

MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DA REATIVIDADE SEM O USO DA CONDIÇÃO DE CRITICALIDADE DO REATOR ANTES DA PARTIDA

Daniel Scal

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Aquilino Senra Martinez Fernando Carvalho da Silva

Rio de Janeiro Outubro de 2010

MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DA REATIVIDADE SEM O USO DA CONDIÇÃO DE CRITICALIDADE DO REATOR ANTES DA PARTIDA

Daniel Scal

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Antônio Garlos Marques Alvim, Ph.D. Prof. Antônio Carlos de Abreu Mol, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL OUTUBRO DE 2010 Scal, Daniel

Método alternativo para o cálculo da reatividade sem o uso da condição de criticalidade do reator antes da partida/Daniel Scal. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 76 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 73 - 76.

Cinética Pontual.
 Método Inverso.
 Método das Derivadas da Potência Nuclear.
 Palavra Chave.
 Aquilino Senra Martinez, *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear.
 III. Título.

Este trabalho é dedicado aos meus pais Celso Scal e Edna Luzia T. Scal por grande parte da minha formação como pessoa. E a Kelly por me acompanhar por este longo caminho.

Agradecimentos

Dedico este trabalho a Deus, pela oportunidade de realizar um sonho.

Aos professores Aquilino Senra Martinez e Fernando Carvalho da Silva pela ajuda, dedicação e orientação na realização deste trabalho.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico(CNPq) pelo suporte financeiro.

Agradeço aos meus pais pelo amor e carinho que dedicaram a mim e por sempre acreditarem nos meus sonhos e ideais.

À Oraide Filgueiras, sempre determinada em me ajudar, criando as condições necessárias de tranquilidade para a elaboração deste trabalho.

A todos os Amigos do Programa de Engenharia Nuclear e do Instituto de Física, pelo companheirismo e apoio.

Deixo um agradecimento especial e eterno à Kelly Ribeiro de Souza que sempre tem me incentivado e me dado todas as condições de obter sucesso. Pela paciência em suportar meu mau humor. Pelo carinho em ouvir minhas lamentações. Pela força que me sustenta e pelo amor que me renova. Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DA REATIVIDADE SEM O USO DA CONDIÇÃO DE CRITICALIDADE DO REATOR ANTES DA PARTIDA

Daniel Scal

Outubro/2010

Orientadores: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Programa: Engenharia Nuclear

Nesta dissertação é proposto um método alternativo para o cálculo da reatividade que não depende do histórico de potência nuclear e tampouco necessita assumir qualquer condição de criticalidade antes da partida do reator. Esta última aproximação foi largamente usada nos métodos existentes na literatura. O método proposto tem origem no método inverso da cinética pontual e permite representar a reatividade em termos das derivadas parciais de uma função dependente dos parâmetros cinéticos e da potência nuclear. Entre as vantagens desse novo método destacam-se a precisão e a simplicidade do cálculo da reatividade. A fração dos nêutrons retardados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons são considerados variáveis no tempo, possibilitando o cálculo contínuo da reatividade durante o ciclo de queima do combustível nuclear. Resultados de simulações numéricas demonstraram que o método proposto permite calcular a reatividade de forma precisa e rápida.

vi

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ALTERNATIVE METHOD FOR CALCULATING THE REACTIVITY WITHOUT USE THE CONDITION OF CRITICALITY BEFORE START THE NUCLEAR REACTOR

Daniel Scal

October/2010

Advisors: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva Department: Nuclear Engineering

This dissertation proposes an alternative method for calculating of reactivity that neither depends on the history of nuclear power nor assumes any criticality condition prior to the start of the reactivity calculation. This last approximation is largely used in the methods found in the literature. The method proposed originates in the point kinetics inverse method, and allows the representation of reactivity in terms of partial derivatives of a function depending on the kinetic parameters and on nuclear power. Amongst the advantages of this new method, the precision and simplicity in the calculation of reactivity stand out. The fraction of the delayed neutrons for each group of precursors and the mean neutron generation time are considered as variable in time, allowing the continuous calculation of the reactivity during the burnup cycle of the nuclear fuel. Results from numerical simulations have shown that the method proposed allows the calculation of reactivity in a precise and quick way.

vii

Sumário

Agradecimentos			V
Li	Lista de Figuras x		
Li	Lista de Tabelas xi		
1	Intr	odução	1
2	Equ	Equações da Cinética Pontual Inversa Clássica com a aproximação	
	de I	reator crítico	4
	2.1	Introdução	4
	2.2	A influência dos nêutrons atrasados no controle do reator	7
	2.3	Equações da Cinética Pontual	10
	2.4	Equação da Cinética Pontual Inversa	18
	2.5	Aproximação de reator crítico antes da partida	21
	2.6	Considerações finais sobre a cinética pontual	22
3 Método das derivadas da potência nuclear com o uso da condição			
de	e crit	icalidade antes da partida do reator	25
	3.1	Introdução	25
	3.2	Método das derivadas da potência nuclear	26
	3.3	Formulação para a reatividade pelo método das derivadas da potência	ι
		nuclear	30
4	4 Método das derivadas da potencia nuclear sem o uso da condição		

de criticalidade antes da partida do reator 34			
4.1 Introdução	34		
4.2 Cálculo da reatividade sem o uso da condição de criticalidade antes			
da partida do reator			
35			
4.2.1 Análise para n ímpar	36		
4.2.2 Análise para n par	38		
4.3 Novo formulação para a reatividade	41		
5 Método proposto com dependência temporal de β e Λ	43		
5.1 Introdução	43		
5.2 Equações da cinética pontual com depedência temporal de β e Λ	44		
5.3 Equação da cinética pontual inversa com depedência temporal de β e Λ	45		
5.3.1 Análise para n ímpar	47		
5.3.2 Análise para n par	50		
5.4 Novo formulação para a reatividade	53		
6 Resultados	55		
6.1 3 Método das derivadas da potência nuclear com o uso da condição			
criticalidade antes da partida do reator	55		
6.2 Método das derivadas da potencia nuclear sem o uso da condição			
de criticalidade antes da partida do reator	60		
6.3 Método proposto com dependência temporal de β e Λ	62		
7 Conclusões 71			
Referências Bibliográficas 7			

Lista de Figuras

2.1	Variação da potência nuclear sem nêutrons atrasados	6	
2.2	Esquema do decaimento do Br ⁸⁷	8	
2.3	Variação da potência nuclear com nêutrons atrasados	10	
6.1	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t} \dots \dots$	57	
6.2	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 + \omega t \dots$	58	
6.3	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 \cosh\left(\frac{\pi}{180}t\right)$	58	
6.4	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$ com		
	$\omega = 0,12353$	61	
6.5	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$ com		
	<i>ω</i> =11.6442	61	
6.6	Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$ com		
	$\omega = 52,80352$	62	
6.7	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
	exponencial com $\omega = 0,12353$	64	
6.8	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
	exponencial com $\omega = 11,6442$	65	
6.9	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
	exponencial com $\omega = 52,80352$	65	
6.10) Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
	trigonométrica $\eta = \frac{\pi}{180}$	66	
6.11 Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função			
	linear $\mu = 0,12353$	67	

6.12	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
1	$P(t) = 100 + senh(\alpha t) \operatorname{com} \alpha = 0,00127$	67	
6.13	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
1	$P(t) = P_0 + \xi t^3 \mod \xi = \frac{0.0127^5}{9}$	68	
6.14	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
е	xponencial com ω = 0,000022	69	
6.15	Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função		
tr	igonométrica com ω = 0,000022	69	

Lista de Tabelas

2.1	Constantes de decaimento médio e meia vida dos nêutrons atrasados	
	do U ²³⁵	9
2.2	Constantes de decaimento médio e meia vida dos nêutrons atrasados	
	do Pu ²³⁹	9
6.1	Tabela com os valores das constantes de decaimento e da fração dos	
	nêutrons atrasados para cada grupo de precursores	56
6.2	Tabela com o tempo de processamento para o cálculo da reatividade	59
6.3	Tabela com os valores do tempo médio de geração dos nêutrons no início e no fim	
	do ciclo	63
6.4	Tabela com os valores das constantes de decaimento para cada grupo	
	de precursores	63
6	.4 Tabela com os valores da fração dos nêutrons atrasados para cada	
	grupo de precursores no início e no fim do ciclo	64

Capítulo 1

Introdução

O modelo da cinética pontual, amplamente conhecido na literatura, é utilizado para o acompanhamento da evolução temporal do reator nuclear, devido à simplicidade de suas equações. A principal dificuldade deste método consiste em obter os parâmetros necessários para descrever o comportamento do reator. Mesmo assim, muitas características do comportamento dinâmico de um reator nuclear podem ser obtidas através das equações da cinética pontual. Além disso, essas equações fornecem uma ferramenta para a análise, a comparação e a aplicação prática de diversos métodos numéricos que podem ser eventualmente utilizados em situações mais complexas.

A reatividade ρ , que mede essencialmente o desvio da criticalidade, e que se encontra relacionada com o nível de potência do reator, é uma das propriedades mais importantes em um reator nuclear. Além da reatividade, o tempo de geração dos nêutrons prontos Λ e a fração efetiva de nêutrons atrasados β são também considerados parâmetros importantes para caracterizar o comportamento cinético do reator.

Durante a operação do reator nuclear, tem-se por objetivo manter a potência no núcleo do reator constante, ou seja, a taxa de produção via reação de fissão deve ser igual à taxa de perdas via reação de absorção e fugas. Neste caso, define-se que o reator está operando no regime estacionário, e portanto, crítico. Quando, por algum motivo, há uma variação nas taxas de produção ou de perdas, o reator passa a operar em um regime supercrítico ou subcrítico. No regime supercrítico, a taxa de produção é maior que a taxa de perda e, portanto, há um aumento na população de nêutrons e consequentemente há um aumento na potência do núcleo do reator. No regime subcrítico, a taxa de produção é menor que a taxa de perda e há um decréscimo da população neutrônica, o que causa uma diminuição do nível de potência do reator.

Dentre os mecanismos utilizados, em uma usina nuclear, para alterar as taxas de produção e de perda, podemos citar a movimentação da posição das barras de controle e da alteração da concentração de boro no refrigerante. Estes mecanismos são utilizados sempre que o reator se torna supercrítico ou subcrítico, com o objetivo do reator retornar a operar no regime crítico.

Portanto, desenvolver um método, rápido e preciso, para medir a reatividade em cada instante de tempo, durante a queima do combustível nuclear, é importante para o controle efetivo do reator.

O objetivo principal desta dissertação de mestrado é calcular a reatividade, pela equação da cinética pontual inversa, em um reator nuclear, sem que seja necessário conhecer o histórico da potência nuclear e sem utilizar a condição de criticalidade do reator antes da partida, para o ciclo de queima do combustível nuclear. Para tanto, será necessário modificar a proposta original do método das derivadas da potência nuclear [1].

No capítulo 2, a equação da cinética pontual inversa é obtida em seu formato clássico, de forma detalhada, a partir da equação da difusão monoenergética. Também é feita uma discussão sucinta sobre as limitações e sobre as aproximações utilizadas na obtenção da equação da cinética pontual inversa. Ao final do capítulo é feita uma breve discussão sobre as dificuldades para determinar os parâmetros nucleares e para resolver a equação da cinética pontual inversa numericamente.

No capítulo 3, é feita uma revisão sobre a nova formulação da equação da cinética pontual inversa usando o método das derivadas da potência nuclear, para seis grupos de precursores. Este método, que necessita apenas da primeira e da segunda derivadas da potência nuclear no tempo, não faz uso do histórico da potência nuclear. Por este motivo o cálculo da reatividade através deste método é consideravelmente mais rápido que o cálculo da reatividade pelos métodos tradicionais.

No capítulo 4, a reatividade será novamente calculada pela equação da cinética pontual inversa utilizando o método das derivadas da potência nuclear. Mas diferentemente da proposta original desse método, não será imposta a condição de críticalidade do reator antes da partida. A fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons serão consideradas constantes durante o ciclo de queima do combustível nuclear. O resultado obtido ao final do capítulo será comparado com a reatividade obtida, pela proposta original, quando é imposta à condição de criticalidade antes da partida do reator nuclear.

No capítulo 5, são realizadas duas importantes modificações na proposta original do método das derivadas da potência nuclear. A reatividade, neste capítulo, é calculada pelo método das derivadas da potência nuclear, sem utilizar a condição de críticalidade do reator antes da partida, e também considerando a variação temporal da fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores e do tempo médio de geração dos nêutrons a medida que o combustível nuclear é queimado.

No capítulo 6, são apresentados os resultados numéricos, para o cálculo da reatividade, obtidos utilizando os métodos desenvolvidos nos capítulos 3, 4 e 5.

No capítulo 7, são apresentadas, as conclusões relevantes desta dissertação.

Capítulo 2

Equações da Cinética Pontual Inversa Clássica com o uso da condição de criticalidade do reator antes da partida.

2.1 Introdução

O comportamento da potência nuclear e das concentrações dos precursores de nêutrons atrasados, dentro do núcleo do reator, pode ser descrito com boa precisão pelas equações da cinética pontual, com nêutrons atrasados e sem uma fonte externa de nêutrons.

Conhecer o comportamento do fluxo de nêutrons e da concentração dos precursores, no núcleo do reator, é importante para predizer as conseqüências de testes e acidentes envolvendo a mudança do fator de multiplicação e também para medir os parâmetros nucleares através de técnicas experimentais induzidas pela mudança do fluxo de nêutrons.

As equações que permitem a análise do comportamento da potência nuclear na dependência temporal são conhecidas como equações da cinética pontual. As

equações da cinética pontual são importantes para estudar as situações dinâmicas de um reator nuclear, pois elas são descritas por um modelo muito simples e eficiente, apesar das dificuldades de se obter os parâmetros nucleares. A partir do modelo da cinética pontual é possível obter uma resposta razoavelmente precisa sobre o comportamento da potência nuclear em função do tempo, exceto para algumas situações particulares como, por exemplo, uma brusca variação local do fluxo de nêutrons.

Uma variável importante na análise do comportamento dinâmico do reator é o número de nêutrons existentes no núcleo. Como a variação da potência nuclear é diretamente proporcional à variação do fluxo de nêutrons, a potência nuclear pode ser escrita como, [2]:

$$P(t) = \gamma v \Sigma_f N(t) \tag{2.1}$$

Onde:

 $\gamma \equiv$ energia média liberada em uma reação de fissão nuclear.

 $v \equiv$ velocidade média de cada nêutron.

- $\Sigma_f \equiv$ seção de choque macroscópica de fissão.
- $N(t) \equiv$ número de nêutrons em cada instante t.
- $P(t) \equiv$ potência nuclear no instante t.

Em um modelo simplificado, a variação temporal do número de nêutrons pode ser escrita de acordo com a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{k-1}{l}N(t)$$
(2.2)

Onde:

 $k \equiv$ fator de multiplicação, ou seja, é a razão entre a produção e a perda de nêutrons.

 $l \equiv$ tempo médio de vida dos nêutrons.

A equação (2.2) serve apenas para fornecer uma visão qualitativa da cinética do reator. A solução que se obtém resolvendo a equação (2.2), para a potência nuclear, é:

$$P(t) = P_0 e^{\frac{k-1}{l}t}$$
(2.3)

Na figura 2.1 é representada a variação temporal da potência nuclear para este modelo simplificado. Os parâmetros utilizados para uma variação temporal de t = 0,1s são I = 0,0001s e P₀ = 2200MW, para o reator operando no regime crítico, k = 1,0, para o reator no regime supercrítico k = 1,001 e para o reator operando no regime subcrítico k = 0,999.



Figura 2.1: Variação da potência nuclear sem nêutrons atrasados

Pela Figura 2.1 é evidente que se os resultados da equação (2.3) correspondessem à realidade, seria muito difícil controlar um reator que estivesse operando em um regime levemente crítico.

2.2 A influência dos nêutrons atrasados no controle do reator

Para se obter as equações da cinética de reatores, devem-se distinguir duas frações de nêutrons que nascem das fissões nos núcleos. A primeira fração de nêutrons surge no momento da fissão, sendo estes nêutrons denominados de nêutrons instantâneos. A segunda fração de nêutrons surge quando isótopos produzidos na fissão, também chamados de precursores, decaem sendo os nêutrons oriundos deste processo de decaimento chamados de nêutrons atrasados, [3]. Um exemplo típico do surgimento dos nêutrons atrasados no processo de fissão é o caso do decaimento do Br⁸⁷ mostrado na Figura 2.2, [2].

Na Figura 2.2, nota-se que a sequência de decaimento que conduz a emissão de um nêutron atrasado começa pela emissão de uma partícula beta do Br⁸⁷ transformando-o em Kr⁸⁷* seguido de um subsequente decaimento do Kr⁸⁷* para Kr⁸⁷ via emissão de um nêutron.

Há uma grande variedade de isótopos que decaem por emissão de nêutrons sendo, portanto, classificados como membros de uma família de precursores de nêutrons atrasados. Porém para modelar satisfatoriamente seus efeitos na cinética neutrônica, consideram-se seis grupos, agrupando-os de acordo com suas meiasvidas.



Figura 2.2: Esquema do decaimento do Br⁸⁷

O modelo de seis grupos de precursores foi inicialmente proposto em 1957 por Keepin, [4], e tornou-se um padrão por vários anos, sendo este modelo incorporado por diversas bibliotecas de dados nucleares. Resultados experimentais mostram que a abundâncias, e as constantes de decaimento dos nêutrons atrasados variam de isótopo para isótopo.

Alguns parâmetros de precursores típicos para seis grupos de precursores, estão representados nas tabelas 2.1 e 2.2 de acordo com a biblioteca de dados nucleares ENDF/B-IV, [5].

Os nêutrons atrasados representam aproximadamente 0,7% do número total de nêutrons no núcleo de um reator nuclear. A presença dos nêutrons atrasados aumenta consideravelmente o tempo de vida dos nêutrons no núcleo do reator, passando de $\langle t \rangle = 0,0001s$ para $\langle t \rangle = 0,1s$, e isto permite que o reator seja

efetivamente controlado. Na figura 2.3 fica evidente a influência dos nêutrons atrasados no controle do reator.

Tabela 2.1: Constantes de decaimento médio e meia vida dos nêutrons atrasados do U²³⁵

U^{235}		
Grupo de	Meia Vida(s)	Constante de
Precursores		decaimento $\lambda(s^{-1})$
1	54,51	0,0127
2	21,84	0,0317
3	6,00	0,115
4	2,23	0,311
5	0,496	1,40
6	0,179	3,87

Tabela 2.2: Constantes de decaimento médio e meia vida dos nêutrons atrasados do Pu²³⁹

Pu ²³⁹		
Grupo de	Meia Vida(s)	Constantes de
Precursores		decaimento $\lambda(s^{-1})$
1	53,75	0,0129
2	22,29	0,0311
3	5,19	0,134
4	2,09	0,331
5	0,549	1,26
6	0,216	3,21

O modelo da cinética pontual, considerando seis grupos de precursores, apresenta um resultado muito próximo à realidade. Esse modelo é deduzido a partir da equação da difusão, [2], com nêutrons atrasados e sem uma fonte externa de nêutrons, assumindo algumas hipóteses simplificadoras. Estas hipóteses serão discutidas posteriormente no final do capítulo.



Figura 2.3: Variação da potência nuclear com nêutrons atrasados

2.3 Equações da cinética pontual

O conjunto de equações que descreve a cinética do reator sem fonte externa de nêutrons e com seis grupos de precursores são,[2]:

$$\frac{1}{v(E)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},E,t) = \vec{\nabla}\cdot\left(D(\vec{r},E,t)\nabla\phi(\vec{r},E,t)\right) - \sum_{t}(\vec{r},E)\phi(\vec{r},E,t) + \int_{0}^{E_{max}}\sum_{s}(\vec{r},E'\to E)\phi(\vec{r},E',t)dE' + (1-\beta)\chi(E)\int_{0}^{E_{max}}v(E')\Sigma_{f}(E')\phi(\vec{r},E',t)dE' + \sum_{i=1}^{6}\chi_{i}(E)\lambda_{i}n_{i}(\vec{r},E,t)$$

$$(2.4)$$

е

$$\frac{\partial}{\partial t}n_i(\vec{r}, E, t) = \beta_i \int_{0}^{E_{\text{max}}} v(E') \Sigma_f(\vec{r}, E' \to E) \phi(\vec{r}, E, t) dE' - (2.5)$$
$$-\lambda_i n_i(\vec{r}, E, t) \qquad i = 1, 2, \dots, 6$$

Onde:

 $\phi(\vec{r}, E, t) \equiv$ fluxo de nêutrons.

 $n_i(\vec{r}, E, t) \equiv$ concentração de precursores de nêutrons atrasados do grupo i.

 $v(E) \equiv$ velocidade dos nêutrons.

 $D(\vec{r}, E, t) \equiv \text{coeficiente de difusão.}$

 $\Sigma_t(\vec{r}, E) \equiv$ seção de choque macroscópica total.

 $\Sigma_f(\vec{r}, E) \equiv$ seção de choque macroscópica de fissão.

 $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \equiv$ seção de choque macroscópica de espalhamento.

 $\beta \equiv$ fração total de nêutrons atrasados

 $\beta_i \equiv$ fração de nêutrons atrasados para cada grupo de precursores.

 $v \equiv$ número médio de nêutrons produzidos em uma fissão.

 $\chi_i(E) \equiv$ espectro de fissão dos nêutrons atrasados provenientes do grupo i.

 $\chi(E) \equiv$ espectro de fissão dos nêutrons prontos.

Considerando um meio homogêneo, ou seja, com os parâmetros nucleares $(D, \Sigma_t \Sigma_s, \nu \Sigma_f)$ não variando com a posição, as equações (2.4) e (2.5) assumem a seguinte forma:

$$\frac{1}{\nu(E)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},E,t) = D(E)\vec{\nabla}^{2}\phi(\vec{r},E,t) - \sum_{t}(E)\phi(\vec{r},E,t) + \int_{0}^{E_{max}}\sum_{s}(E' \to E)\phi(\vec{r},E',t)dE' + (1-\beta)\chi(E)\int_{0}^{E_{max}}\nu(E')\Sigma_{f}(E')\phi(\vec{r},E',t)dE' + \sum_{i=1}^{6}\chi_{i}\lambda_{i}n_{i}(\vec{r},E,t)$$

$$(2.6)$$

е

$$\frac{\partial}{\partial t}n_i(\vec{r}, E, t) = \beta_i \int_0^{E_{\text{max}}} \upsilon(E') \Sigma_f(E' \to E) \phi(\vec{r}, E', t) dE' -$$

$$-\lambda_i n_i(\vec{r}, E, t) \qquad i = 1, 2, \dots, 6$$
(2.7)

Considerando os nêutrons monoenergéticos, ou seja, eles possuem uma única velocidade, onde:

$$\Sigma_{s}(E' \to E) = \Sigma_{s}(E')\delta(E' - E)$$
(2.8)

е

$$\chi(E)\upsilon(E')\Sigma_f(E') = \upsilon\Sigma_f(E')\delta(E'-E)$$
(2.9)

As equações (2.6) e (2.7) tornam-se

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\cdot\left(D(\vec{r})\nabla\phi(\vec{r},t)\right) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) + (1-\beta)\upsilon\Sigma_f\phi(\vec{r},t) + \sum_{i=1}^6\lambda_i n_i(\vec{r},t)$$
(2.10)

е

$$\frac{\partial}{\partial t}n_i(\vec{r},t) = \beta_i v \Sigma_f \phi(\vec{r},t) - \lambda_i n_i(\vec{r},t); \qquad i = 1,2,\dots 6$$
(2.11)

Onde $\Sigma_a(E) = \Sigma_t(E) - \Sigma_s(E)$.

Um dos métodos para a obtenção das equações da cinética pontual admite que o fluxo de nêutrons $\phi(\vec{r},t)$ e a concentração dos precursores de nêutrons $n_i(\vec{r},t)$ possam ser escritos como funções separáveis tanto no tempo quanto no espaço, para então utilizar o método de separação de variáveis, [6,7]:

$$\phi(\vec{r},t) = vn(t)\psi(\vec{r}) \tag{2.12}$$

$$n_i(\vec{r},t) = \tilde{C}_i(t)\psi(\vec{r}) \tag{2.13}$$

e a equação de Helmholtz, [8]:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = -B_g^2 \psi(\vec{r}) \tag{2.14}$$

Onde: B_g^2 é reconhecido como sendo o buckling geométrico.

Substituindo as equações (2.12) e (2.13) na equação (2.10), obtém-se a seguinte equação:

$$\psi(\vec{r})\frac{d}{dt}n(t) - \sum_{i=1}^{6}\lambda_{i}\tilde{C}_{i}(t)\psi(\vec{r}) - (1-\beta)v\,\upsilon\Sigma_{f}n(t)\psi(\vec{r}) = -\Sigma_{a}vn(t)\psi(\vec{r}) + Dvn(t)\nabla^{2}\psi(\vec{r})$$
(2.15)

Dividindo ambos os lados da equação acima por $n(t)\psi(\vec{r})$:

$$\frac{1}{n(t)} \left[\frac{d}{dt} n(t) - \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \tilde{C}_i(t) \right] - (1 - \beta) v v \Sigma_f = -\Sigma_a v + \frac{D v \nabla^2 \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})}$$
(2.16)

Pela equação (2.14) a equação (2.16) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{n(t)} \left[\frac{d}{dt} n(t) - \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \tilde{C}_i(t) \right] - (1 - \beta) v \, \upsilon \Sigma_f = -\Sigma_a v - D v B_g^2 \tag{2.17}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n(t)} \left[\frac{d}{dt} n(t) - \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \tilde{C}_i(t) \right] - (1 - \beta) v v \Sigma_f + \Sigma_a v (1 + L^2 B_g^2) = 0$$
(2.18)

Onde L é definido como sendo o comprimento de difusão, [9].

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$$
(2.19)

Lembrando que l é o tempo de vida do nêutron no reator, [10], então:

$$l = \frac{1}{\nu \Sigma_a (1 + L^2 B_g^2)}$$
(2.20)

Tem-se que:

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[\frac{(1-\beta)l\,\upsilon\nu\Sigma_f - 1}{l}\right]n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \widetilde{C}_i(t)$$
(2.21)

Agora, substituindo as equações (2.12) e (2.13) na equação (2.11), obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{C}_{i}(t)\psi(\vec{r}) = \beta_{i}\upsilon\Sigma_{f}\upsilon n(t)\psi(\vec{r}) - \lambda_{i}\tilde{C}_{i}(t)\psi(\vec{r})$$
(2.22)

Definindo o fator de multiplicação como sendo:

$$k \equiv \frac{v \Sigma_f / \Sigma_a}{(1 + L^2 B_g^2)}$$

O tempo de geração médio entre o nascimento do nêutron e sua subseqüente absorção induzindo fissão, como sendo:

$$\Lambda \equiv \frac{l}{k}$$

Então, as equações (2.21) e (2.22) podem ser escritas como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\frac{k-1}{k} - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \widetilde{C}_i(t)$$
(2.23)

$$\frac{d\tilde{C}_{i}(t)}{dt} = \frac{\beta_{i}}{\Lambda}n(t) - \lambda_{i}\tilde{C}_{i}(t); \qquad i = 1, 2, \dots 6$$
(2.24)

Agora, definindo a reatividade como a medida essencial do desvio do fator de multiplicação efetivo da unidade, [2], e considerando a forma geral em que as concentrações variam com o tempo, tem-se que:

$$\rho(t) \equiv \frac{k(t) - 1}{k(t)}$$

Utilizando esta definição de reatividade, chega-se finalmente a um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas conhecidas como equações da cinética pontual.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \widetilde{C}_i(t)$$
(2.25)

е

$$\frac{d\tilde{C}_{i}(t)}{dt} = \frac{\beta_{i}}{\Lambda}n(t) - \lambda_{i}\tilde{C}_{i}(t); \qquad i = 1, 2, \dots 6$$
(2.26)

É fácil perceber que se os nêutrons atrasados não forem considerados, as equações da cinética pontual se reduzem a:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} n(t)$$
(2.27)

Definindo a potência nuclear como:

$$P(t) = \gamma v n(t) \tag{2.28}$$

e a contribuição dos nêutrons retardados para o nível de potência como:

$$C_i(t) = \gamma v \widetilde{C}_i(t) \tag{2.29}$$

Com base nas definições acima, as equações da cinética pontual adquirem a seguinte forma, [11-14]:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} P(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t)$$
(2.30)

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t); \qquad i = 1, 2, \dots 6$$
(2.31)

Esta é a forma clássica das equações da cinética pontual e uma análise destas equações revela que este é um sistema de sete equações diferenciais ordinárias e acopladas e que descrevem com excelente precisão a variação temporal da distribuição dos nêutrons e da concentração dos precursores dos nêutrons atrasados no núcleo do reator. Deve ser observado que a reatividade é uma função do tempo, ou seja, ela depende de vários parâmetros, como por exemplo: a composição do material e a temperatura, que variam com o passar do tempo. Em uma interpretação mais realista da situação física convém lembrar que a reatividade depende indiretamente da própria potência nuclear, uma vez que a temperatura também depende da potência.

As equações da cinética pontual, apesar de serem simples, não podem ser facilmente resolvidas por métodos numéricos usuais, exigindo técnicas mais sofisticadas para se obter soluções numéricas satisfatórias, [2]. Esta dificuldade se deve a grande diferença nas escalas de tempo dos parâmetros do sistema de equações (2.30) e (2.31). Estas diferenças estão relacionadas com o conceito de rigidez do sistema [15,16].

Apesar de suas limitações, as equações da cinética pontual fornecem, em uma quantidade razoável de casos, soluções analíticas ou numéricas passíveis de serem usadas para fins de controle do reator ou mesmo em pesquisa básica, sobretudo à resposta do reator mediante uma variação temporal da reatividade.

2.4 Equação da Cinética Pontual Inversa

No método direto da cinética pontual, a potência nuclear gerada no núcleo do reator é obtida através das equações da cinética pontual, assumindo que a reatividade é uma função conhecida. Já no método inverso, assumimos que a potência é uma função conhecida e calculamos a reatividade através da cinética pontual inversa.

Portanto, para obter a reatividade $\rho(t)$ em função da potência nuclear P(t), é necessário desenvolver o método da cinética pontual inversa, [17], assumindo que as condições iniciais para a potência nuclear e para a concentração dos precursores são:

$$P(t \le 0) = P_0 \tag{2.32}$$

е

$$C_i(t \le 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} P_0$$
(2.33)

Portanto, deve-se resolver o conjunto de equações (2.30) e (2.31) para a concentração de precursores em função da potência nuclear P(t). Um dos métodos utilizados para resolver a equação (2.31) é o método do fator integrante. Usando o método do fator integrante, multiplica-se a equação (2.31) por e^{λ_t} e realizando uma integração no tempo, encontra-se a seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{d}{dt} \left[C_i(t') e^{\lambda_i t'} \right] dt' = \int_{-\infty}^{t} \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t') e^{\lambda_i t'} dt'$$
(2.34)

Usando as condições iniciais dadas pelas equações (2.32) e (2.33) encontrase a concentração dos precursores, que pode ser escrita como:

$$C_{i}(t) = \frac{\beta_{i}}{\Lambda} \int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(2.35)

Substituindo a equação (2.35) na equação (2.30) é encontrada a seguinte expressão para a reatividade:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'$$
(2.36)

Sendo P⁽¹⁾(t) a derivada primeira da potência em relação ao tempo.

A equação (2.36), conhecida como equação da cinética pontual inversa, permite determinar a reatividade instantânea para uma conhecida variação da

potência nuclear e a integral do lado direito desta equação representa o histórico da potência nuclear.

Realizando a troca de variáveis, $\tau = t - t'$, a reatividade pode ser escrita como:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \int_0^\infty P(t-\tau) e^{-\lambda_i(\tau)} d\tau'$$
(2.37)

Definindo o kernel de nêutrons atrasados, [2], que representa a probabilidade de que um nêutron retardado deva ser emitido num tempo $d\tau$ seguindo um evento de fissão ocorrido em $\tau = 0$, como sendo:

$$D(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i e^{-\lambda_i \tau}$$
(2.38)

A equação da cinética pontual inversa pode ser escrita na seguinte forma:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{\beta}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \int_{0}^{\infty} D(\tau) P(t-\tau) d\tau'$$
(2.39)

A equação acima é a forma clássica da equação da cinética pontual inversa. Através do método inverso é possível obter uma resposta precisa do valor da reatividade em função do tempo, exceto nos casos em que ocorra uma brusca variação espacial do fluxo de nêutrons em um curto intervalo de tempo. Para contornar esse problema é necessário utilizar a equação da cinética espacial, porém a sua solução requer um tempo computacional muito maior do que o tempo computacional gasto na cinética pontual. Apesar de suas limitações, o modelo da cinética pontual é capaz de fornecer uma resposta satisfatória do ponto de vista físico.

2.5 Aproximação de reator crítico antes da partida

Vários métodos já foram propostos para resolver a equação da cinética pontual inversa, [18,19], mas em quase todos os métodos é necessário conhecer o histórico da potência nuclear. A dependência no histórico da potência ou da condição inicial da partida do reator surge naturalmente da obtenção da equação da cinética inversa.

A obtenção do histórico da potência nuclear antes da partida do reator é superada nos vários métodos propostos impondo a condição de criticalidade do reator antes da partida.

Portanto, impondo que $P(t \le 0) = \langle P_0 \rangle$ no intervalo de $-\infty \langle t \le 0$ a integral da equação (2.36) pode ser reescrita como sendo:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt' = \langle P_{0} \rangle \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt' + \int_{0}^{t} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(2.40)

Logo, a reatividade pode ser finalmente escrita da seguinte maneira:

$$\rho(t) = \beta(t) + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \left(\frac{\langle P_0 \rangle}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t P(t') e^{-\lambda_i (t-t')} dt' \right)$$
(2.41)

A expressão acima representa a reatividade através do método inverso da cinética pontual e ela pode ser utilizada para diversos fins em uma usina nuclear, como na realização dos testes físicos durante a partida do reator nuclear. A interpretação da resposta da reatividade à determinada variação temporal da potência nuclear pode nos fornecer importantes informações sobre o mecanismo de realimentação do reator.

2.6 Considerações finais sobre a cinética pontual

Ao considerar a equação da difusão como sendo monoenergética e com uma forma espacial e temporal independentes, limitamos o domínio de validade das equações da cinética pontual.

O efeito da dependência energética é mais nítido nos nêutrons atrasados, pois eles surgem com uma energia mais baixa que a dos nêutrons instantâneos. Logo, em um reator térmico, há uma maior probabilidade dos nêutrons atrasados induzirem uma fissão nuclear, em comparação aos nêutrons instantâneos. Conseqüentemente eles não necessitam ser moderados tanto quanto os nêutrons prontos.

Para separar o fluxo de nêutrons $\phi(\vec{r},t)$ em duas funções, espacial e temporal, independentes deve ser considerado que a forma espacial está no estado

fundamental. Porém, em situações reais, o modo espacial deve ser representado pela soma de todos os harmônicos. Se o reator está próximo do estado crítico ou de um período assintótico é comum utilizar a função espacial independente do tempo.

Considerando que a composição do núcleo do reator mude lentamente, devido a queima do combustível, pode-se calcular a criticalidade instantaneamente para o estado estacionário da função espacial, ainda que esta função deva mudar lentamente com o tempo. Mais preciso seria assumir que a forma do fluxo neutrônico é:

$$\phi(\vec{r},t) = vn(t)\psi(\vec{r},t)$$

Contudo, o modelo da cinética pontual também pode ser obtido diretamente da equação de transporte dependente do espaço e do tempo, aumentando o domínio de validade das equações da cinética pontual.

No desenvolvimento das equações da cinética pontual, foi considerado que a fração dos nêutrons atrasados e o tempo médio de geração dos nêutrons são constantes no tempo. De fato, se o tempo analisado for muito pequeno, da ordem de alguns minutos, a variação temporal de β , $\beta_i \in \Lambda$ não são significantes. Porém, para um tempo de análise mais longo, como por exemplo durante o ciclo de queima do combustível nuclear, esses parâmetros devem sofrer uma variação temporal significativa para o cálculo da reatividade.

Outro fato que deve ser ressaltado é em relação ao tempo de processamento do programa para o cálculo da reatividade através da equação da cinética pontual inversa. Para calcular a reatividade em um determinado instante t, necessitamos conhecer o histórico da potência nuclear no intervalo de 0 a t para efetuar a integral indicada no lado direito da equação (2.41). Se desejarmos avançar no cálculo da reatividade para o próximo instante, t + dt, vamos necessitar do histórico da potência neste novo intervalo de tempo, que vai de 0 até t + dt para realizar novamente o

cálculo da integral da equação(2.41). Isto implica que à medida que o programa vai avançando devemos conhecer o histórico da potência nuclear no intervalo considerado e sempre realizar uma nova integral no tempo para o cálculo da reatividade, ou seja, o tempo de processamento, mesmo para um curto intervalo de tempo se torna extremamente longo e muitas vezes inviável.

A aproximação de reator crítico elimina a necessidade de conhecer o histórico da potência nuclear antes da partida. Porém, esta aproximação pode provocar uma descontinuidade da potência em t=0 e consequentemente na reatividade. Além disso, esta aproximação provoca um erro no cálculo inicial da reatividade que pode perdurar por alguns segundos e dependendo dos valores dos parâmetros cinéticos pode ser extremamente alto. Este erro decresce com o tempo e, dependendo da função analisada, pode sofrer algumas oscilações, mas sempre desaparece quando o tempo analisado se torna suficientemente longo.
Capítulo 3

Método das derivadas da potência nuclear com o uso da condição de criticalidade antes da partida do reator

3.1 Introdução

Vários métodos já foram propostos para resolver o histórico da potência nuclear, [20-25], em muitos, a necessidade de conhecer o histórico antes da partida do reator apenas é superada impondo a condição de criticalidade do reator antes da partida A obtenção do histórico da potência nuclear também é superado pelo método das derivadas da potência nuclear, proposto por Suescún, et AL, [1]. O método das derivadas da potência nuclear possibilita o cálculo, numérico, da reatividade de forma muito mais rápida, uma vez que este método elimina a necessidade de "guardar" o histórico em todo o ciclo de queima do combustível nuclear.

Neste capítulo é apresentado o método das derivadas da potência nuclear para obter a solução da equação da cinética pontual. Esse método baseia-se na integração por partes da equação da cinética pontual inversa, tendo como resultado uma série de potências da potência nuclear em função da potência nuclear na dependência do tempo. Impondo algumas condições nas derivadas da potência nuclear e utilizando a aproximação de criticalidade antes da partida do reator, a reatividade é representada em termos das derivadas de primeira e segunda ordem desta potência nuclear.

3.2 Método das derivadas da potência nuclear

A equação que representa a reatividade através do método inverso da cinética pontual, com o uso da condição de criticalidade, é:

$$\rho(t) = \beta(t) + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \left(\frac{\langle P_0 \rangle}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t P(t') e^{-\lambda_i (t-t')} dt' \right)$$
(3.1)

Definindo,

$$I(t) \equiv \int_{0}^{t} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(3.2)

Utilizando o método de integração por parte, para integrar a equação acima, encontra-se que:

$$I(t) = \frac{1}{\lambda_i} P(t) - P(0) \frac{e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} \int_0^t P^{(1)}(t') e^{-\lambda_i (t-t')} dt'$$
(3.3)

Repetindo o processo de integração por partes n vezes, é obtida a seguinte expressão:

$$\int_{0}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - (-1)^{n+1} \frac{1}{\lambda_{i}^{n+1}} \int_{0}^{t} P^{(n+1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_{i}^{j+1}} P^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_{i}^{j+1}} P^{(j)}(0)e^{-\lambda_{i}t}$$
(3.4)

Onde P⁽ⁿ⁾(t) representa a enésima derivada da potência nuclear em relação ao tempo.

A função P(t) satisfaz às seguintes condições:

$$P^{(2j-1)}(t) = P^{(1)}(t) \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right]^{j-1}$$
(3.5)

$$P^{(2j)}(t) = P(t) \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right]^{j}$$
(3.6)

Onde $j \in N$ e

$$\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} = constante , \quad \forall \quad t$$
(3.7)

Estas condições são satisfeitas para algumas formas características de variação temporal da potência nuclear, como por exemplo: funções lineares, exponenciais e trigonométricas.

Se n é ímpar, então n + 1 é par, logo n + 1 = 2k, ou:

$$n = 2k - 1, \qquad k \in Z^+ \tag{3.8}$$

A integral da expressão (3.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{0}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = S_{i}(t) + S_{2}(t)$$
(3.9)

Onde,

$$S_{1}(t) \equiv \frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k}} \sum_{j=0}^{2^{k-1}} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_{i}^{j+1}} P^{(j)}(0) e^{-\lambda_{i}t}$$
(3.10)

$$S_{2}(t) \equiv -\frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k}} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_{i}^{j+1}} P^{(j)}(t)$$
(3.11)

O somatório da equação (3.11) pode ser escrito como:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_i^{j+1}} P^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^{2j+2}} P^{(2j+1)}(t) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^{2j+1}} P^{(2j)}(t)$$
(3.12)

Usando as condições (3.5) e (3.6) na equação acima, encontra-se:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_i^{j+1}} P^{(j)}(t) = \left[\frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_i^2} - \frac{P(t)}{\lambda_i} \right] \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_i^2 P(t)} \right]^j$$
(3.13)

Substituindo a equação (3.13) na equação (3.11), obtém-se:

$$S_{2}(t) = \frac{\frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} - \frac{P(t)}{\lambda_{i}}}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k}} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}P(t)}\right]^{j}$$
(3.14)

Como

$$\sum_{j=0}^{k} ar^{j} = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$
(3.15)

Onde r é a razão da soma geométrica. Sendo

$$|r| = \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_i^2}$$
(3.16)

E usando a equação (3.15) na equação (3.14) é encontrada a expressão para $S_2(t) \colon$

$$S_{2}(t) = \frac{P(t)\lambda_{i} - P^{(1)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(t)}P(t)$$
(3.17)

Realizando um procedimento análogo, obtém-se a seguinte expressão para $S_1(t) \label{eq:stable}$

$$S_{1}(t) = \frac{P(0)\lambda_{i} - P^{(1)}(0)}{P(0)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(0)}P(0)e^{-\lambda_{i}t}$$
(3.18)

Substituindo as equações (3.17) e (3.18) na equação (3.9):

$$\int_{0}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{P(0)\lambda_{i} - P^{(1)}(0)}{P(0)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(0)}P(0)e^{-\lambda_{i}t} + \frac{P(t)\lambda_{i} - P^{(1)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(t)}P(t)$$
(3.19)

Pode-se demonstrar, [26], que o resultado da integral não muda se n for um número par.

3.3 Formulação para a reatividade pelo método das derivadas da potência nuclear

A expressão final para a reatividade associada a uma variação de potência nuclear P(t) é:

$$\rho(t) = \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)} \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} \left[\frac{\lambda_{i} - \frac{P^{(2)}(t)}{P^{(1)}(t)}}{\lambda_{i}^{2} - \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}} \right] \right\} - \frac{P^{(1)}(0)}{P(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} e^{-\lambda_{i}t} \left[\frac{\lambda_{i} - \frac{P^{(2)}(t)}{P^{(1)}(t)}}{\lambda_{i}^{2} - \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}} \right] \right\} - (3.20) - \frac{\langle P_{0} \rangle}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} e^{-\lambda_{i}t} + \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} e^{-\lambda_{i}t}$$

Se no instante t = 0, <P₀> for igual a P(0), então os dois últimos termos da expressão acima se anulam. Porém, se essa igualdade não for verificada, então eles não se anulam e provocam um erro inicial no cálculo da reatividade. Devido ao fator de atenuação $e^{-\lambda_t}$ esse erro diminui com o passar do tempo, desaparecendo quando $t \rightarrow \infty$.

O termo $\frac{P^{(1)}(t)}{P(t)}$, que parece na equação acima, é conhecido como o inverso

do período do reator, [27].

Assumindo que $\langle P_0 \rangle = P(0)$, em t = 0, então a equação (3.20) pode ser simplificada, assumindo a seguinte forma:

$$\rho(t) \equiv \rho_1(t) + \rho_2(t) \tag{3.21}$$

Onde,

$$\rho_{1}(t) = \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)} \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} \left[\frac{\lambda_{i} - \frac{P^{(2)}(t)}{P^{(1)}(t)}}{\lambda_{i}^{2} - \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}} \right] \right\}$$
(3.22)

$$\rho_{2}(t) = -\frac{P^{(1)}(0)}{P(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} e^{-\lambda_{i}t} \left[\frac{\lambda_{i} - \frac{P^{(2)}(t)}{P^{(1)}(t)}}{\lambda_{i}^{2} - \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}} \right] \right\}$$
(3.23)

Nesta formulação, ρ_1 representa uma solução estacionária e é o valor da reatividade à potência atual. Em contrapartida, ρ_2 representa uma solução transiente que desaparece para tempos longos. Essa solução surge devido à imposição de reator crítico antes da partida, e representa o histórico da potência nuclear.

Pode ser demonstrado, após uma simples manipulação algébrica, que a equação (3.20) reduz-se à:

$$\rho(t) = \beta(t) + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \left[\frac{P^{(1)}(t) - P(t)\lambda_i}{P(t)\lambda_i^2 - P^{(2)}(t)} \right] - \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i e^{-\lambda_i t} \left[\frac{P^{(1)}(0) - P(0)\lambda_i}{P(0)\lambda_i^2 - P^{(2)}(0)} \right] - \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \beta_i e^{-\lambda_i t}$$
(3.24)

O terceiro termo do lado direito da equação (3.24) pode apresentar descontinuidades, para o caso de uma potência que não obedeça as condições dadas pelas equações (3.5) e (3.6). Para evitar estas descontinuidades, usa-se a condição dada pela equação (3.7), no caso particular em t = 0, para escrever a equação para a reatividade na seguinte forma:

$$\rho(t) = \Lambda \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)}(t) + \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} \left[\frac{\lambda_{i} P^{(1)}(t) - P^{(2)}(t)}{P(0)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(0)} \right] - \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_{i} \beta_{i} e^{-\lambda_{i} t} \left[\frac{P^{(1)}(0) - P(0)\lambda_{i}}{P(0)\lambda_{i}^{2} - P^{(2)}(0)} \right] - \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} e^{-\lambda_{i} t}$$
(3.25)

A equação (3.25) é facilmente calculada utilizando um método numérico, pois necessita apenas da primeira e segunda derivadas da função da potência nuclear.

Esta equação mostra que o cálculo da reatividade pode ser reiniciado, caso ocorra alguma interrupção. E para reiniciar o cálculo é necessário considerar que o tempo transcorrido é longo o suficiente para que a solução transiente desapareça. Neste caso, é possível que ocorra descontinuidades para as funções da potência nuclear que não satisfazem as condições dadas pelas equações (3.5) e (3.6).

Capítulo 4

Método das Derivadas da Potência Nuclear sem o uso da condição de criticalidade antes da partida do reator

4.1 Introdução

Como visto no capítulo anterior, o método das derivadas da potência nuclear elimina a necessidade de conhecer e guardar o histórico da potência durante todo o tempo. No entanto, a proposta original daquele método também faz uso da aproximação da condição de criticalidade antes da partida do reator.

Neste capítulo, será demonstrado que não há a necessidade de impor a condição de reator crítico antes da partida e que esta aproximação introduz um significativo erro no cálculo inicial da reatividade.

Como demonstrado no capítulo 2, as equações da cinética pontual são expressão pelas equações (2.30) e (2.31), de onde se pode facilmente obter a equação da cinética pontual inversa, expressa pela equação (2.36).

4.2 Cálculo da reatividade sem o uso da condição de criticalidade antes da partida do reator

De acordo com o método das derivadas da potência nuclear, [1], a integral do lado direito da equação da cinética pontual inversa, equação (2.36), pode ser resolvida por uma integração por partes,

$$\int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt' = \frac{P(t')}{\lambda_{i}} e^{-\lambda_{i}(t-t')} \bigg|_{-\infty}^{t} - \frac{1}{\lambda_{i}} \int_{-\infty}^{t} P^{(1)}(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(4.1)

Considerando que o tempo será um número finito, então:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' = \frac{P(t)}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} \int_{-\infty}^{t} P^{(1)}(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'$$
(4.2)

Resolvendo a integral acima usando novamente o método de integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{P(t)}{\lambda_{i}} - \frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} + \frac{1}{\lambda_{i}^{2}}\int_{-\infty}^{t} P^{(2)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.3)

Usando a integração por partes n vezes, encontra-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{P(t)}{\lambda_{i}} - \frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} + \frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{3}} - \frac{P^{(3)}(t)}{\lambda_{i}^{4}} + \dots - (-1)^{n+1}\frac{P^{(n)}(t)}{\lambda_{i}^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{i}^{n+1}}\int_{-\infty}^{t} P^{(n+1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.4)

Onde P⁽ⁿ⁾(t) representa a enésima derivada da potencia nuclear no tempo.

Escrevendo a equação (4.4) em uma forma mais compacta, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{i}^{n+1}} \int_{-\infty}^{t} P^{(n+1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.5)

Agora, deve-se novamente impor as condições expressas pelas equações (3.5), (3.6) e (3.7).

4.2.1 Análise para n ímpar

Se n é for ímpar, então n + 1 é par, portanto n + 1 = 2k, ou seja:

$$n = 2k - 1, \qquad k \in Z^+ \tag{4.6}$$

Logo, a equação (4.5) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{i}^{2k}} \int_{-\infty}^{t} P^{(2k)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.7)

Com isso, usando a condição expressa pela equação (3.6) na equação (4.7), obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{1}{\lambda_{i}^{2k}} \int_{-\infty}^{t} P(t') \left[\frac{P^{(2)}(t')}{P(t')} \right]^{k} e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.8)

Usando a condição (4.5):

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_{i}P(t)}\right]^{k} \int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1}\frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$
(4.9)

Após uma simples operação algébrica, a equação acima pode ser reescrita como sendo:

$$\left\{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_i P(t)}\right]^k\right\}_{-\infty}^t P(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}}$$
(4.10)

O somatório da equação (4.10) pode ser escrito como:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{P^{(2j+1)}(t)}{\lambda_i^{2j+2}} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{P^{(2j)}(t)}{\lambda_i^{2j+1}}$$
(4.11)

Usando as equações (3.5) e (3.6), encontra-se que o somatório assume a seguinte forma:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}} = \left[\frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_i^2} - \frac{P(t)}{\lambda_i}\right] \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_i^2 P(t)}\right]^j$$
(4.12)

Substituindo essa expressão na equação (4.10), resulta que:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{\frac{P^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} - \frac{P(t)}{\lambda_{i}}}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k}} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}P(t)}\right]^{j}$$
(4.13)

O lado direito da equação (4.13) pode ser reconhecido como uma progressão geométrica:

$$\sum_{j=0}^{k} ar^{j} = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$
(4.14)

Onde r é a razão da soma geométrica. Portanto, identificando a razão da soma geométrica na equação (4.13) como sendo:

$$|r| = \frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_i^2}$$
(4.15)

Logo, a equação (4.13) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_i(t-t')}dt' = \frac{P(t)\lambda_i - P^{(1)}(t)}{P(t)\lambda_i^2 - P^{(2)}(t)}P(t)$$
(4.16)

4.2.2 Análise para n par

Se n for par, então n + 1 é impar, então n + 1 = 2k - 1, portanto:

$$n = 2k - 2, \quad k \in Z^+$$
 (4.17)

Logo, a equação (4.5) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \int_{-\infty}^{t} P^{(2k-1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.18)

Usando condição (3.5), a equação (4.18) assume a seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \int_{-\infty}^{t} P^{(1)}(t') \left[\frac{P^{(2)}(t')}{P(t')}\right]^{k-1} e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(4.19)

E usando a condição (3.7), obtém-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' + \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}\right]^{k-1} \int_{-\infty}^{t} P^{(1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$
(4.20)

A integral da equação acima é obtida através da equação (4.2). Portanto, encontra-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}\right]^{k-1} \left[\lambda_{i}\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - P(t)\right] =$$

$$-\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$
(4.21)

Após uma simples manipulação algébrica, encontra-se a seguinte expressão:

$$\left\{ 1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{\lambda_i^2 P(t)} \right]^{k-1} \right\}_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' + \frac{P(t)}{\lambda_i^{2k-1}} \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right]^{k-1} = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}}$$
(4.22)

A integral da equação (4.22) pode ser escrita como sendo:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{j+1}\frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\frac{P(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}}\left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}\right]^{k-1}$$

$$(4.23)$$

Explicitando o último termo do somatório, isto é n = 2k - 2:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\sum_{j=0}^{2k-3}(-1)^{j+1}\frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\frac{P^{(2k-2)}(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}} - \frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\frac{P(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}}\left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)}\right]^{k-1}$$
(4.24)

Usando a hipótese que a potência nuclear satisfaz a condição expressa pela equação (3.6), a equação acima pode ser simplificada.

$$\int_{-\infty}^{t} P(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{k-1}}\sum_{j=0}^{2k-3}(-1)^{j+1}\frac{P^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$
(4.25)

Repetindo o mesmo procedimento adotado quando k é ímpar, obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{t} P(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' = \frac{P(t)\lambda_i - P^{(1)}(t)}{P(t)\lambda_i^2 - P^{(2)}(t)} P(t)$$
(4.26)

As equações (4.16) e (4.26) são iguais e este fato demonstra que a solução da equação (4.5) não depende se n é um número par ou ímpar.

4.3 Nova Formulação para a Reatividade

Como a solução da equação (4.5) não depende se n é par ou ímpar, pode-se substituir a equação (4.16) ou a equação (4.26) na expressão (2.36).

Logo, a reatividade pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} P^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \beta_i \left[\frac{P^{(1)}(t) - P(t)\lambda_i}{P(t)\lambda_i^2 - P^{(2)}(t)} \right]$$
(4.27)

Ou ainda como:

$$\rho(t) = \Lambda \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)}(t) + \sum_{i=1}^{6} \beta_i \left[\frac{\lambda_i P^{(1)}(t) - P^{(2)}(t)}{P(t)\lambda_i^2 - P^{(2)}(t)} \right]$$
(4.28)

Uma análise desta expressão revela que nela não há um termo em que o histórico da potência nuclear é guardado e, portanto, os termos do lado direito representam a potência do reator em tempo real. Comparando a equação (4.28) com a equação (3.25) percebe-se que nela não há o termo transiente indicando que a solução obtida sem impor a condição de reator crítico está mais próxima do valor real da reatividade quando o reator começa a operar.

Capítulo 5

Método proposto com dependência temporal de β e Λ

5.1 Introdução

Sabe-se que a composição do combustível nuclear não permanece constante durante o ciclo de operação do reator nuclear. Portanto, conhecer com rapidez e precisão a variação da reatividade à medida que o combustível é queimado é importante para otimizar a queima do combustível e melhorar a performance da central nuclear.

Neste capítulo, a reatividade será calculada a partir da equação da cinética pontual inversa para o ciclo de queima do combustível nuclear usando o método das derivadas da potência nuclear sem impor a condição de reator crítico antes da partida.

Além disso, será considerada a variação dependente da queima tanto da fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores quanto do tempo médio de geração dos nêutrons. Já as constantes de decaimento dos nêutrons de cada grupo de precursores serão consideradas constantes, pois suas variações, com o tempo de ciclo de operação são pouco significativas.

5.2 Equações da cinética pontual com depedência temporal de β e Λ

Diferentemente do que é suposto em grande parte da literatura existente, no método proposto será considerado que a fração dos nêutrons retardados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons são dependentes do tempo, ou seja, [9],[28]:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} P(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t)$$
(5.1)

$$\frac{dC_{i}(t)}{dt} = \frac{\beta_{i}(t)}{\Lambda(t)}P(t) - \lambda_{i}C_{i}(t), i = 1, 2, ..., 6$$
(5.2)

Usando o método do fator integrante, multiplicamos a equação (5.2) por $e^{\lambda_i t}$ e, após uma simples manipulação algébrica, integramos a equação resultante e encontramos a concentração dos precursores, que pode ser escrita como:

$$C_{i}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\beta_{i}(t')}{\Lambda(t')} P(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(5.3)

Substituindo a equação (5.3) na equação (5.1) encontramos a seguinte expressão para a reatividade:

$$\rho(t) = \beta(t) + \frac{\Lambda(t)}{P(t)} P^{(1)}(t) - \frac{\Lambda(t)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \int_{-\infty}^{t} F_i(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'$$
(5.4)

Sendo P⁽¹⁾(t) a primeira derivada da potência em relação ao tempo e por simplicidade convém definir que:

$$F_i(t') \equiv \frac{\beta_i(t')}{\Lambda(t')} P(t')$$

A expressão dada pela equação (5.4) representa a reatividade pelo método inverso considerando que a fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons agora são funções do tempo.

5.3 Equação da cinética pontual inversa com depedência temporal de β e Λ

De acordo com o método das derivadas da potência nuclear, [1], a integral do lado direito da equação (5.4) pode ser resolvida por uma integração por partes,

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{F_{i}(t')}{\lambda_{i}}e^{-\lambda_{i}(t-t')}\Big|_{-\infty}^{t} - \frac{1}{\lambda_{i}}\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.5)

Onde $F_i^{(1)}(t)$ representa a primeira derivada da função $F_i(t)$ em relação ao tempo.

Como a exponencial domina o primeiro termo do lado direito, e como o tempo é um número finito, então:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}} - \frac{1}{\lambda_{i}}\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.6)

Resolvendo a integral acima novamente usando a integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt' = \frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}} - \frac{F_{i}^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} + \frac{1}{\lambda_{i}^{2}} \int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(2)}(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(5.7)

Usando a integração por partes n vezes, encontra-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}} - \frac{F_{i}^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} + \frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{3}} - \frac{F_{i}^{(3)}(t)}{\lambda_{i}^{4}} + \dots - (-1)^{n+1}\frac{F_{i}^{(n)}(t)}{\lambda_{i}^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{i}^{n+1}}\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(n+1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.8)

Que pode ser escrita em uma forma mais compacta:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{i}^{n+1}} \int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(n+1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.9)

Onde $F_i^{(n)}(t)$ representa a enésima derivada da função $F_i(t)$ em relação ao tempo.

Agora, deve-se impor as seguinte condições sobre a função $F_i(t)$:

$$F_i^{(2j-1)}(t) = F_i^{(1)}(t) \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)} \right]^{j-1}$$
(5.10)

$$F_i^{(2j)}(t) = F_i(t) \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)} \right]^j$$
(5.11)

Onde $j \in N$.

$$\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)} = constante , \quad \forall \quad t$$
(5.12)

Estas condições são satisfeitas paras formas características da função $F_i(t)$, como por exemplo: funções exponenciais, lineares e trigonométricas.

Quando se consideram a variação temporal da fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores e do tempo médio de geração dos nêutrons a função F_i(t) não irá satisfazer as condições dadas pelas equações (5.10), (5.11) (5.12), entretanto, o método proposto poderá ser utilizado para realizar o cálculo da reatividade desde o raio de convergência da série geométrica seja menor que 1, ou

seja que
$$\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)\lambda_i^2} < 1.$$

Além disso, considerando que a fração dos nêutrons atrasados e o tempo médio de geração dos nêutrons variam linearmente e muito lentamente com o tempo, então as equações (5.10), (5.11) e (5.12) podem sem utilizadas.

5.3.1 Análise para n ímpar

Se n for ímpar, então n + 1 é par, portanto n + 1 = 2k, ou seja:

$$n = 2k - 1, \quad k \in z^+ \tag{5.13}$$

Logo, a equação (5.9) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{1}{\lambda_{i}^{2k}}\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(2k)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.14)

Com isso, usando a condição expressa pela equação (5.11) na equação (5.14), obtém-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{1}{\lambda_{i}^{2k}}\int_{-\infty}^{t}F_{i}(t')\left[\frac{F_{i}^{(2)}(t')}{F_{i}(t')}\right]^{k}e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.15)

Usando a condição (5.12):

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k}\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.16)

Após uma simples operação algébrica, a equação acima pode ser reescrita como sendo:

$$\left\{1 - \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{\lambda_i^2 F_i(t)}\right]^k\right\}_{-\infty}^t F_i(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' = -\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{F_i^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}}$$
(5.17)

O somatório da equação (5.17) pode ser escrito como sendo a soma de dois somatórios:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{F_i^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{F_i^{(2j+1)}(t)}{\lambda_i^{2j+2}} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{F_i^{(2j)}(t)}{\lambda_i^{2j+1}}$$
(5.18)

Usando as equações (5.10) e (5.11), encontra-se que o somatório do lado esquerdo assume a seguinte forma:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \frac{F_i^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}} = \left[\frac{F_i^{(1)}(t)}{\lambda_i^2} - \frac{F_i(t)}{\lambda_i} \right]_{j=0}^{k-1} \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)\lambda_i^2} \right]^j$$
(5.19)

Substituindo esse resultado na equação (5.17), resulta que:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{\frac{F_{i}^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}} - \frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}}}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k}} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{F_{i}(t)\lambda_{i}^{2}}\right]^{j}$$
(5.20)

O lado direito da equação (5.20) pode ser reconhecido como uma série geométrica.

$$\sum_{j=0}^{k} ar^{j} = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$
(5.21)

Onde r é a razão da soma geométrica. Portanto, identificando a razão da soma geométrica na equação (5.20) como sendo:

$$|r| = \frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)\lambda_i^2}$$
(5.22)

Logo, a equação (5.20) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{\lambda_{i}F_{i}(t) - F_{i}^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t) - F_{i}^{(2)}(t)}F_{i}(t)$$
(5.23)

5.3.2 Análise para n par

Se n for par, então n + 1 é impar, então n + 1 = 2k - 1, portanto:

$$n = 2k - 2, \quad k \in Z^+$$
 (5.24)

Logo, a equação (5.9) pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(2k-1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt'$$
(5.25)

Usando condição (5.10), a equação (5.25) assume a seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t') e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt' = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t') \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t')}{F_{i}(t')} \right]^{k-1} e^{-\lambda_{i}(t-t')} dt'$$
(5.26)

e usando a condição (5.12), obtém-se que:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' + \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{F_{i}(t)}\right]^{k-1} \int_{-\infty}^{t} F_{i}^{(1)}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = (5.27)$$
$$-\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$

A integral da equação acima é obtida através da equação (5.6). Portanto:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - \frac{1}{\lambda_{i}^{2k-1}} \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{F_{i}(t)}\right]^{k-1} \left[\lambda_{i}\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' - F_{i}(t)\right] = (5.28)$$
$$-\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$

Ou como:

$$\begin{bmatrix} 1 - \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{\lambda_i^2 F_i(t)}\right]^{k-1} \end{bmatrix} \int_{-\infty}^t F_i(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' + \frac{F_i(t)}{\lambda_i^{2k-1}} \left[\frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)}\right]^{k-1} = -\sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1} \frac{F_i^{(j)}(t)}{\lambda_i^{j+1}}$$
(5.29)

A integral da equação (5.29) pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}} \sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} - \frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}} \frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}} \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{F_{i}(t)}\right]^{k-1}$$
(5.30)

Explicitando o último termo do somatório, isto é n = 2k - 2,

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}}\sum_{j=0}^{2k-3}(-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}} + \frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}}\frac{F_{i}^{(2k-2)}(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}} - \frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}}\frac{F_{i}(t)}{\lambda_{i}^{2k-1}}\left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{F_{i}(t)}\right]^{k-1}}$$
(5.31)

Usando a hipótese de que a função $F_i(t)$ satisfaz a condição expressa pela equação (5.11), a equação acima pode ser simplificada:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = -\frac{1}{1 - \left[\frac{F_{i}^{(2)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t)}\right]^{k-1}}\sum_{j=0}^{2k-3}(-1)^{j+1}\frac{F_{i}^{(j)}(t)}{\lambda_{i}^{j+1}}$$
(5.32)

Repetindo o mesmo procedimento adotado quando k é ímpar, obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{t} F_{i}(t')e^{-\lambda_{i}(t-t')}dt' = \frac{\lambda_{i}F_{i}(t) - F_{i}^{(1)}(t)}{\lambda_{i}^{2}F_{i}(t) - F_{i}^{(2)}(t)}F_{i}(t)$$
(5.33)

As equações (5.23) e (5.33) são iguais e este fato demonstra que a solução da equação (5.9) não depende se n é par ou ímpar.

5.4 Nova Formulação para a reatividade

Como a solução da equação (5.9) não depende se n é par ou ímpar, pode-se substituir a equação (5.23) ou a equação (5.33) na expressão (5.4). Logo, a reatividade pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\rho(t) = \beta(t) + \Lambda(t) \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)} - \frac{\Lambda(t)}{P(t)} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\lambda_i F_i(t) - F_i^{(1)}(t)}{\lambda_i^2 F_i(t) - F_i^{(2)}(t)} F_i(t)$$
(5.34)

ou então como,

$$\rho(t) = \Lambda(t) \frac{P^{(1)}(t)}{P(t)} - \sum_{i=1}^{6} \beta_i \frac{F_i^{(2)}(t) - \lambda_i F_i^{(1)}(t)}{\lambda_i^2 F_i(t) - F_i^{(2)}(t)}$$
(5.35)

Uma análise desta expressão revela que nela também não há um termo em que o histórico da potência nuclear é guardado e, portanto, os termos do lado direito representam a potência do reator em tempo real. A equação (5.35) é muito semelhante à equação (4.28). Percebe-se que em ambas não há o termo transiente, que aparece na equação (3.25), indicando que a solução obtida sem impor a condição de reator crítico está mais próxima do valor real da reatividade quando o reator começa a operar.

Alguns pontos importantes que o novo método proposto apresenta podem ser destacados:

 Não há a necessidade de impor a condição de reator crítico antes da partida no cálculo da reatividade. Desta forma, eliminamos o erro provocado por esta aproximação e também podemos predizer com mais precisão o comportamento da população de nêutrons no núcleo do reator.

2. Pela expressão (5.35) a reatividade pode ser calculada continuamente em todo o intervalo de tempo analisado.

 O tempo de processamento do programa é reduzido consideravelmente, possibilitando desta forma o cálculo da reatividade em todo o ciclo de queima do combustível nuclear.

 A expressão proposta é extremamente simples de calcular numericamente, pois necessita apenas da primeira derivada da potência nuclear e da primeira e segunda derivadas da função F_i(t).

Esta nova formulação também permite que o cálculo da reatividade possa ser reiniciado após alguma interrupção, uma vez que não há a necessidade de guardar a informação sobre o histórico da potência nuclear, mesmo para tempos muito longos como o ciclo de queima do combustível nuclear.

54

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo, serão apresentados os resultados numéricos para o cálculo da reatividade utilizando o método proposto nesta dissertação conforme descrito nos capítulos anteriores.

6.1 Método das derivadas da potência nuclear com o uso da condição de criticalidade antes da partida do reator

A reatividade pode ser calculada numericamente para cada instante de tempo pela equação (3.1), mas para isto deve-se resolver uma integral no tempo. Esta integral pode ser facilmente resolvida por vários métodos de integração numérica. Por simplicidade escolhemos o método de integração de Simpson com intervalo de 0,01.

A reatividade calculada numericamente utilizando o método de integração de Simpson será usada como nosso método de referência. Desta forma, podemos analisar e comparar como a reatividade varia com o tempo, para cada uma das seguintes funções para a potência nuclear, que satisfazem as condições dadas pelas equações (3.5) e (3.6):

1. $P(t) = P_0 e^{\omega t}$ 2. $P(t) = P_0 + \omega t$

3.
$$P(t) = \cosh\left(\frac{\pi}{180}t\right)$$

Onde ω é a primeira raiz positiva da equação "Inhour" e P₀ = 1MW. Os valores das constantes de decaimento e da fração dos nêutrons atrasados são mostrados na Tabela 6.1, e o tempo de geração dos nêutrons prontos é igual a $\Lambda = 2 \times 10^{-5} s$. Para esse conjunto de parâmetros cinéticos o valor de ω é igual a 0,12353.

Tabela 6.1: Tabela com os valores das constantes de decaimento e da fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores

Grupo de	Constante de	Fração dos nêutrons
Precursores	decaimento λ_i (s ₋₁)	atrasados β_i
1	0,0127	0,000266
2	0,0317	0,001491
3	0,1150	0,001316
4	0,3110	0,002849
5	1,4000	0,000896
6	3,8700	0,000182

As Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 mostram a excelente precisão do método das derivadas da potência nuclear, comparado com o método tradicional, na qual o

histórico da potência nuclear é integrado numericamente. Além disto, o método das derivadas da potência nuclear diminui substancialmente o tempo computacional gasto no cálculo da reatividade, possibilitando desta forma o cálculo da reatividade por um período mais longo.

O método utilizado como referência para o cálculo da reatividade, que depende do histórico da potência nuclear, permite analisar apenas um curto intervalo de tempo, pois um tempo de análise ligeiramente mais prolongado torna o tempo de processamento do programa demasiadamente longo e inviável para, por exemplo, o cálculo da queima do combustível em um período de vida do elemento combustível completo, que é aproximadamente $3,15 \times 10^7 s$.



Figura 6.1: Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$.



Figura 6.2: Variação da reatividade para uma potência nuclear

 $P(t) = P_0 + \omega t \; .$



Figura 6.3: Variação da reatividade para uma potência nuclear

$$P(t) = P_0 \cosh\left(\frac{\pi}{180}t\right).$$

Já o Método das derivadas da Potência Nuclear permite fazer cálculos desta magnitude relativamente rápidos viabilizando experimentos e cálculos que antes eram inviáveis devido ao tempo de processamento do computador.

Na tabela 6.2 são mostrados os tempos gastos no cálculo numérico da reatividade pelo método tradicional e pelo método das derivadas da potência nuclear.

		Tempo(s)
Função da potência	Método	Método das derivadas
nuclear	Tradicional	da potência nuclear
$P(t) = P_0 e^{\omega t}$	600	1,56 × 10 ⁻²
$P(t) = P_0 + \omega t$	1026	1,56 × 10 ⁻²
$P(t) = P_0 \cosh\left(\frac{\pi}{180}t\right)$	937	1,56 x 10 ⁻²

TABELA 6.2 : Tabela com o tempo de processamento para o cálculo da reatividade

Comparando os dois métodos, percebe-se que pelo método das derivadas da potência nuclear o tempo é reduzido consideravelmente, possibilitando o cálculo da reatividade por um período mais prolongado.

6.2 Método das Derivadas da Potência Nuclear sem o uso da condição de criticalidade antes da partida do reator

Como mostrado no capítulo 4, não há a necessidade de impor a condição de criticalidade antes da partida do reator.

Nesta seção comparamos a reatividade calculada pelo Método das Derivadas da Potência Nuclear **com** a aproximação de reator crítico, dada pela equação (3.24), com a reatividade utilizando o Método da Derivada da Potência Nuclear **sem** a aproximação de reator crítico, expressa pela equação (4.30)

Usando os valores das constantes de decaimento e da fração dos nêutrons atrasados mostrados na Tabela 6.1, o tempo de geração dos nêutrons prontos é igual a $\Lambda = 2 \times 10^{-5} s$ e ω com valores iguais a 0,12353; 11,6442 e 52,80352. A função escolhida para potência nuclear será uma função exponencial $P(t) = P_0 e^{\omega t}$.

Observando as Figuras 6.4, 6.5 e 6.6, percebe-se que o erro inicial na reatividade provocado pela aproximação de reator crítico depende dos valores das constantes nucleares e quanto maior for o valor de ω , maior será o erro inicial, mas em contrapartida, o tempo para este erro desaparecer será muito menor.


Figura 6.4: Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$

com $\omega = 0,12353$.



Figura 6.5: Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$

com
$$\omega = 11.6442$$
.

De fato, é fácil notar que quando o tempo tende ao infinito, os resultados obtidos pelas equações (3.24) e (4.30) são os mesmos.

Este resultado mostra que a imposição da condição de criticalidade do reator antes da partida provoca um erro inicial no cálculo da reatividade. Outro fato que deve ser ressaltado é que quando não é imposta a condição de reator crítico, a função da reatividade passa a ser contínua em todo intervalo analisado.



Figura 6.6: Variação da reatividade para uma potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$

com $\omega = 52,80352$.

6.3 Método proposto com dependência temporal de βe Λ

Para validar o método proposto nesta dissertação, analisamos o comportamento da reatividade nos primeiros segundos após a partida do reator, dada pela equação (5.34) e comparamos com o resultado obtido pelo método de

referência dado pela equação (2.36) para varias formas diferentes da funções da potência nuclear. As constantes de decaimento, λ_i , a fração de nêutrons atrasados, β_i , e o tempo de geração dos nêutrons prontos, Λ , são os valores típicos de um reator PWR durante o ciclo de queima. Esses valores são apresentados nas Tabelas 6.3, 6.4 e 6.5.

Tabela 6.3: Valores do tempo médio de geração dos nêutrons no início e no fim do ciclo

	∧(s)	
Início do ciclo	1,8 x 10 ⁻⁵	
Fim do ciclo	2,3 x 10 ⁻⁵	

Tabela 6.4: Valores das constantes de decaimento para cada grupo de precursores

Grupo de Precursores	Constantes de decaimento $\lambda_i(s^{-1})$	
1	0,0128	
2	0,0316	
3	0,1213	
4	0,3220	
5	1,4030	
6	3,8594	

Nas Figuras 6.7, 6.8 e 6.9 são mostradas a variação da reatividade necessária para obter as variações da potência nuclear $P(t) = P_0 e^{\omega t}$, com ω iguais a 0,12353; 11,442 e 52,80352 que são as três primeiras raízes positivas da equação "Inhour".

Tabela 6.5: Valores da fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores no início e no fim do ciclo

	β _i	
Grupo de Precursores	Início do ciclo	Fim do ciclo
1	0,0196	0,0153
2	0,1249	0,1091
3	0,1128	0,0970
4	0,2419	0,2031
5	0,0898	0,0796
6	0,0219	0,0198



Figura 6.7: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função

exponencial com $\omega = 0,12353$.



Figura 6.8: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função

exponencial $\omega = 11,6442$.



Figura 6.9: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função

exponencial $\omega = 52,80352$.

Nas Figuras 6.10 e 6.11 a reatividade é calculada usando uma função trigonométrica $P(t) = P_0 \cosh(\eta t)$ e uma função linear $P(t) = P_0 + \mu t$,

respectivamente, para a potência. Onde $\eta = \frac{\pi}{180}$ e $\mu = 0,12353$. Pela análise dos gráficos, percebe-se novamente o erro no cálculo inicial da reatividade provocado pela aproximação de criticalidade, e o tempo necessário para que este erro desapareça.



Figura 6.10: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma

função trigonométrica
$$\eta = \frac{\pi}{180}$$
.

Nas Figuras 6.12 e 6.13 são apresentadas a variação da reatividade usando as funções $P(t) = 100 + senh(\alpha t)$ e $P(t) = P_0 + \xi t^3$. Nestas figuras, o erro provocado pela aproximação de reator crítico não aparece devido ao longo intervalo de tempo considerado.



Figura 6.11: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma

função linear $\mu = 0,12353$.



Figura 6.12: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função $P(t) = 100 + senh(\alpha t) \operatorname{com} \alpha = 0,00127.$



Figura 6.13: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma

função
$$P(t) = P_0 + \xi t^3 \text{ com } \xi = \frac{0.0127^5}{9}$$

Calculando agora a reatividade durante um ciclo de queima do reator, podemos comparar os casos onde a fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons são considerados constantes com o caso em que eles são considerados funções do tempo.

Na Figura 6.14 é mostrada a reatividade calculada utilizando uma função exponencial para a potência nuclear: $P(t) = P_0 e^{\omega t}$ com ω igual a 0,000022.

Pela Figura 6.14 percebemos que quando consideramos tanto a fração dos nêutrons atrasados para cada grupo de precursores quanto o tempo médio de geração dos nêutrons como funções do tempo, a reatividade decresce linearmente com o tempo ao invés de permanecer constante.



Figura 6.14: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função exponencial com $\omega = 0,000022$.

Um resultado semelhante ao apresentado na Figura 6.14 é mostrado na Figura 6.15 usando uma função trigonométrica $P(t) = P_0 \cosh(\eta t)$ para a potência nuclear.



Figura 6.15: Variação da reatividade em função do tempo, usando uma função trigonométrica com $\omega = 0,000022$.

Nas Figuras 6.14 e 6.15 o valor de ω é escolhido para que a função F_i(t) não divirja quando $t \rightarrow \infty$.

Apesar das funções $F_i(t)$ não satisfazerem as condições dadas pelas equações (5.14), (5.15) e (5.16), o método proposto pode ser utilizado para calcular a reatividade, pois a condição de convergência da série geométrica é satisfeita.

Capitulo 7

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um método alternativo para calcular a reatividade, utilizando a cinética pontual inversa durante o ciclo de queima do combustível nuclear, sem usar a condição de críticalidade antes da partida do reator.

O método proposto tomou como ponto de partida, uma nova análise dos trabalhos teóricos e experimentais dedicados ao estudo da reatividade determinada pelo método inverso das equações da cinética pontual. O método apresentado nesta dissertação tem origem na integração por partes do histórico de potência, resultando numa série de potências, na qual se impõe uma condição matemática e chega-se a uma expressão para a reatividade considerando de funções de bom comportamento para a potência nuclear.

O método proposto elimina a necessidade de impor a condição de criticalidade do reator antes da partida, eliminando com isso o erro no cálculo da reatividade provocados por essa aproximação. Ele também diminui substancialmente o tempo computacional gasto no processamento do cálculo da reatividade. Também não necessita do histórico da potência nuclear, porque a expressão final para o cálculo da reatividade depende apenas do valor instantâneo da potência nuclear e das derivadas de primeira e segunda ordem da função F_i(t),

71

que podem ser calculadas numericamente, por exemplo usado derivadas progressivas ou regressivas de cinco pontos ou com derivadas centradas, [29].

Os resultados obtidos evidenciam que para obter uma reatividade menos superestimada, durante o ciclo de queima do combustível nuclear, há a necessidade de que a fração dos nêutrons retardados para cada grupo de precursores e o tempo médio de geração dos nêutrons sejam considerados como dependentes do tempo.

Este método também permite reiniciar o cálculo da reatividade após alguma interrupção no funcionamento do reator, sem que haja qualquer perda de informação e com a mesma precisão que seria obtida caso o cálculo não fosse interrompido.

Uma limitação para este método se deve ao fato da função $F_i(t)$ satisfazer a condição de convergência da série geométrica isto é, o raio da série deve ser :

$$|r| = \frac{F_i^{(2)}(t)}{F_i(t)\lambda_i^2} < 1.$$

Referências Bibliográficas

[1] Suescún, D.D., Martinez, S.A., Da Silva, C.F., "Formulation for the calculation of the reactivity without nuclear history", J. Nucl.Sci. Technol., v.44, n.9, 2007.

[2] Duderstadt, J.J., Hamilton, L.J., "Nuclear Reactor Analysis", 1ed. John Wiley e Sons, 1976.

[3] Akcasu, A.Z., Lellouche, G.S., Shotkin, L.M. "Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics", New York, 1971.

[4] Keeping, G.R., et al., "Delayed Neutrons fron Fissionable Isotopes of Uranium, Plutonium and Thorium", Phys.Rev., 107, 1044, 1957.

[5] ENDF/B-IVSummary Documentation, "BLN-NCS-17451(ENDF-201)", 4th ed. (ENDF/B-VI), P.F. Rose, Ed., National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory(Release-8), 2000.

[6] Butkov, E., "Física Matemática" 1ed. LCT, 1988.

[7] Arfken, G.B., Weber, H.J., "Física Matemática", 6ed, Elsevier, 2007.

[8] Bell, G.I., Glasstone, S., "Nuclear Reactor Theory", 1ed. Van Nostrand Reinhold, 1970.

[9] Lamarsh, J.R., Baratta, A.J., "Introduction to Nuclear Engineering", 3ed, Prentice Hall, 2001.

[10] Meghreblian, R.V., Holmes, D.K., "Reactor Analysis", Mcgraw-Hill Book, 1960.

[11] Henry, A.F., "Nuclear Reactor Analysis", v. 4, Mit Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.

[12] Hertrick, David L., "Dynamics of Nuclear Reactor", 1ed. Chicago e Londres, The University of Chicago Press Ltda., 1971.

[13] Lewins, J., "Nuclear Reactor Kinetics and Control", Pergamon Press, 1ed, 1978.

[14] Ott, K.O., Neuhold, R.J., "Nuclear Reactor Dynamics", American Nuclear Society Officers, 1985.

[15] Sánchez, J., "On the Numerical Solution of the Point Reactor Kinetics
Equations by Generalized Runge-Kutta Methods", Nucl.Sci.Eng., v. 103, pp. 94-99,
1989.

[16] Pessanha, J.E., Paz, A.A., Portugal, C., "Técnicas de solução de sistemas de equações diferenciais e Algébricas: Aplicação em sistemas de Energia Elétrica", Revista Controle e Automação, v. 16, n. 3, pp. 359-372, 2005.

74

[17] Murray, R.L., Bingham, C.R., Martin, C.F., "Reactor kinetics analysis by inverse method", Nucl.Sci.Eng., v.18, pp481-490, 1964.

[18] Nóbrega, J.A.W., "A New Solution of the Point Kinetics Equations", Nucl.Sci.Eng., v. 46, pp 366, 1971.

[19] Matthew, K., Allen, E.J., "Efficient numerical solution of the point kinetics equation in nuclear reactor dynamics", v.31, pp. 1039-1051, 2004.

[20] Hoogenboom, J.E., Van der Sluijs, A.R., "Neutron source strength determination for on-line reactivity measurements", Ann. Nucl. Energy, v. 15, n. 12, pp. 553-559, 1988.

[21] Binney, S.E., Bkir, A.I.M., "Desing and development of a personal computer based reactivity meter for a nuclear reactor", Nucl. Technol, v.85, n.12, pp.12-21, 1989.

[22] Ansari, S.A., "Development of on-line reactivity meter for nuclear reactors", IEEE Trasactions on Nuclear Science, v.38, n.4, pp. 946-952, 1991.

[23] Kitano, A., Itagki, M., Narita, M., "Memorial-Index-Based Inverse Kinetics Method for Continuous Measurements of Reactivity and Source Strenght", J. Nucl.Sci. Techol., v. 37, pp. 53-59, 2000.

[24] Caro, R., "Física de Rectores Nucleares", 1ed. Madri, Seccion de Publicaciones de La J.E.N., 1976.

75

[25] Freitas, S.R., "Métodos Numéricos", Departamento de Computação e Estatística, UFMS, 2000.

[26] Suescún D.D., "Método para o cálculo da reatividade usando as derivadas da potência nuclear e o filtro FIR", D.Sc. Tese, Programa de Engenharia Nuclear/COPPE-UFRJ, 2007.

[27] Garg, S., Ahmed, F., Kothari, L.S., "Physics of Nuclear Reactors", Mcgraw-Hill Publishing Company. Nova Delhi, 1986.

[28] Tashakor, S., Jahanfarnia, M., Hashemi-Tilehnoee, M., "Numerical solution of the point reactor kinetics equations with fuel burn-up and temperature feedback", Annals of Nuclear Energy, v.37, pp. 265-269, 2010.

[29] Alvim, A.C.M., "Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear", Editora Certa, Curitiba, 2007.