
50	10415,4	10700,4	2,7
60	19293,6	19195,4	0,5

Pode-se observar que os resultados obtidos com o ajuste linear foram muito bons. Os maiores desvios foram encontrados apenas para os primeiros instantes de tempo. Os demais desvios foram muito pequenos.

De posse da validação do ajuste a avaliação dos termos da equação (3.11) pode ser iniciada. Para isto, a equação mencionada foi dividida da seguinte forma:

$$\underbrace{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \frac{d^2 N(t)}{dt^2}}_{Termo1} - \underbrace{\left(\rho^{\varepsilon}(t) - \beta_{eff}^{\varepsilon} - \lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} - \xi \right) \frac{dN(t)}{dt}}_{Termo2} - \underbrace{\left(\lambda \rho^{\varepsilon}(t) - \lambda \xi + \frac{d\rho^{\varepsilon}(t)}{dt} \right) N(t)}_{Termo3} - \underbrace{\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \left(\lambda q(t) + \frac{dq(t)}{dt} \right)}_{Termo4} = 0 \quad (3.51)$$

Com as constantes ajustadas, conforme a equação (3.50) foi possível obter a derivada primeira e a derivada segunda desta equação. Cada uma das derivadas pôde ser substituída então nos termos explicitados na equação (3.51), obtendo-se:

$$Termo1 = \Lambda_{eff}^{\varepsilon} \cdot \left(\frac{A_1}{c_1^2} e^{-t/c_1} + \frac{A_2}{c_2^2} e^{-t/c_2} \right), \quad (3.52)$$

$$Termo2 = -\left(\rho^{\varepsilon}(t) - \beta_{eff}^{\varepsilon} - \lambda \Lambda_{eff}^{\varepsilon} - \xi \right) \cdot \left(\frac{A_1}{c_1} e^{-t/c_1} + \frac{A_2}{c_2} e^{-t/c_2} \right), \quad (3.53)$$

$$Termo3 = -\left(\lambda \rho^{\varepsilon}(t) - \lambda \xi + \frac{d\rho^{\varepsilon}(t)}{dt} \right) \cdot \left(y_0 + A_1 e^{-t/c_1} + A_2 e^{-t/c_2} \right), \quad (3.54)$$

$$Termo4 = -\Lambda_{eff}^{\varepsilon} \left(\lambda q(t) + \frac{dq(t)}{dt} \right). \quad (3.55)$$

Com isto, foi possível isolar e calcular a importância de cada termo.

Os valores obtidos em módulo de cada um dos termos podem ser observados nas Figuras 6 e 7.

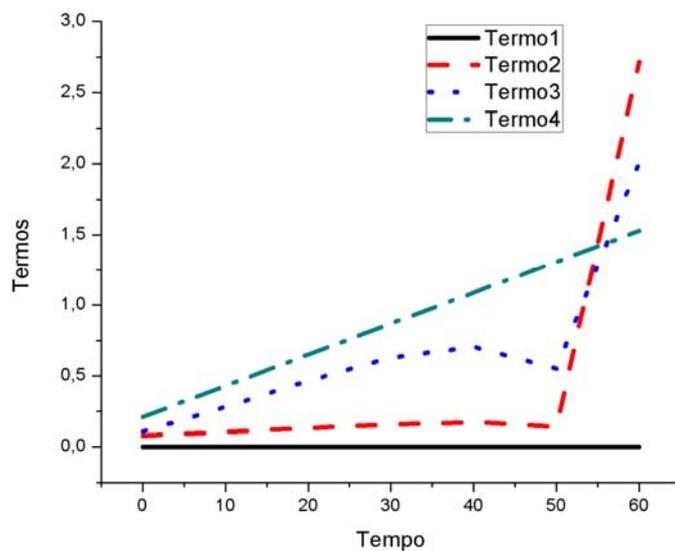


Figura 6- Termos da equação (3.51) para $r_q = 8264$ e reatividade $\rho(t) = -0.06 + 0.001t$ segundo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55).

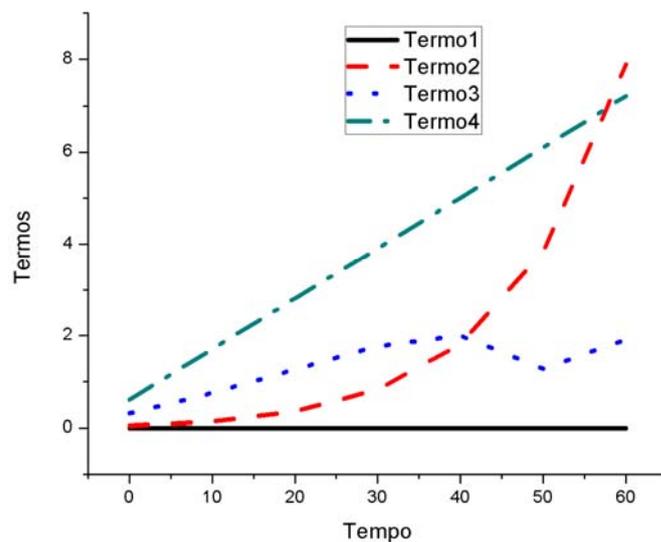


Figura 7- Termos da equação (3.51) para $r_q = 41322$ e reatividade $\rho(t) = -0.006 + 0.0001t$ segundo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55).

Conforme pode ser verificado nas Figuras 6 e 7, o Termo 1 é muito pequeno em comparação a todos os outros e não sofre alterações com a variação do tempo, ficando muito próximo de zero durante o período de tempo considerado. Com isto, a aproximação feita na seção 3.3 pode ser respaldada, facilitando a obtenção de resultados das equações diferenciais vindas a partir da equação (3.13).

4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL CONSIDERANDO VARIAÇÃO LINEAR DA REATIVIDADE E DA FONTE EXTERNA DE NÊUTRONS

4.1 Introdução

A metodologia proposta no capítulo anterior não comporta casos mais complexos como o de variação da fonte externa. Este caso torna-se bastante atrativo para os reatores ADS, que tem como proposta que seu controle seja efetuado através da variação da fonte externa. Portanto, neste capítulo, é apresentada a solução da equação (3.16) considerando a inserção de reatividade linear, conforme abordado anteriormente, e com fonte externa de nêutrons variando linearmente na forma $q(t) = C + Dt$, sendo C e D constantes.

4.2 Fonte externa e reatividade variando linearmente.

Para a obtenção da solução analítica das equações da cinética pontual para reatores subcríticos considerando fonte externa e reatividade variando linearmente, estes foram considerados como:

$$\begin{aligned} \rho^e(t) &= \rho_0 + r_\rho t \\ q(t) &= q_0 + r_q t \end{aligned} \quad (4.1)$$

Desta forma, pode-se obter uma equação que rege a densidade de nêutrons em função do tempo de uma forma mais abrangente que a apresentada no capítulo anterior, conforme a seguir:

$$-\left(\rho_0 + r_\rho t - \beta_{\text{eff}}^\varepsilon - \lambda \Lambda_{\text{eff}}^\varepsilon - \xi\right) \frac{dN(t)}{dt} - \left(\lambda \rho_0 + \lambda r_\rho t - \lambda \xi + r_\rho\right) N(t) = \Lambda_{\text{eff}}^\varepsilon \left(\lambda q_0 + \lambda r_q t + r_q\right). \quad (4.2)$$

A fim de simplificar, cada termo da equação (4.2) pode ter suas constantes redefinidas como:

$$\Delta = -\frac{\left(\rho_0 - \beta_{\text{eff}}^\varepsilon - \lambda \Lambda_{\text{eff}}^\varepsilon - \xi\right)}{r_\rho}, \quad (4.3)$$

$$k_1 = -\frac{\left(\lambda \rho_0 - \lambda \xi + r_\rho\right)}{\lambda r_\rho}, \quad (4.4)$$

$$k_2 = \frac{\lambda q_0 + r_q}{\lambda r_q}. \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.3), (4.4) e (4.5) em (4.2), é possível escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} + \frac{(k_1 - t)}{(\Delta - t)} \lambda N(t) = \frac{(k_2 + t)}{(\Delta - t) r_\rho} \lambda r_q \Lambda. \quad (4.6)$$

A equação (4.6) pode ser reescrita como:

$$\frac{dN(t)}{dt} + f(t)N(t) = g(t), \quad (4.7)$$

onde:

$$f(t) = \frac{(k_1 - t)}{(\Delta - t)} \lambda, \quad (4.8)$$

$$g(t) = \frac{(k_2 + t)}{(\Delta - t)r_p} \lambda r_q \Lambda. \quad (4.9)$$

Para a resolução desta equação diferencial ordinária pode-se utilizar o método do fator integrante denotado por:

$$\mu = \exp\left[\int f(t')dt'\right]. \quad (4.10)$$

Onde, organizando-se os termos, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\left[N(t) \cdot \exp\left(\int f(t')dt'\right)\right] = \exp\left(\int f(t')dt'\right) \cdot g(t). \quad (4.11)$$

E conseqüentemente:

$$N(t) = \left[\exp\left(-\int f(t')dt'\right)\right] \cdot \left[\int \exp\left(\int f(t')dt'\right) \cdot g(t) dt + cte\right]. \quad (4.12)$$

Para simplificar os cálculos, faz-se:

$$I_1 = \left[\exp \left(- \int \frac{(k_1 - t')}{(\Delta - t')} \cdot \lambda dt' \right) \right], \quad (4.13)$$

e

$$I_2 = \int \exp \left(\int f(t') dt' \right) \cdot g(t) dt . \quad (4.14)$$

Utilizando as definições:

$$u \equiv \Delta - t' , \quad (4.15)$$

$$\theta \equiv \lambda(\Delta - k_1) , \quad (4.16)$$

$$k_3 \equiv \frac{\lambda r_q \Lambda}{r_\rho} , \quad (4.17)$$

obtem-se que:

$$I_1 = \left[\exp \left(\int \frac{(\lambda_i - \theta)}{u} du \right) \right] = \frac{\exp(\lambda u)}{u^\theta} \quad (4.18)$$

e

$$I_2 = k_3 \left[\int e^{(\theta \ln(u) - u\lambda)} \frac{(k_2 + \Delta - u)}{u} (-du) \right] . \quad (4.19)$$

Ou de forma mais simples:

$$I_2 = k_3 \left[\int -(k_2 + \Delta) e^{-u\lambda} u^{\theta-1} du + \int e^{-u\lambda} u^\theta du \right] . \quad (4.20)$$

Reescrevendo-se a equação (4.12) pode-se obter:

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} k_3 \left[\int -(k_2 + \Delta) e^{-u\lambda} u^{\theta-1} du + \int e^{-u\lambda} u^\theta du + cte \right]. \quad (4.21)$$

A equação (4.21) possui solução conhecida, a função Gama incompleta (GRADSHTEYN and RYZHIK, 2008) que será mais bem abordada na seção 4.3. Sendo assim, a densidade de nêutrons é dada por:

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ k_3 \left[\frac{(k_2 + \Delta)}{\lambda^\theta} \Gamma(\theta, u\lambda) - \frac{1}{\lambda^{\theta+1}} \Gamma(\theta + 1, u\lambda) \right] + c_2 \right\}. \quad (4.22)$$

Impondo a condição inicial $N(0) = N_0$ e $u \rightarrow \Delta$ é possível determinar a constante de integração c_2 :

$$c_2 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} N_0 - k_3 \left[\frac{(k_2 + \Delta)}{\lambda^\theta} \Gamma(\theta, \Delta\lambda) - \frac{1}{\lambda^{\theta+1}} \Gamma(\theta + 1, \Delta\lambda) \right]. \quad (4.23)$$

Com o intuito de determinar N_0 , faz-se:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = 0 = \frac{(\rho_0 - \beta_{eff}^\varepsilon) N_0}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + \lambda \tilde{C}_0 - \frac{\xi N_0}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} + q_0, \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{d\tilde{C}}{dt} \right|_{t=0} = 0 = \frac{\beta_{eff}^\varepsilon N_0}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} - \lambda \tilde{C}_0. \quad (4.25)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (4.24) e (4.25), obtém-se a condição inicial:

$$N_0 = \frac{-q_0 \Lambda}{\rho_0 - \xi}, \quad (4.26)$$

de onde, finalmente pode-se obter a solução desejada:

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{(\Delta - t)^\theta} \left\{ k_3 \left[\frac{(k_2 + \Delta)}{\lambda^\theta} \Gamma(\theta, (\Delta - t)\lambda) - \frac{1}{\lambda^{\theta+1}} \Gamma(\theta + 1, (\Delta - t)\lambda) \right] + c_2 \right\} \quad (4.27)$$

$$c_2 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} \frac{q_0 \Lambda}{\xi - \rho_0} - k_3 \left[\frac{(k_2 + \Delta)}{\lambda^\theta} \Gamma(\theta, \Delta\lambda) - \frac{1}{\lambda^{\theta+1}} \Gamma(\theta + 1, \Delta\lambda) \right]$$

4.3 Obtenção de uma expressão sem funções especiais.

A função Gama $\Gamma(a)$ definida como

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad (4.28)$$

é uma função especial que pode ser considerada como uma extensão dos números fatoriais mediante a uma transformação. Para valores reais de a pode-se demonstrar isto conforme a seguir:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^a e^{-t} dt. \quad (4.29)$$

Fazendo

$$u = t^a \rightarrow du = at^{a-1} dt \quad (4.30)$$

e

$$dv = e^{-t} dt \rightarrow v = -e^{-t}, \quad (4.31)$$

e integrando por partes, obtém-se:

$$\int_0^b t^a e^{-t} dt = -t^a e^{-t} \Big|_0^b - \int_0^b -e^{-t} at^{a-1} dt = a \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt . \quad (4.32)$$

Substituindo (4.32) em (4.29), obtém-se:

$$\Gamma(a+1) = \lim_{b \rightarrow \infty} a \int_0^b t^a e^{-t} dt = a\Gamma(a), \quad (4.33)$$

o que pode ser escrito de uma forma geral como:

$$\begin{aligned} \Gamma(0+1) &= \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(1+1) &= \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ou seja:

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! . \quad (4.35)$$

Por se tratar de uma extensão dos números fatoriais, a função Gama normalmente é obtida por expansões em séries ou aproximações de outra natureza.

Contudo, para o caso apresentado na equação (4.27) as integrais são indefinidas, portanto neste caso a função Gama é chamada de incompleta.

Para simplificar a equação (4.27), pode-se reduzir a quantidade de função apresentadas, para isto, pode-se fazer uma substituição por partes obtendo-se a seguinte equação:

$$\Gamma(\theta, u\lambda) = e^{-u\lambda} \frac{u^\theta}{\theta} + \frac{\lambda}{\theta} \int e^{-u\lambda} u^\theta du = e^{-u\lambda} \frac{u^\theta}{\theta} + \frac{\lambda}{\theta} \Gamma(\theta+1, u\lambda) . \quad (4.36)$$

Isolando $\Gamma(\theta+1, \Delta\lambda)$ na equação (4.36) e substituindo na equação (4.27) obtém-se a seguinte expressão para $N(t)$:

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ k_3 \left[\frac{\Gamma(\theta, u\lambda)}{\lambda^\theta} \left(k_2 + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) - \frac{u^\theta \cdot e^{-\lambda u}}{\lambda^{\theta+1}} \right] + c_3 \right\} , \quad (4.37)$$

onde a constante de integração c_3 é dada por:

$$c_3 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} \frac{q_0 \Lambda}{\xi - \rho_0} - k_3 \left[\frac{\Gamma(\theta, \Delta\lambda)}{\lambda^\theta} \left(k_2 + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) + \frac{\Delta^\theta \cdot e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \right]. \quad (4.38)$$

A equação (4.37) representa uma solução analítica da equação diferencial que rege a densidade de nêutrons em um sistema subcrítico segundo as equações propostas por Silva (2011) considerando um grupo de precursores e variação linear de reatividade e fonte externa de nêutrons. Essa expressão apresenta a vantagem de possuir apenas uma função Gama incompleta em sua forma funcional.

Com o intuito de obter resultados rápidos e precisos, nesta dissertação utiliza-se a seguinte aproximação para o cálculo da função $\Gamma(a, x)$ (AMORE, 2005):

$$\Gamma(a, x) \approx \sum_{r=0}^R \sum_{i=0}^r \sum_{p=0}^i \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r) p!(r-i)!} (-1)^{r-i} (1+x)^{a-1-i} x^p. \quad (4.39)$$

Como se trata de um somatório, foram calculados termos para alguns valores de R . Primeiramente foi utilizado $R=1$, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\Gamma(a, x) \approx e^{-x} (1+x)^{a-1}. \quad (4.40)$$

Para a grande maioria das simulações realizadas, a utilização de $R=1$ no somatório apresentado na equação (4.39) é suficiente para a obtenção de soluções satisfatórias, e com isso, diversas análises podem ser realizadas mais facilmente. Porém, para alguns casos, foram utilizados grandes transientes e também devido a características do reator, verificou-se a necessidade de mais termos no somatório para algumas variações de reatividade específicas, chegando-se a $R=6$.

A nova expressão para o cálculo da função Gama Incompleta será denotada como:

$$Z(a, x) \equiv \sum_{r=0}^6 \sum_{i=0}^r \sum_{p=0}^i \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r) p!(r-i)!} (-1)^{r-i} (1+x)^{a-1-i} x^p. \quad (4.41)$$

Outras aproximações para a função Gama Incompleta foram estudadas, porém os valores apresentados se mostraram divergentes para determinados intervalos dos

parâmetros de a e x . Pode-se observar que softwares voltados para cálculos como o Maple e Origin, se utilizam de uma biblioteca externa para o cálculo da função Gama Incompleta (NAG, 2009), onde cada intervalo de dados, parâmetros a e x , são computados através de uma série diferente. Com isto, a aproximação de Amore (2005) se mostrou eficiente utilizando-se $R = 6$, abrangendo grande intervalo dos parâmetros a e x .

Uma validação do cálculo da função Gama Incompleta pela aproximação de Amore é apresentada na Tabela 5.

Tabela 5- Comparativo entre o valor tabelado da função Gama e o valor obtido para a aproximação de Amore (2005) para $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$ e $a = 2,555928461$

Tempo (s)	x	Gama tabelado	Aproximação Amore eq. (4.41)	Desvio %
0	14,74333	2,89E-05	2,89E-05	1,91E-06
10	12,54543	2,06E-04	2,06E-04	6,61E-06
20	10,34753	1,41E-03	1,41E-03	2,16E-05
30	8,149628	9,09E-03	9,09E-03	9,07E-05
40	5,951728	5,36E-02	5,36E-02	5,59E-04
50	3,753828	0,269780	0,269798	6,69E-03
60	1,555928	0,964329	0,967702	3,50E-01

Tabela 6 - Comparativo entre o valor tabelado da função Gama e o valor obtido para a aproximação de Amore(2005) para $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e $a = 16,55928457$

Tempo (s)	x	Gama tabelado	Aproximação Amore eq. (4.41)	Desvio %
0	28,74668	3,30E+10	3,30E+10	8,93E-02
10	26,54878	9,34E+10	9,32E+10	1,53E-01
20	24,35088	2,42E+11	2,41E+11	2,73E-01
30	22,15298	5,67E+11	5,64E+11	5,26E-01
40	19,95508	1,19E+12	1,17E+12	9,95E-01
50	17,75718	2,18E+12	2,13E+12	2,02
60	15,55928	3,47E+12	3,32E+12	4,29

Pode-se observar que o desvio máximo da aproximação proposta por Amore (2005) é de 4,3% em relação ao valor tabelado, referente ao valor encontrado para $t = 60s$ na Tabela 6.

Utilizando-se a aproximação mostrada na equação (4.41), é possível finalmente reescrever as equações (4.37) e (4.38) como:

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ k_3 \left[\frac{Z(\theta, u\lambda)}{\lambda^\theta} \left(k_2 + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) - \frac{u^\theta \cdot e^{-\lambda u}}{\lambda^{\theta+1}} \right] + c_4 \right\}, \quad (4.42)$$

onde,

$$c_4 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} \frac{q_0\Lambda}{\xi - \rho_0} - k_3 \left[\frac{Z(\theta, \Delta\lambda)}{\lambda^\theta} \left(k_2 + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) + \frac{\Delta^\theta \cdot e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \right]. \quad (4.43)$$

4.4 Comparação entre o método proposto e a metodologia proposta por Zhang et al, aplicado em sistemas subcríticos no intervalo $0 \leq t \leq t_0$

O objetivo desta seção é demonstrar que no limite em que $r_q \rightarrow 0$, ou seja, quando a fonte externa é constante, o método proposto neste artigo e a solução baseada na metodologia proposta por Zhang et al, (2008), equação (3.30), ambos no intervalo $0 \leq t \leq t_0$, são coerentes.

Para isto, pode-se reescrever a equação (4.42) explicitando-se a taxa de elevação da fonte externa de nêutrons r_q :

$$N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ \frac{\lambda r_q \Lambda}{r_\rho} \left[\frac{Z(\theta, u\lambda)}{\lambda^\theta} \left(\frac{\lambda q_0 + r_q}{\lambda r_q} + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) - \frac{u^\theta \cdot e^{-\lambda u}}{\lambda^{\theta+1}} \right] + c_4 \right\}, \quad (4.44)$$

onde,

$$c_4 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} \frac{q_0 \Lambda}{\xi - \rho_0} - \frac{\lambda r_q \Lambda}{r_\rho} \left[\frac{Z(\theta, \Delta\lambda)}{\lambda^\theta} \left(\frac{\lambda q_0 + r_q}{\lambda r_q} + \Delta - \frac{\theta}{\lambda} \right) + \frac{\Delta^\theta \cdot e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \right]. \quad (4.45)$$

Tomando o limite $r_q \rightarrow 0$ nas equações (4.44) e (4.45) obtém-se:

$$\lim_{r_q \rightarrow 0} N(t) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ \frac{\lambda \Lambda q_0}{r_\rho} \frac{Z(\theta, u\lambda)}{\lambda^\theta} + c_5 \right\}, \quad (4.46)$$

$$c_5 = \frac{\Delta^\theta}{e^{\lambda\Delta}} \frac{q_0 \Lambda}{\xi - \rho_0} - \frac{\lambda q_0 \Lambda}{r_\rho} \frac{Z(\theta, \Delta\lambda)}{\lambda^\theta}. \quad (4.47)$$

As equações (4.46) e (4.47) são válidas para o intervalo $0 \leq t < t_0$. Para o intervalo de tempo $t \geq t_0$ o procedimento é análogo ao anterior, descrito no item 3.4.1, pode ser adotado visto que não existe nenhuma variação de reatividade.

Para isto, é necessário fazer $t = t_0$ na equação (4.46), obtendo-se:

$$\lim_{r_q \rightarrow 0} N(t_0) = \frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ \frac{\lambda \Lambda q_0}{r_\rho} \frac{Z(\theta, (\Delta - t_0)\lambda)}{\lambda^\theta} + c_5 \right\}. \quad (4.48)$$

Agora, com a obtenção de $N(t_0)$, é possível substituir a equação (4.48) na equação (3.21), obtendo-se:

$$N(t) = -\frac{\lambda \Lambda_{eff}^\varepsilon q}{B} + \left[\frac{e^{u\lambda}}{u^\theta} \left\{ \frac{\lambda \Lambda q_0}{r_\rho} \frac{Z(\theta, (\Delta - t_0)\lambda)}{\lambda^\theta} + c_5 \right\} + \frac{\lambda \Lambda_{eff}^\varepsilon q}{B} \right] e^{\frac{B}{A}(t-t_0)}. \quad (4.49)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o cálculo analítico da densidade de nêutrons a partir do conjunto de equações da cinética pontual para sistemas subcríticos propostas por Silva (2011), equações (4.42) e (4.43). Para a validação da solução apresentada nesta dissertação, compara-se a solução de referência obtida através das equações (3.31) e (3.32) e a solução proposta nas equações (4.42) e (4.43). Os parâmetros cinéticos utilizados nas simulações podem ser encontrados na Tabela 1. Nas Tabelas 7 e 8 são apresentados os resultados obtidos para variação linear da fonte e da reatividade.

Tabela 7 – Comparação entre o método numérico e o método proposto para o coeficiente angular da fonte $r_q = 8264$ e 41322 ; reatividade $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$ e $R=1$, aproximação (4.40).

	$r_q=8264$			$r_q=41322$		
Tempo (s)	Método Numérico eq. (3.31) e (3.32) (nêutrons/s)	Método Proposto eq. (4.42) (nêutrons/s)	Desvio %	Método Numérico eq. (3.31) e (3.32) (nêutrons/s)	Método Proposto eq. (4.42) (nêutrons/s)	Desvio%
1	9,99	9,80	1,92	16,11	15,21	5,60
10	28,75	28,45	1,03	104,12	102,72	1,34
20	59,92	59,40	8,74E-01	250,42	247,96	9,81E-01
30	110,95	109,90	9,52E-01	489,85	484,90	1,01
40	208,30	205,65	1,27	946,62	934,21	1,31
50	459,61	449,59	2,18	2125,88	2078,84	2,21
60	2009,02	1887,59	6,04	9396,17	8826,37	6,06

Tabela 8 – Comparação entre o método numérico e o método proposto para o coeficiente angular da fonte $r_q = 8264$ e 41322 ; reatividade $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e $R=6$, aproximação (4.41).

	$r_q=8264$			$r_q=41322$		
Tempo (s)	Método Numérico eq. (3.31) e (3.32) (nêutrons/s)	Método Proposto eq. (4.42) (nêutrons/s)	Desvio %	Método Numérico eq. (3.31) e (3.32) (nêutrons/s)	Método Proposto eq. (4.42) (nêutrons/s)	Desvio %
1	92,15	91,89	2,87E-01	124,73	124,10	5,02E-01
10	215,34	213,84	6,95E-01	702,75	696,01	9,59E-01
20	440,21	436,47	8,50E-01	1757,90	1740,48	9,91E-01
30	785,32	776,05	1,18	3377,29	3333,86	1,29
40	1333,74	1310,62	1,73	5950,61	5842,18	1,82
50	2285,25	2219,11	2,89	10415,40	10105,08	2,98
60	4177,33	3955,53	5,31	19293,63	18252,91	5,39

Como uma segunda avaliação da solução proposta, equações (4.42) e (4.43), foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos pelo método de referência, equações (3.31) e (3.32), a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang et al,(2008), equação (3.30), e a solução proposta neste dissertação considerando o limite em que $r_q \rightarrow 0$, equação (4.46) e (4.49).

Pode-se observar na Figura 8 a comparação entre o método proposto, a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang e o método de referência para reatividade $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e fonte externa $q = 10^8$ nêutrons/s. O desvio relativo máximo referente à solução proposta foi de 7% em relação ao método de

referência, enquanto a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang apresentou desvio relativo máximo de 17%.

O mesmo pode ser constatado para a variação de reatividade $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$, conforme mostrado na Figura 9, onde o desvio relativo máximo referente à solução proposta foi de 1% em relação ao método de referência, enquanto a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang apresentou desvio relativo máximo de 4%.

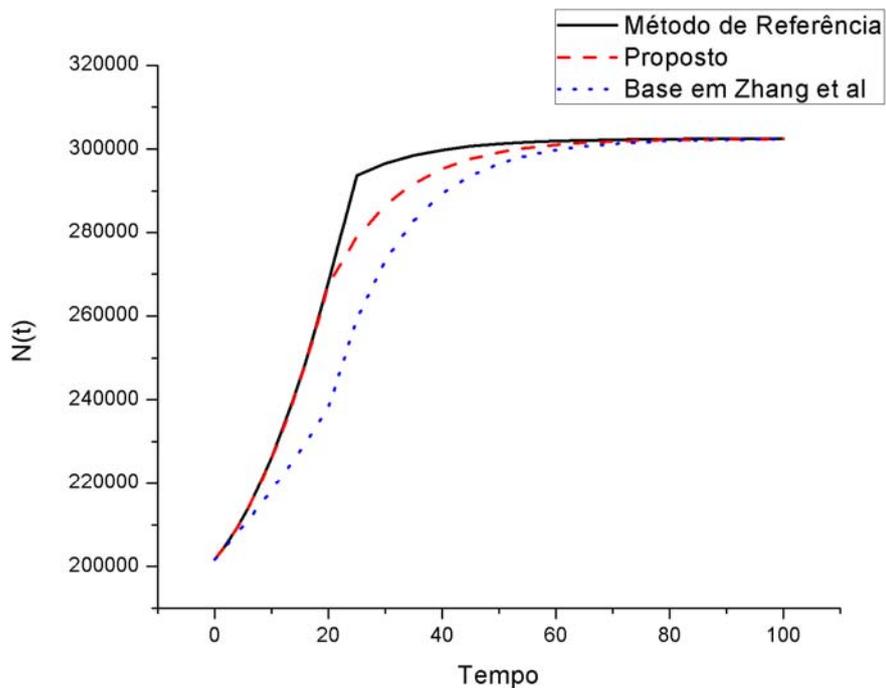


Figura 8- Comparação entre o método proposto, a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang e o método de referência para reatividade $\rho(t) = -0,006 + 0,0001t$ e fonte externa $q = 10^8$ nêutrons/s e $R=6$, aproximação (4.41).

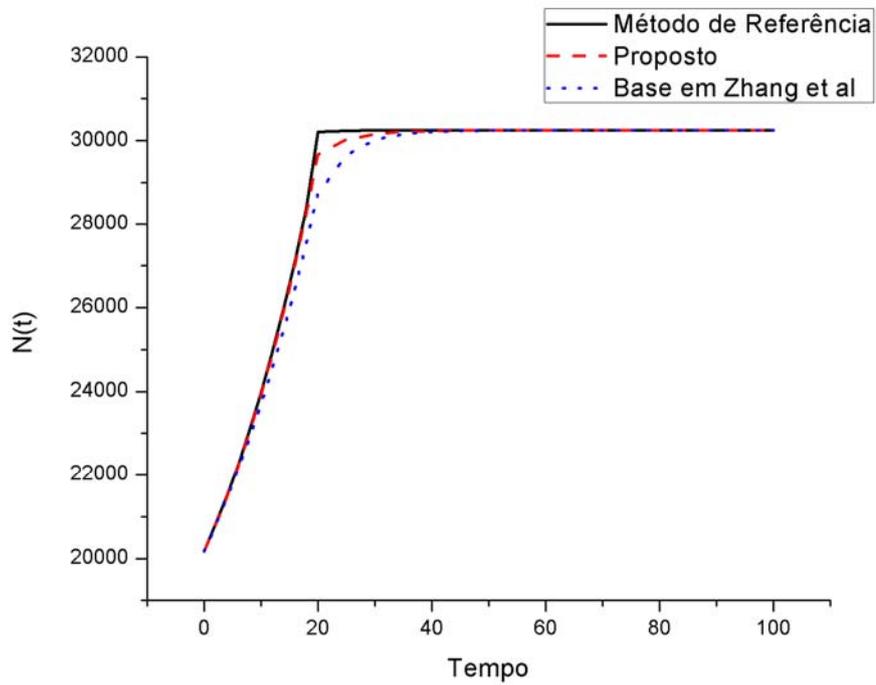


Figura 9- Comparação entre o método proposto, a solução obtida com base na metodologia proposta por Zhang e o método de referência para reatividade $\rho(t) = -0,06 + 0,001t$, fonte externa $q = 10^8$ nêutrons/s e $R=1$, aproximação (4.40).

6 CONCLUSÕES

A aproximação da função Gama se mostrou bastante útil para a realização dos cálculos e sua implementação em qualquer software pode ser realizada de uma forma muito simples, uma vez que sua expressão completa não possui nenhuma função especial para a obtenção de resultados.

Realizando uma comparação entre o método proposto com reatividade e fonte externa variando linearmente utilizando a aproximação para a função Gama e o método numérico, o desvio percentual máximo é inferior a 6% .

Comparando-se a metodologia de Zhang empregada a sistemas subcríticos e o método proposto nesta dissertação com o método de referência, pôde-se verificar que o método proposto apresentou resultados melhores se comparado com a solução obtida através da metodologia de Zhang, demonstrando ser bastante eficiente para o caso de reatividade linear e fonte externa constante.

Portanto, pode-se verificar que o método proposto nesta dissertação possui uma grande abrangência podendo ser aplicado para os casos de reatividade variando linearmente e fonte externa de nêutrons constante ou ambos variando linearmente. Isto vem a atender a uma necessidade da cinética de reatores ADS que possuem como principal mecanismo de controle da população de nêutrons a variação da intensidade da fonte externa.

A solução obtida, conforme as equações (4.42) e (4.43), com as aproximações das variações de reatividade e da fonte como sendo lineares são bastante razoáveis para aplicações práticas, tendo grande vantagem em relação aos métodos numéricos por não gastar grande tempo de CPU. A equação obtida possui também a vantagem de ter certa

flexibilidade na modelagem empregada para a variação da reatividade e da fonte externa.

Uma sugestão de trabalho futuro é a obtenção de uma solução da equação (3.11) utilizando-se as funções de Whittaker. Com isto, a aproximação realizada em (3.12) não seria necessária.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVIM, A.C. M , *Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear*. Ed. Certa, 1ed., Curitiba, PR.
- AMORE, P., 2005. “Asymptotic and exact series representations for the incomplete Gamma function”. *Europhysics Letters*. 71,p 1-7
- BOKOV, P. M., 2005, “Source reactivity as an extra kinetic characteristic of coupled-source subcritical systems”. *Annals of Nuclear Energy*. 32, 795-811
- DANTAS, V. *As lições de Fukushima*. In: ABEN, *REVISTA BRASIL NUCLEAR*, Ano 16, no. 38, 16 mai. 2012. Disponível em: <http://www.aben.com.br/publicacoes/brasil-nuclear/00000000030/as-lies-de-fukushima/00000000091>. Acesso em: 17 nov. 2012.
- DUDERSTADT, J.J.,HAMILTON, L.J.,1976, *Nuclear Reactor Analysis*. John Wiley and Sons, N.Y
- DULLA, S., RAVETTO, P., CARTA, M., D’ANGELO, A., 2006. “Kinetic Parameters for Source Driven Systems”. In: *International Conference on Physics of Reactor – PHYSOR 2006*, Vancouver, 10-14 September
- EPE,*Projeção da demanda de energia elétrica para os próximos 10 anos (2012-2021)*, NOTA TÉCNICA DEA 16/11, dez. 2011. Disponível em: http://www.epe.gov.br/mercado/Documents/S%C3%A9rie%20Estudos%20de%20Energia/20120104_1.pdf. Acesso em: 15 out. 2012.
- FIGUEIRA, A. J., 2009,*Potência Nuclear Aproximada para o Caso de Reatividade Linear e Métodos Alternativos de Solução da Equação da Cinética Pontual Inversa*, M.Sc. Dissertação, Programa de Engenharia Nuclear / COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil.
- GANDINI, A., SALVATORES, M., 2002. “The physics of subcritical multiplying systems”, *Nuclear Science and Technology*, 39, pp.673-686
- GRADSHTEYN, I. S., RYZHILK, I. M., 2008, “Tables of Integrals, Series, and Products”, *Academic Press Inc.*, New. York.
- HENRY, ALLAN F., 1975, *Nuclear Reactor Analysis* , 1ed. Cambrige, Mass, The MIT press
- MUKAIYAMA T., TAKIZUKA T., MIZUMOTO M., IKEDA Y., OGAWA T., HASEGAWA A., TAKADA H., TAKANO H., 2001. “Review of Research and Development of Accelerator-Driven System in Japan for Transmutation of Long-Lived Nuclides”. *Progress in Nuclear Energy*, 38, 107-134
- NEMES, G., 2007. “New asymptotic expansion for the $\Gamma(z)$ function”. *Stan’s Library Vol. II.*, p. 31

NISHIHARA, K., IWASAKI, T., UDAGAWA, Y., 2003. “A new static and dynamic one-point equation and analytic and numerical calculations for subcritical system”, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 481, pp.481-492.

NAG, The Numerical Algorithms Group. “*NAG Library Function Document*”. Oxford, UK. 2009. Disponível em: http://www.nag.co.uk/numeric/CL/nagdoc_cl09/xhtml/S/s14bac.xml#ref176. Acesso em: 15 dez. 2012

OriginLab. *Graphic Residual Analysis*. Disponível em: http://www.originlab.com/www/helponline/Origin/en/UserGuide/Graphic_Residual_Analysis.html. Acesso em 20 dez. 2012

RONDINELLI, F., KURAMOTO, E., ABEN, *Análise Comparativa das Alternativas Energéticas Quanto às Emissões Diretas e Indiretas de CO₂*. Disponível em: www.aben.com.br/uploads/energia/alternativas-energeticas.doc Acesso em: 9 out. 2012.

SCHICORR, W. M., 2001, “Assessments of the kinetic and dynamic transient behavior of sub-critical systems (ADS) in comparison to critical reactor systems” *Nuclear Engineering and Design*, 210, 95-123

SILVA, CRISTIANO, 2011, “*Uma Nova Função Importância para a Análise de Sistemas Subcríticos*”. D.Sc. Dissertação, Programa de Engenharia Nuclear / COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil.

ZHANG, F., CHEN, W.Z., GUI, X.W., 2008 . “Analytic method study of point-reactor kinetic equation when cold start-up”. *Annals of Nuclear Energy*. 35 , 746-749