



**COPPE/UFRJ**

ANÁLISE SISTEMÁTICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NEUTRONS  
UTILIZANDO A TEORIA DE UM GRUPO MODIFICADO DE ENERGIA

Eduardo Folco Capossoli

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientador(es): Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Rio de Janeiro

Maio de 2009

ANÁLISE SISTEMÁTICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS  
UTILIZANDO A TEORIA DE UM GRUPO MODIFICADO DE ENERGIA

Eduardo Folco Capossoli

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:

---

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

---

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

---

Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

---

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO de 2009

Capossoli, Eduardo Folco

Análise sistemática da equação da difusão de nêutrons utilizando a teoria de um grupo modificado de energia/  
Eduardo Folco Capossoli. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XI, 42 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 41-42

1. Método de diferenças finitas de malha Fina. 2. Equação da difusão de nêutrons. I. Silva, Fernando Carvalho da, et all. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

És um senhor tão bonito  
Quanto a cara do meu filho  
Tempo tempo tempo tempo  
Vou te fazer um pedido  
Tempo tempo tempo tempo...

Compositor de destinos  
Tambor de todos os ritmos  
Tempo tempo tempo tempo  
Entro num acordo contigo  
Tempo tempo tempo tempo...

Por seres tão inventivo  
E pareceres contínuo  
Tempo tempo tempo tempo  
És um dos deuses mais lindos  
Tempo tempo tempo tempo...

Que sejas ainda mais vivo  
No som do meu estribilho  
Tempo tempo tempo tempo  
Ouve bem o que te digo  
Tempo tempo tempo tempo...

Peço-te o prazer legítimo  
E o movimento preciso  
Tempo tempo tempo tempo  
Quando o tempo for propício  
Tempo tempo tempo tempo...

De modo que o meu espírito  
Ganhe um brilho definido  
Tempo tempo tempo tempo

E eu espalhe benefícios  
Tempo tempo tempo tempo...

O que usaremos prá isso  
Fica guardado em sigilo  
Tempo tempo tempo tempo  
Apenas contigo e comigo  
Tempo tempo tempo tempo...

E quando eu tiver saído  
Para fora do teu círculo  
Tempo tempo tempo tempo  
Não serei nem terás sido  
Tempo tempo tempo tempo...

Ainda assim acredito  
Ser possível reunirmo-nos  
Tempo tempo tempo tempo  
Num outro nível de vínculo  
Tempo tempo tempo tempo...

Portanto peço-te aquilo  
E te ofereço elogios  
Tempo tempo tempo tempo  
Nas rimas do meu estilo  
Tempo tempo tempo tempo...

Sula, pelo que é  
Lelê, Duda, pelo que serão  
Zilda e Oswaldo, pelo que foram  
Dedico a vocês.

## Agradecimentos

À pequena urso como diz a tatuagem, à Ursulinda, como os “dindos”, Vitor e Fabi, a chamam, ou simplesmente Sula, que embora não tenha chegado no início, estava aqui no final. Dando, sempre, seu apoio e sua confiança.

Aos orientadores, Prof. Fernando Carvalho da Silva e Prof. Aquilino Senra Martinez, que sempre me atenderam com extrema presteza e possibilitaram o término deste trabalho.

Ao meu irmão, meu amigo, meu “dindo” e MSc.Cassiano De Souza Guimarães, por tudo que representa a nossa amizade, pelas conversas intermináveis, “causos” e toda a ajuda na confecção deste programa computacional.

Ao meu amigo e professor, do observatório do Valongo, Prof. Alexandre de Oliveira Lyra, pelas conversas e orientações, uma das quais, hoje estou aqui.

À minha mãe, que desde o primeiro dia que ingressei no PEN, sempre me deu forças para finalizar mais esta etapa.

Aos funcionários do PEN que sempre me atenderam com gentileza e da melhor forma possível.

Ao colega de programa, DSc. Zelmo Rodrigues Lima, que nos momentos finais, me ajudou, também, com a programação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE SISTEMÁTICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NEUTRONS  
UTILIZANDO A TEORIA DE UM GRUPO MODIFICADO DE ENERGIA

Eduardo Folco Capossoli

Maio/2009

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva  
Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

O modo mais usual de se realizar o cálculo do fluxo neutrônico e, com isso, obter o fator de multiplicação efetiva,  $k_{\text{eff}}$ , de um reator nuclear, baseia-se na solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem que, nesse caso, é a já conhecida equação da difusão de nêutrons, na sua formulação de multigrupos de energia. Essa equação é uma aproximação para a equação de transporte de nêutrons, e será resolvida numericamente. A solução numérica mais comum é obtida utilizando o método das potências, método iterativo, que pode conter ou não mudanças, visando a uma maior aceleração no processo de convergência da solução. Soluções numéricas, apesar de fornecerem resultados com precisões muito boas, requerem um alto custo no que se refere ao tempo computacional despendido. O presente trabalho pretende trazer uma nova abordagem para o cálculo do fluxo neutrônico, baseada na análise sistemática, da teoria de difusão com um grupo modificado, que mesmo tendo uma solução numérica, obtêm-se com essa nova formulação uma redução, considerável, do tempo computacional envolvido e também a manutenção da precisão requerida para as soluções.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SYSTEMATICAL ANALYSYS OF THE MODIFIED ONE GROUP DIFFUSION  
THEORY

Eduardo Folco Capossoli

May/2009

Advisors: Fernando Carvalho da Silva  
Aquilino Senra Martinez.

Department: Nuclear Engineering

The most common way to calculate the neutron flux and get the effective multiplication factor,  $k_{\text{eff}}$ , a nuclear reactor, is based on numeric solution of a second rank partial differential equation, the well known, in this case, the neutron diffusion equation, in energy multigroups.

This equation is a approximation to he neutron transport equation be solve numerically. The most common numeric solution for the neutron diffusion equation is based on power method, iterative method, which may include changes aiming faster convergence in a solution process. Although numerical solutions to providing a satisfactory results with a good accuracy, require a high cost in reference to computer time. This present work aims to bring a new approach to neutrônico flux calculus, based on systematic analysis of the modified one group diffusion theory, that even take a numerical solution, we get, whit this new approach, a reduction, considerable, in the computational time involve also keeping the required accuracy for this solutions

# Índice

<b>Capítulo 1 – Introdução</b> .....	1
<b>Capítulo 2 – Descrição do problema</b> .....	5
2.1. Formulação a dois grupos de energia .....	5
2.2. Formulação a um grupo modificado .....	7
2.3. Discretização de equação de um grupo modificado de energia .....	8
2.4. Cálculo das correntes médias líquidas de nêutrons $\bar{J}_{gus}^{i,j}$ .....	12
2.5 Método das Potências, método polinomial de Chebyshev e SOR .....	18
2.5.1 Método das Potências .....	18
2.5.2 Método polinomial de Chebyshev .....	20
2.5.3 Successive over relaxation (SOR) .....	21
<b>Capítulo 3 – Apresentação dos <i>benchmarks</i></b> .....	22
3.1. Benchmark da Koebke .....	22
3.2. Benchmark Zion .....	23
3.3. Benchmark Biblis .....	25
3.4. Benchmark IAEA 2D .....	27
<b>Capítulo 4 – Apresentação e análise dos resultados obtidos</b> .....	29
4.1. Benchmark Koebke .....	30
4.2. Benchmark Zion .....	31
4.3. Benchmark Biblis .....	33
4.4. Benchmark IAEA 2D .....	35
4.5. Análise Geral .....	36
<b>Capítulo 5 – Conclusões</b> .....	39
5.1. Propostas para trabalhos futuros .....	40
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	41

## Índice de Figuras

Figura 2.2.1 – Representação esquemática do domínio.....	9
Figura 2.2.2 – Nodo genérico $n(i,j)$ e seus vizinhos nas direções X e Y .....	10
Figura 2.4.1 – Nodo $i, j$ e seu vizinho da esquerda.....	14
Figura 2.4.2 – Nodo $i, j$ e seu vizinho da direita .....	15
Figura 2.5.1.1 – Resumo do procedimento realizado pelo método das potências....	20
Figura 3.1.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de Koebke ..	22
Figura 3.2.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de Zion .....	24
Figura 3.3.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de Biblis .....	26
Figura 3.4.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de IAEA 2D.....	28
Figura 4.1.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark Koebke ....	31
Figura 4.2.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark Zion .....	32
Figura 4.3.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark Biblis.....	34
Figura 4.4.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark IAEA 2D ..	35

## Índice de Tabelas

Tabela 3.1.1 – Parâmetros nucleares do <i>benchmark</i> Koebke.....	23
Tabela 3.2.1 – Parâmetros nucleares do <i>benchmark</i> Zion.....	25
Tabela 3.3.1 – Parâmetros nucleares do <i>benchmark</i> Biblis.....	27
Tabela 3.4.1 – Parâmetros nucleares do <i>benchmark</i> IAEA 2D.....	28
Tabela 4.1.1 – Resultados computacionais para o benchmark de Koebk.....	30
Tabela 4.2.1 – Resultados computacionais para o benchmark Zion.....	32
Tabela 4.3.1 – Resultados computacionais para o benchmark de Biblis.....	33
Tabela 4.4.1 – Resultados computacionais para o benchmark de IAEA 2D.....	35

# Capítulo 1

## Introdução

A partir do rompimento com visão mítica, da explicação dos fenômenos da natureza, ou seja, sobre a “*Physis*”, surge de maneira, lenta e fascinante, um novo processo de construção de pensamento, que corresponde à origem e o florescimento da filosofia grega.

Dentre os vários temas abordados pela filosofia, destaca-se um, de particular interesse, que trata da essência e constituição da matéria.

Por volta do século VII a.C surge a “escola jônica”, fundadas por Tales, de Mileto, no litoral da Ásia menor. Os integrantes da escola jônica ocuparam-se basicamente de explicar a natureza física do mundo. Nesta época, o fogo, a água, o ar e a terra eram vistos como os quatro elementos primordiais do mundo. Um pouco mais tarde surgem na cidade de Abdera, Leucipo e seu colaborador Demócrito. Os dois criam a primeira idéia atomística da humanidade. Segundo Demócrito: “as únicas coisas que existem são os átomos e os espaços vazios entre eles; tudo o mais é mera opinião”. Esses átomos (sem divisão e eternos) seriam os blocos elementares de construção da matéria.

Vários séculos se passaram até o surgimento de John Dalton formulasse uma teoria atomística científica e não mais especulativa. A partir daí vários cientistas, tais como, Lavoisier, Gay-Lussac, Avogrado e outros, contribuíram para consolidação desta nova maneira de se pensar sobre o átomo. Esta etapa culmina com a elaboração da primeira tabela periódica dos elementos químicos, feita, em 1869, por Mendeleiev.

Apesar dos avanços na teoria atômica, também ao fim do século XIX, começa a desconstrução do átomo. O átomo deixa de indivisível, para ser formado por outras partículas, chamadas de partículas subatômicas. Em 1897, J.J Thomson, utilizando-se de experimento com ampolas de Crookes, descobre o elétron, medindo a relação entre a carga e a massa do elétron. Mais tarde valor da carga eletrônica foi medida experimentalmente por Milikan. Em 1886, Goldstein, com experimentos de raios

canais que eram desviados para uma placa negativa, a essa parte elementar dos raios canais chamou-se próton.

Em 1920, Rutherford, prevê a existência de partículas neutras, chamadas por ele de nêutrons, com a aproximadamente a mesma massa do próton, compondo o núcleo atômico, mas somente em 1932, Chadwick as obtém experimentalmente.

A partir dos trabalhos de Chadwick os físicos de partículas começam a se interessar por reações entre os nêutrons e os núcleos atômicos e surgiria, com isso, a possibilidade de se criar novos elementos químicos. Até que 1938 é descoberta a fissão nuclear, com os trabalhos de Otto Hahn e Lise Meitner.

Em 2 de Dezembro de 1942, na universidade de Chicago, o grupo liderado por Enrico Fermi constrói, com sucesso, o primeiro reator nuclear do mundo capaz de auto sustentar-se, ou seja, manter-se no estado crítico. O reator é conhecido pelo nome de *Chicago pile*.

Após a primeira fissão o número de fissões cresce exponencialmente, em um intervalo de tempo muito pequeno, liberando grande quantidade de energia. Devido a este fato deve-se controlar a população de nêutrons em um reator nuclear.

Cabe a física de reatores projetar reatores que mantenham a reação em cadeia, isto é auto-sustentáveis, bem como controlar a população de nêutrons no reator nuclear.

Um parâmetro importante na física de reatores é o conhecido fator efetivo de multiplicação,  $k_{\text{eff}}$ , que de uma maneira geral controla a população de nêutrons no reator nuclear. Basicamente o fator de multiplicação efetivo pode ser representado por uma razão entre o número de nêutrons produzidos pelo número de neutros absorvidos. Se esta razão é igual a um, dizemos que o reator está crítico, se esta razão é menor que um, dizemos que o reator está subcrítico, senão dizemos que o reator e supercrítico. Na prática projeta-se um reator supercrítico e a criticalidade é obtida e mantida artificialmente com a inserção de barras absorvedoras de nêutrons, chamadas de barras de controle.

Outro parâmetro importante na física de reatores é o fluxo de nêutrons no núcleo do reator nuclear, pois este nos informa onde estão ocorrendo, mais ou menos fissões nucleares. Por fim, outro parâmetro importante, também, é a distribuição de potência de um reator nuclear, uma vez que é do interesse da física de reatores construir reatores que possam ser utilizados na produção de energia, de forma segura, e limpa, que é tão demandada no mundo atual.

Uma das formas de se realizar o cálculo do fluxo de nêutrons e, com isso, obter o fator de multiplicação efetivo, do núcleo de um reator nuclear, baseia-se na solução da equação da difusão de nêutrons, na sua formulação de multigrupos de energia. Esta é uma aproximação para a equação de transporte de nêutrons, e mesmo sendo uma aproximação, será resolvida numericamente. A solução numérica mais comum é obtida utilizando o método iterativo das potências [1,2], para as iterações externas e S.O.R (*Successive Over Relaxation*) [3,4,5], para as iterações internas. Soluções numéricas, obtidas a partir de métodos iterativos, apesar de fornecerem resultados com precisões muito boas, requerem um alto custo no que se refere ao tempo computacional despendido no processo, neste caso o método de malha fina (diferenças finitas). O presente trabalho apresenta uma nova abordagem para o cálculo do fluxo de nêutrons, baseada na análise sistemática, da teoria de difusão na formulação de um grupo modificado [6]. Um fator bastante motivador para esta proposta é não haver na literatura nenhuma análise sistemática para esta formulação, aumentando assim a expectativa sobre uma comprovação, ou não, da sua validade.

Mesmo envolvendo um processo iterativo, para o cálculo da solução numérica da equação em questão, pode-se obter com esta formulação uma redução considerável no tempo computacional envolvido e ainda manter uma boa precisão na obtenção tanto do fluxo de nêutrons, conseqüentemente na distribuição de potência do reator, quanto do fator de multiplicação efetivo. Soluções da equação da difusão de nêutrons, na formulação de um grupo modificado, podem ser bastante úteis, por exemplo, em cálculos de modelos de recarga de reatores nucleares, que consomem muito tempo de computação devido ao repetido número de cálculos do fluxo de nêutrons que se fazem necessários.

Existe atualmente um código computacional, código ROSA, [11], que utiliza esta aproximação para grupo modificado, porém, esta aproximação ainda não foi utilizada para projetos de núcleos de reatores

No capítulo 2 será apresentado a descrição do problema e como será obtida a equação da difusão de nêutrons para um grupo modificado ou, também, um grupo e meio de energia ( $1+1/2G$ ), como porventura poderá ser chamada. Além disso, neste capítulo será mostrada a discretização da mesma equação

No capítulo 3 serão apresentados os modelos *benchmarks* que foram usados como referências para este trabalho, assim como uma breve descrição de cada um deles, além da sua configuração nuclear e seus parâmetros nucleares

No capítulo 4, apresentamos os resultados numéricos obtidos com esta formulação e a análise desses resultados e no capítulo 5 apresentamos as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Descrição do problema

Este trabalho consiste em analisar, de forma sistemática, a solução da equação da difusão na formulação de um grupo modificado, independente do tempo, para duas dimensões em geometria retangular cartesiana e, para tal, foram utilizados quatro modelos benchmarks encontrados na literatura [7-10]. As soluções obtidas com a formulação de um grupo modificado foram comparadas às soluções alcançadas utilizando a formulação a dois grupos de energia, que neste caso são as soluções de referência. A equação da difusão de um grupo modificado é obtida desprezando o termo de fuga de nêutrons do grupo térmico, ou seja, do grupo dois de energia, criando com isso um desacoplamento das equações da formulação de dois grupos de energia. Observa-se que esta aproximação só poderá ser feita caso a razão entre as taxas de fuga e absorção seja muito menor que 1[6]. Sendo válida a hipótese de que a fuga de nêutrons do grupo térmico é desprezível passamos a ter, ao invés de duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, uma única equação diferencial parcial de segunda ordem.

### **2.1. Formulação a dois grupos de energia**

A equação da difusão de nêutrons na formulação de dois grupos de energia em geometria cartesiana bidimensional, sem *upscattering*, independente do tempo, pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_1(x, y)) + \Sigma_{R1}(x, y)\phi_1(x, y) = \\
& = \frac{1}{k_{eff}}[\nu\Sigma_{f1}(x, y)\phi_1(x, y) + \nu\Sigma_{f2}(x, y)\phi_2(x, y)]
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x}(D_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_2(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(D_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_2(x, y)) + \Sigma_{R2}(x, y)\phi_2(x, y) = \\
& = \Sigma_{21}(x, y)\phi_1(x, y)
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Sendo os subscritos numéricos 1 e 2 os grupos de energia, respectivamente grupo rápido e grupo térmico,  $\phi_g$  o fluxo de nêutrons do grupo  $g$  de energia,  $D_g$  o coeficiente de difusão do grupo  $g$  de energia,  $\Sigma_{Rg}$  a seção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$  de energia,  $\Sigma_{ag}$  a seção de choque macroscópica de absorção do grupo  $g$  de energia,  $\nu\Sigma_{fg}$  a seção de choque macroscópica de fissão multiplicada pelo número médio de nêutrons emitidos por fissão, sendo, em média, emitido 2 nêutrons por fissão, do grupo  $g$  de energia,  $\Sigma_{21}$  a seção de choque macroscópica representando o espalhamento do grupo 1 para o grupo 2 e  $k_{eff}$  o fator de multiplicação efetivo.

Tem-se ainda que:

$$\Sigma_{R1}(x, y) = \Sigma_{a1}(x, y) + \Sigma_{21}(x, y) + D_1(x, y)B_z^2 \tag{2.1.3}$$

e

$$\Sigma_{R2}(x, y) = \Sigma_{a2}(x, y) + D_2(x, y)B_z^2 \tag{2.1.4}$$

A equação (2.1.4) se deve ao fato, que já fora mencionado, de não haver *upscattering*.

## 2.2. Formulação a um grupo modificado

A partir das equações (2.1.1) e (2.1.2) será formulada a equação para um grupo modificado, que também poderá ser chamada de um grupo e meio de energia.

Fazendo a hipótese que o termo de fuga térmica

$$-\frac{\partial}{\partial x}(D_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_2(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(D_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_2(x, y)) \quad (2.2.1)$$

é desprezível, então da equação (2.1.2) obtém-se que

$$\Sigma_{a2}(x, y)\phi_2(x, y) = \Sigma_{21}(x, y)\phi_1(x, y) \quad (2.2.2)$$

ou seja,

$$\phi_2(x, y) \cong \frac{\Sigma_{21}(x, y)}{\Sigma_{a2}(x, y)}\phi_1(x, y) \quad (2.2.3)$$

que é, justamente, a equação para o fluxo no grupo térmico nesta formulação.

Substituindo a equação (2.2.3) em (2.1.1), teremos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_1(x, y)) + \Sigma_{r1}(x, y)\phi_1(x, y) = \\ & = \frac{1}{k_{eff}}[\nu\Sigma_{f1}(x, y) + \nu\Sigma_{f2}(x, y)\frac{\Sigma_{21}}{\Sigma_{a2}}]\phi_1(x, y) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ou, então,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}(D_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\phi_1(x, y) + \Sigma_{R1}(x, y)\phi_1(x, y) = \\
& \frac{1}{k_{eff}}\hat{\Sigma}_f(x, y)\phi_1(x, y)
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

que é a equação da difusão para um grupo modificado, ou um grupo e meio de energia, onde:

$$\hat{\Sigma}_f(x, y) \equiv \nu\Sigma_{f1}(x, y) + \nu\Sigma_{f2}(x, y)\frac{\Sigma_{21}(x, y)}{\Sigma_{a2}(x, y)} \tag{2.2.6}$$

### 2.3. Discretização da equação de um grupo e meio de energia

A equação (2.2.5) é a equação da difusão de nêutrons bidimensional (2D), em geometria retangular cartesiana, a um único grupo de energia e será discretizada pelo método das diferenças finitas, com o esquema centrado na malha. A figura (2.3.1) mostra esquematicamente a malha de discretização.

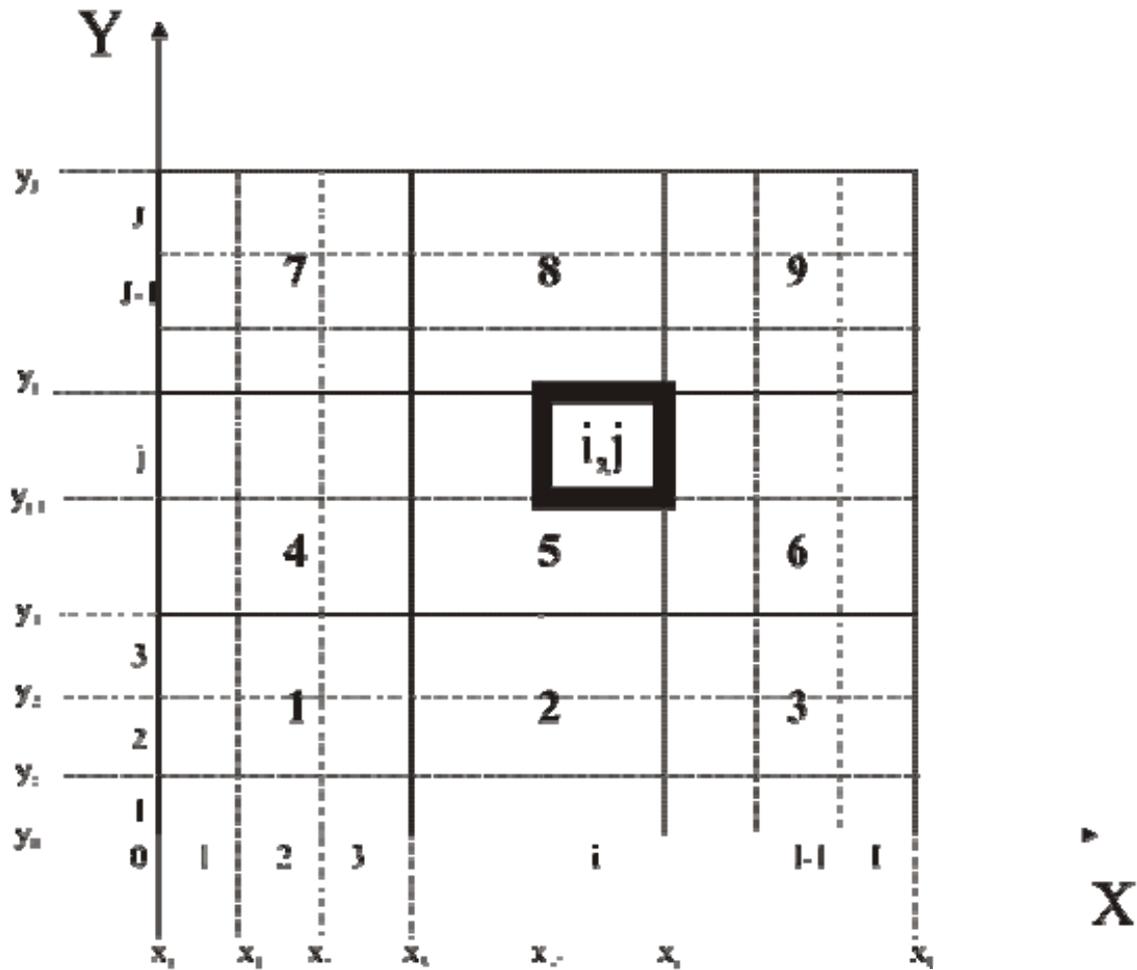


Figura 2.3.1 – Representação esquemática do domínio.

Todos os *benchmarks* considerados possuem a simetria de 1/4 do núcleo de um reator nuclear. E a partir daí foram colocados os eixos ortogonais de referência no centro do núcleo e este foi dividido, primeiramente, em regiões, homogêneas, que têm as dimensões dos elementos combustíveis de cada núcleo. Por exemplo, na figura (2.3.1), o núcleo do reator possui nove regiões. Cada reator pode conter tipos de materiais diferentes, como combustível, combustível com barras de controle, refletor, etc., porém cada região do reator contém apenas um tipo de material e todos os parâmetros nucleares são uniformes dentro desta região. Além disso, as regiões núcleo do reator foram divididas em nodos, igualmente espaçados, tanto na horizontal quanto a vertical e serão indexados como nodo( $i,j$ ), assim como todos os parâmetros nucleares relativos a aquele nodo, pertencente a uma certa região, onde  $i$  representa sua localização em relação ao eixo X e  $j$  representa a sua localização em relação ao eixo Y.

A figura (2.3.2) representa uma melhor visualização do nodo genérico  $nodo(i,j)$  e de sua vizinhança nas direções X e Y. Os parâmetros nucleares que caracterizam este nodo são: seções de choque médias de remoção  $\Sigma_{Rg}^{i,j}$ , espalhamento  $\Sigma_{gg'}^{i,j}$ , fissão  $\Sigma_{fg}^{i,j}$  e coeficiente médio de difusão do meio material  $D_g^{i,j}$ .

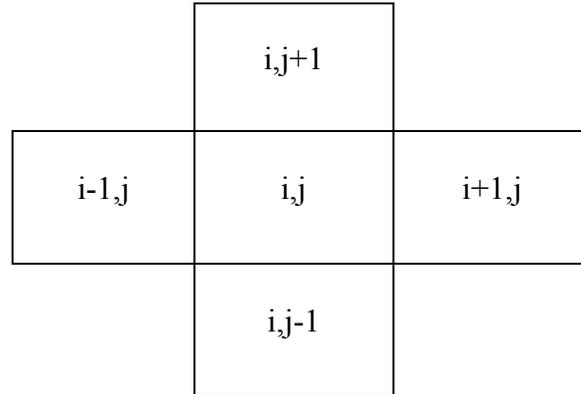


Figura 2.3.2 – Nodo genérico  $nodo(i,j)$  e seus vizinhos nas direções X e Y.

Usando a lei de Fick na equação (2.2.5)

$$J_{gu}(x,y) = -D_g(x,y) \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(x,y)$$

onde  $g$  é o índice para o grupo de energia e  $u$  é o índice para a coordenada espacial. ( $u=x,y$ ), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x} J_{1x}(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} J_{1y}(x,y) + \Sigma_{R1}(x,y) \phi_1(x,y) = \frac{1}{k_{eff}} \hat{\Sigma}_f(x,y) \phi_1(x,y) \quad (2.3.1)$$

Integrando (2.3.1) na área do nodo  $(i,j)$  temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{A_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} J_{1x}(x, y) dA + \int_{A_{ij}} \frac{\partial}{\partial y} J_{1y}(x, y) dA + \sum_{R1}^{i,j} \int_{A_{ij}} \phi_1(x, y) dA = \\
& = \frac{1}{k_{eff}} \hat{\Sigma}_f^{i,j} \int_{A_{ij}} \phi_1(x, y) dA
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Definindo o fluxo médio no nodo como sendo

$$\frac{1}{A_{ij}} \int_{A_{ij}} \phi_1 dA \equiv \bar{\phi}_g^{i,j}$$

Sendo

$$A_{ij} \equiv a_x^i \cdot a_y^j,$$

e

$$a_y^j = y_j - y_{j-1} \text{ e } a_x^i = x_i - x_{i-1}$$

de (2.3.2) segue que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_x^i} \left\{ \frac{1}{a_y^j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} [J_{1x}(x_i, y) - J_{1x}(x_{i-1}, y)] dy \right\} + \\
& + \frac{1}{a_y^j} \left\{ \frac{1}{a_x^i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [J_{1y}(x, y_j) - J_{1y}(x, y_{j-1})] dx \right\} + \sum_{R1}^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j} = \frac{1}{k_{eff}} \hat{\Sigma}_f^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j}
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

definindo:

$$\frac{1}{a_y^j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} [J_{1x}(x_i, y)] dy \equiv \bar{J}_{1xr}^{i,j} \tag{2.3.4}$$

$$\frac{1}{a_y^j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} [J_{1x}(x_{i-1}, y) dy] \equiv \bar{J}_{1xl}^{i,j} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{1}{a_x^i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [J_{1y}(x, y_j) dy] \equiv \bar{J}_{1yt}^{i,j} \quad (2.3.6)$$

$$\frac{1}{a_x^i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [J_{1y}(x, y_{j-1}) dy] \equiv \bar{J}_{1yb}^{i,j} \quad (2.3.7)$$

que são as correntes líquidas médias de nêutrons para cada face do nodo( $i,j$ ) com seus vizinhos e portanto os índices  $l,r,t,b$ , representam as faces esquerda, direita, superior e inferior, respectivamente do nodo( $i,j$ ), a equação (2.3.3) torna-se:

$$\frac{1}{a_x^i} (\bar{J}_{1xr}^{i,j} - \bar{J}_{1xl}^{i,j}) + \frac{1}{a_y^j} (\bar{J}_{1yt}^{i,j} - \bar{J}_{1yb}^{i,j}) + \Sigma_{R1}^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j} = \frac{1}{k_{eff}} \hat{\Sigma}^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j} \quad (2.3.8)$$

que é a conhecida equação de balanço nodal.

#### 2.4. Cálculo das correntes líquidas médias de nêutrons:

Nesta seção serão calculadas as correntes líquidas médias de nêutrons nas faces do nodo,  $(\bar{J}_{gus}^{i,j})$ , para o grupo  $g$ , direção  $u$  e faces esquerda ( $s=l$ ), direita ( $s=r$ ), Superior ( $s=t$ ) e inferior ( $s=b$ ).

Usando a lei de Fick , nas equações (2.3.4 - 7) e lembrando que

$$u = \begin{cases} x \\ y \end{cases} \text{ e } s = \begin{cases} l, r; \text{ para } u = x \\ t, b; \text{ para } u = y \end{cases}$$

temos que:

$$\bar{J}_{gus}^{i,j} = -D_g^{i,j} \frac{d}{du} \bar{\psi}_{gu}^{i,j}(u) \Big|_{u_s^{i,j}} \quad (2.4.1)$$

Onde o fluxo médio nas faces do nodo, são assim definidos:

$$\bar{\psi}_{gus}^{i,j}(u) \equiv \frac{1}{a_v^n} \int_0^{a_v^n} \phi_g(u, v) dv$$

Sendo  $u=x$  para  $v=y$  e  $u=y$  para  $v=x$ .

Então, aproximando  $\frac{d\bar{\psi}_{gu}^{i,j}(u)}{du} \Big|_{u_s^{i,j}}$  por diferenças finitas, da equação (2.4.1) segue que:

$$\bar{J}_{1xl}^{i,j} \cong -D_1^{i,j} \frac{\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\psi}_{1xl}^{i,j}}{a_x^i / 2} \quad (2.4.2)$$

$$\bar{J}_{1xr}^{i,j} \cong -D_1^{i,j} \frac{\bar{\psi}_{1xr}^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i,j}}{a_x^i / 2} \quad (2.4.3)$$

$$\bar{J}_{1yb}^{i,j} \cong -D_1^{i,j} \frac{\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\psi}_{1yb}^{i,j}}{a_y^j / 2} \quad (2.4.4)$$

$$\bar{J}_{1yt}^{i,j} \cong -D_1^{i,j} \frac{\bar{\psi}_{1yt}^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i,j}}{a_y^j / 2} \quad (2.4.5)$$

Onde:

$$\bar{\psi}_{1us}^{i,j} \equiv \bar{\psi}_{1u}^{i,j}(u_s^{i,j})$$

Neste ponto, as correntes médias líquidas de nêutrons para um nodo genérico  $n(i,j)$  podem ser obtidas empregando-se as condições de interface que são, neste caso, continuidade de fluxo e de corrente nas face do nodo. Escolhemos uma direção qualquer  $u(=x, y)$  para o desenvolvimento algébrico. Façamos, então,  $u = x$  e na Fig. 2.4.1 são mostrados um nodo genérico  $nodo(i, j)$  e seu vizinho da esquerda, o  $nodo(i-1, j)$ .

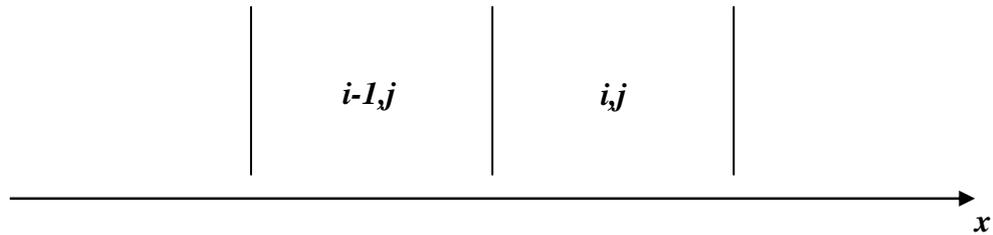


Figura 2.4.1 – Nodo( $i, j$ ) e seu vizinho da esquerda.

Pelas condições de interface (continuidade de fluxo e de corrente) sabe-se que:

$$\bar{J}_{1xl}^{i,j} = \bar{J}_{1xr}^{i-1,j}$$

então das equações (2.4.2) e (2.4.3), vem

$$\frac{-2D_1^{i,j}}{a_x^i} [\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\psi}_{1xl}^{i,j}] = \frac{-2D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}} [\bar{\psi}_{1xr}^{i-1,j} - \bar{\phi}_1^{i-1,j}] \quad (2.4.6)$$

Mas  $\bar{\psi}_{1xl}^{i,j} = \bar{\psi}_{1xr}^{i-1,j}$

Fazendo algumas operações algébricas temos que:

$$\bar{\psi}_{1xl}^{i,j} = \frac{\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \bar{\phi}_1^{i,j} + \left(\frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}\right) \cdot \bar{\phi}_1^{i-1,j}}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}} \quad (2.4.7)$$

Substituindo a equação (2.4.7) na equação (2.4.2), temos que:

$$\bar{J}_{1xl}^{i,j} = \frac{-2 \left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}} (\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i-1,j}) \quad (2.4.8)$$

De maneira análoga calculamos  $J_{1yb}^{i,j}$ , qual seja

$$\bar{J}_{1yb}^{i,j} = \frac{-2 \left(\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i,j-1}}{a_y^{j-1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j} + \frac{D_1^{i,j-1}}{a_y^{j-1}}} (\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i,j-1}) \quad (2.4.9)$$

A Figura. 2.4.2 representa um esquema para a visualização de um nodo genérico nodo( $i, j$ ) e seu vizinho da direita, o nodo( $i+1, j$ ).

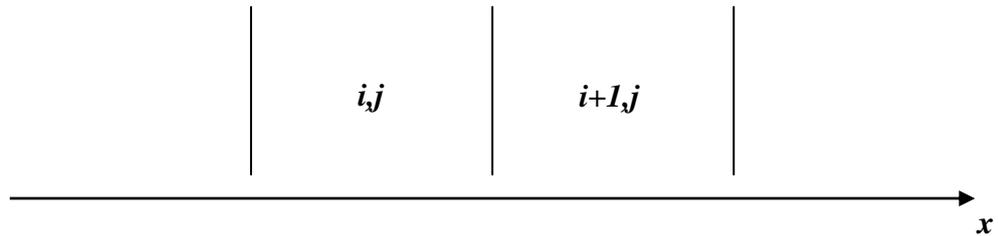


Figura 2.4.2 – Nodo( $i, j$ ) e seu vizinho da direita.

Pelas condições de interface (continuidade de fluxo e de corrente) sabe-se que

$$\bar{J}_{1xr}^{i,j} = \bar{J}_{1xl}^{i+1,j}$$

então das equações (2.4.2) e (2.4.3), vem

$$\frac{-2D_1^{i,j}}{a_x^i} [-\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\psi}_{1xr}^{i,j}] = \frac{-2D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}} [-\bar{\psi}_{1xl}^{i+1,j} + \bar{\phi}_1^{i+1,j}] \quad (2.4.10)$$

$$\text{Mas } \bar{\psi}_{1xr}^{i,j} = \bar{\psi}_{1xl}^{i+1,j}$$

Fazendo algumas operações algébricas temos que:

$$\bar{\psi}_{1xr}^{i,j} = \frac{\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \bar{\phi}_1^{i,j} + \left(\frac{D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}}\right) \cdot \bar{\phi}_1^{i+1,j}}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}}} \quad (2.4.11)$$

Substituindo (2.3.11) em (2.3.3) temos que:

$$\bar{J}_{1xr}^{i,j} = \frac{-2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i+1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}}} (-\bar{\phi}_1^{i,j} + \bar{\phi}_1^{i+1,j}) \quad (2.4.12)$$

De maneira análoga calculamos  $J_{1yt}^{i,j}$ , qual seja

$$\bar{J}_{1yt}^{i,j} = \frac{-2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i,j+1}}{a_y^{j+1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j} + \frac{D_1^{i,j+1}}{a_y^{j+1}}} (\bar{\phi}_1^{i,j+1} - \bar{\phi}_1^{i,j}) \quad (2.4.13)$$

Chamando  $D_{gus}^{i,j}$  de coeficiente efetivo de difusão reescrevemos as equações (2.4.8), (2.4.9), (2.4.12) e (2.4.13) da seguinte forma:

$$\bar{J}_{1xl}^{i,j} = -D_{1xl}^{i,j}(\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i-1,j}) \quad (2.4.14)$$

$$\bar{J}_{1xr}^{i,j} = -D_{1xr}^{i,j}(\bar{\phi}_1^{i+1,j} - \bar{\phi}_1^{i,j}) \quad (2.4.15)$$

$$\bar{J}_{1yt}^{i,j} = -D_{1yt}^{i,j}(\bar{\phi}_1^{i,j+1} - \bar{\phi}_1^{i,j}) \quad (2.4.16)$$

$$\bar{J}_{1yb}^{i,j} = -D_{1yb}^{i,j}(\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i,j-1}) \quad (2.4.17)$$

Onde:

$$D_{1xl}^{i,j} = \frac{2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i-1,j}}{a_x^{i-1}}},$$

$$D_{1xr}^{i,j} = \frac{2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_1^{i+1,j}}{a_x^{i+1}}},$$

$$D_{1yt}^{i,j} = \frac{2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i,j+1}}{a_y^{j+1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j} + \frac{D_1^{i,j+1}}{a_y^{j+1}}}$$

e

$$D_{1yb}^{i,j} = \frac{2\left(\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j}\right) \cdot \left(\frac{D_1^{i,j-1}}{a_y^{j-1}}\right)}{\frac{D_1^{i,j}}{a_y^j} + \frac{D_1^{i,j-1}}{a_y^{j-1}}}$$

Substituindo as equações (2.2.14 - 17), na equação (2.3.8), que representa a equação de balanço nodal, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_x^i} \{ [-D_{1xr}^{i,j} (\bar{\phi}_1^{i+1,j} - \bar{\phi}_1^{i,j})] - [-D_{1xl}^{i-1,j} (\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i-1,j})] \} + \\
& + \frac{1}{a_y^j} \{ [-D_{1yt}^{i,j} (\bar{\phi}_1^{i,j+1} - \bar{\phi}_1^{i,j})] - [-D_{1yb}^{i,j} (\bar{\phi}_1^{i,j} - \bar{\phi}_1^{i,j-1})] \} + \Sigma_{R1}^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j} = \frac{1}{keff} \hat{\Sigma}_f^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j}
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Reescrevendo e agrupando termos comuns da equação (2.4.18), temos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{D_{1xr}^{i,j}}{a_x^i} \bar{\phi}_1^{i+1,j} - \frac{D_{1xl}^{i,j}}{a_x^i} \bar{\phi}_1^{i-1,j} - \frac{D_{1yt}^{i,j}}{a_y^j} \bar{\phi}_1^{i,j+1} - \frac{D_{1yb}^{i,j}}{a_y^j} \bar{\phi}_1^{i,j-1} + \\
& + \left( \frac{D_{1xr}^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_{1xl}^{i,j}}{a_x^i} + \frac{D_{1yt}^{i,j}}{a_y^j} + \frac{D_{1yb}^{i,j}}{a_y^j} + \Sigma_{R1}^{i,j} \right) \bar{\phi}_1^{i,j} = \frac{1}{keff} \hat{\Sigma}_f^{i,j} \bar{\phi}_1^{i,j}
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Ao serem contabilizados todos os nodos a equação (2.4.19) representará um sistema pentadiagonal que será resolvido pelo método das potências, com aceleração de Chebyshev com dois parâmetros, para as iterações externas e terá, ainda, SOR para acelerar as iterações internas.

## 2.5. Método das Potências, método polinomial de Chebyshev e SOR

Nesta seção será feita uma breve explanação sobre os três métodos utilizados para a solução numérica da equação (2.4.19) e como já foi citado o método das potências foi utilizado nas iterações externas, o método polinomial de Chebyshev, para acelerar a convergência das iterações externas e o SOR foi utilizado nas iterações internas.

### 2.5.1 Método das Potências

A solução da equação (2.4.19) nos fornece dois resultados que são de nosso interesse, o fator efetivo de multiplicação ( $k_{eff}$ ) e o valor do fluxo neutrônico ( $\phi$ ) para cada nodo(i,j), de cada região do reator nuclear.

A equação (2.4.19) se colocada na forma matricial representará um problema de autovalor e autovetor, representados pelo fator efetivo de multiplicação e pelo fluxo neutrônico em cada nodo(i,j), respectivamente, e pode ser escrita, de uma forma geral, assim:

$$\underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\phi} = \lambda \underset{\sim}{\phi} \quad (2.5.1.1)$$

Sendo B uma matriz real.

Supondo que os autovalores associados a matriz B são todos reais e distintos e

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$ , onde n é a ordem da matriz B, podemos escrever o seguinte algoritmo para calcular o autovalor de (2.5.1.1) associado a  $\lambda_1$ .

$$\underset{\sim}{\phi}^{(p+1)} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\phi}^{(p)}, p = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.5.1.2)$$

com  $\underset{\sim}{\phi}^{(0)}$ , arbitrário, termos então:

$$\lambda_1 = \frac{(\underset{\sim}{W}^T \underset{\sim}{\phi}^{(p+1)})}{(\underset{\sim}{W}^T \underset{\sim}{\phi}^{(p)})} \quad (2.5.1.3)$$

onde  $\underset{\sim}{W}^T$  é um vetor arbitrário de ponderação com o intuito de minimizar o erro no cálculo do autovalor.

Na equação (2.5.1.2) pode-se ainda fazer a seguinte normalização:

$$\underset{\sim}{\phi}^{(p+1)} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\phi}_{norm}^{(p)}, p = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.5.1.4)$$

onde

$$\underset{\sim}{\phi}_{norm}^{(p)} = \frac{\underset{\sim}{\phi}^{(p)}}{\lambda_1^{(p)}} \quad (2.5.1.5)$$

A figura (2.5.1.1) representa um resumo do procedimento realizado pelo método das potências.

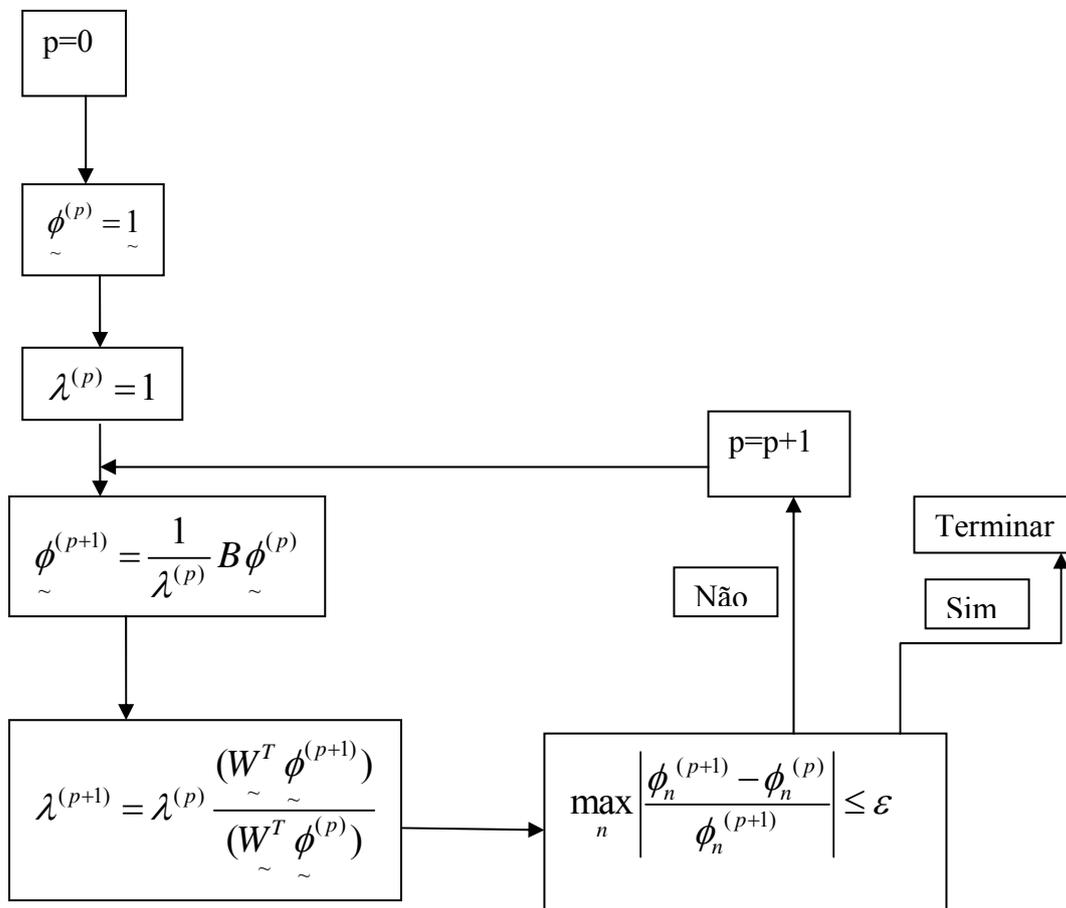


Figura 2.5.1.1 – Resumo do procedimento realizado pelo método das potências.

## 2.5.2 Método polinomial de Chebyshev

O método polinomial de Chebyshev, é um método utilizado para aceleração da convergência iterativa da equação(2.5.1.3), desde que se assuma que os autovalores de B, sejam todos reais. Em geral, nada se sabe sobre os autovalores, porém o método polinomial de Chebyshev funciona bem, mesmo se os autovalores forem complexos.

Esta metodologia pode ter um ou dois parâmetros.

No presente trabalho foi usado o método polinomial de Chebyshev com dois parâmetros.

### **2.5.3 Successive over relaxation (SOR)**

É uma metodologia derivada do método iterativo de Gauss-Sidel, introduzindo uma extrapolação por um fator  $\omega$ , com valor entre 1 e 2. O SOR é utilizado para acelerar a convergência das iterações internas, onde é calculado o autovetor.

Existem pesquisas para se determinar um fator  $\omega$  otimizado, a literatura recomenda um valor entre 1.4 e 1.7.

O método usado neste presente trabalho foi SOR por ponto e fator  $\omega$  utilizado foi de 1.35.

# Capítulo 3

## Apresentação dos *benchmarks*

Neste capítulo serão apresentados, de maneira breve, os *benchmarks* utilizados.

### 3.1. Benchmark KOEBKE

É uma configuração hipotética e simplificada de um núcleo de um reator tipo PWR, com barras de controle. A geometria do núcleo é de 1/4 (como veremos na figura 3.1.1), elemento combustível de 12 cm, quatro tipos de materiais diferentes, critérios de convergência no fator efetivo de multiplicação e no fluxo neutrônico de  $10^{-7}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente.

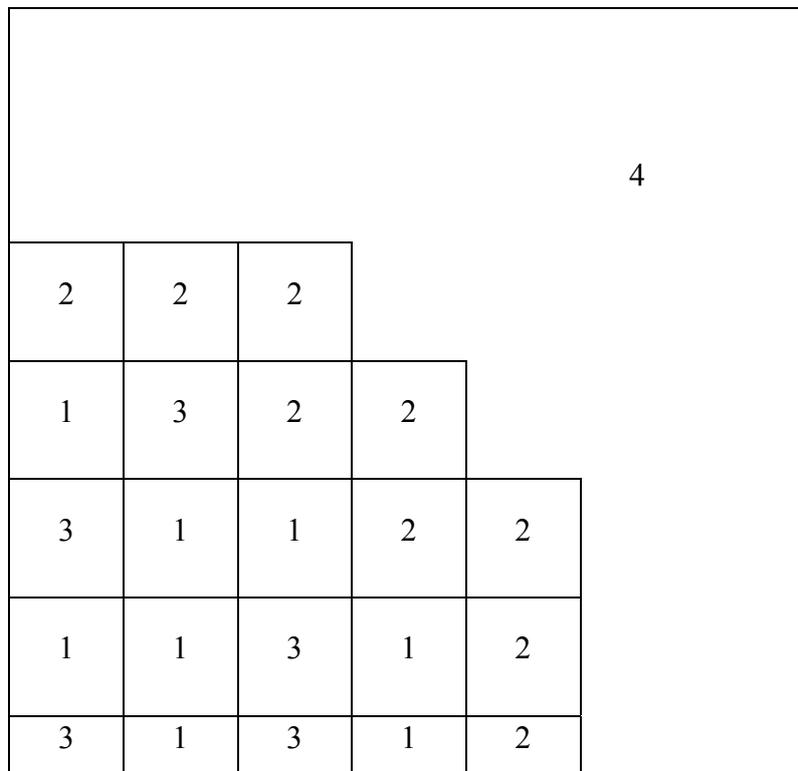


Figura 3.1.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de Koebke.

Os parâmetros nucleares do benchmark de Koebke serão apresentados na tabela 3.1.1

Tabela 3.1.1 – Parâmetros de Nucleares do benchmark de Koebke.

tipo	G	$D_g (cm)$	$\Sigma_{ag} (cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{fg} (cm^{-1})$	$\Sigma_{gg'} (cm^{-1})$
1	1	1.50400	0.0080867	0.00475576	0.01873042
	2	0.35629	0.0694918	0.0857355	0.0
2	1	1.52340	0.0081108	0.0051284	0.01799933
	2	0.36045	0.0858192	0.1216174	0.0
3	1	1.43368	0.0100475	0.0046210	0.01805838
	2	0.30619	0.0789324	0.0757924	0.0
4	1	1.02020	0.0014103	0.0	0.03087685
	2	1.21120	0.1004083	0.0	0.0

### 3.2. Benchmark ZION

Reator de Potência, tipo PWR, possuindo uma particularidade em relação aos demais, pois o “baffle”, com espessura de 2,86 cm, e o refletor são tratados explicitamente. A geometria do núcleo é de 1/4 (como veremos na figura 3.2.1), elemento combustível de 21,308 cm, cinco tipos de materiais diferentes, critérios de convergência no fator efetivo de multiplicação e no fluxo neutrônico de  $10^{-7}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente.



Tabela 3.2.1 – Parâmetros de Nucleares do benchmark de ZION.

tipo	G	$D_g (cm)$	$\Sigma_{ag} (cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{fg} (cm^{-1})$	$\Sigma_{gg'} (cm^{-1})$
1	1	1.02130	0.00322	0.0	0.0
	2	0.33548	0.14596	0.0	0.0
2	1	1.41760	0.00855	0.00536	0.01742
	2	0.37335	0.06669	0.10433	0.0
3	1	1.41920	0.00882	0.12472	0.01694
	2	0.37370	0.07606	0.00653	0.0
4	1	1.42650	0.00902	0.00653	0.01658
	2	0.37424	0.08359	0.14120	0.0
5	1	1.45540	0.00047	0.0	0.02903
	2	0.28994	0.00949	0.0	0.0

### 3.3. Benchmark BIBLIS

Reator de potência, tipo PWR, onde o “baffle” e o refletor foram homogeneizados em uma única região (material tipo 8). A geometria do núcleo é de 1/4 (como veremos na figura 3.3.1), elemento combustível de 23,124 cm, oito tipos de materiais diferentes, critérios de convergência no fator efetivo de multiplicação e no fluxo neutrônico de  $10^{-8}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente.

3	3	3	3					8
1	1	1	7	3	3			
6	1	6	1	4	3	3		
1	7	2	7	2	4	3		
5	2	7	2	7	1	7	3	
2	7	1	7	2	6	1	3	
7	1	7	2	7	1	1	3	
1	7	2	5	1	6	1	3	

Figura 3.3.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark BIBLIS.

Os parâmetros nucleares do benchmark de BIBLIS serão apresentados na tabela 3.3.1

Tabela 3.3.1 – Parâmetros de Nucleares do benchmark de BIBLIS.

Tipo	G	$D_g (cm)$	$\Sigma_{ag} (cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{fg} (cm^{-1})$	$\Sigma_{gg'} (cm^{-1})$
1	1	1.4360	0.0095042	0.0058708	0.017754
	2	0.3635	0.0750058	0.0960670	0.0
2	1	1.4366	0.0096785	0.0061908	0.017621
	2	0.3636	0.0784360	0.1035800	0.0
3	1	1.4389	0.0103630	0.0074527	0.17101
	2	0.3638	0.0914080	0.1323600	0.0
4	1	1.4381	0.0100030	0.0061908	0.017290
	2	0.3665	0.0848280	0.1035800	0.0
5	1	1.4385	0.0101320	0.0026026	0.017192
	2	0.3665	0.0873140	0.0441740	0.0
6	1	1.4389	0.0101650	0.0061908	0.0171125
	2	0.3679	0.0880240	0.1035800	0.0
7	1	1.4393	0.0102940	0.0064285	0.017027
	2	0.3679	0.0905100	0.1091100	0.0
8	1	1.3200	0.0026562	0.0	0.023106
	2	0.2772	0.0715960	0.0	0.0

### 3.4. Benchmark IAEA 2D

Benchmark bastante utilizado para simulações computacionais. Para o tratamento 2D a geometria do núcleo é de 1/4 (como veremos na figura 3.4.1), elemento combustível de 20 cm, quatro tipos de materiais diferentes, este reator possui um *buckling* axial, critérios de convergência no fator efetivo de multiplicação e no fluxo neutrônico de  $10^{-6}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente.

1	1	1						
2	2	1	1	1				4
2	2	2	2	1	1			
3	2	2	2	3	1	1		
2	2	2	2	2	2	1		
2	2	2	2	2	2	1	1	
2	2	2	2	2	2	2	1	
3	2	2	2	3	2	2	1	

Figura 3.4.1 – Configuração para simetria de 1/4 do benchmark de IAEA 2D.

Os parâmetros nucleares do benchmark de IAEA 2D serão apresentados na tabela 3.4.1

Tabela 3.4.1 – Parâmetros de Nucleares do benchmark de IAEA 2D.

Tipo	G	$D_g (cm)$	$\Sigma_{ag} (cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{fg} (cm^{-1})$	$\Sigma_{gg'} (cm^{-1})$
1	1	1.5	0.01	0.0	0.02
	2	0.4	0.08	0.135	0.0
2	1	1.5	0.01	0.0	0.02
	2	0.4	0.085	0.135	0.0
3	1	1.5	0.01	0.0	0.02
	2	0.4	0.13	0.135	0.0
4	1	2.0	0.0	0.0	0.04
	2	0.3	0.01	0.0	0.0

## Capítulo 4

### Apresentação e análise dos resultados obtidos

Nesta secção serão apresentados os primeiros resultados computacionais obtidos. Para tanto, foram idealizadas, inicialmente, três etapas para a validação sistemática da teoria de grupo modificado. A primeira etapa, como foi chamada, foi feita para testar o programa computacional, em linguagem FORTRAN, resolvendo concomitantemente as equações (2.1.1) e (2.1.2), isto é, resolvendo o problema a dois grupos de energia, propriamente dito, e comparando os resultados obtidos com os benchmarks. A partir daí o próximo passo seria como conseguir a equação de grupo modificado? Uma maneira rápida que foi pensada e, por tanto, esta seria a segunda etapa do trabalho, seria resolver, também, as equações (2.2.1) e (2.1.2), mas agora, fazendo como dado de entrada, o coeficiente de difusão do grupo térmico igual a zero. Fazendo isso, as duas equações (2.2.1) e (2.1.2), ficariam desacopladas e seria obtida a equação de grupo modificado (2.1.6). Esta seria uma maneira, como já foi mencionado, muito rápida de conseguir a equação de grupo modificado, porém ela não se mostrou correta, para o nosso trabalho, sendo mais adiante explicado melhor, e com isso não foi possível realizar esta etapa. Finalmente, na terceira etapa o programa foi modificado para resolver somente uma equação diferencial em duas dimensões e apenas um grupo, modificado, de energia  $(1+1/2G)$  representado pela equação (2.1.6). Note que a primeira etapa serviu como uma calibração do programa.

A seguir, os resultados obtidos serão apresentados, assim como uma análise para esses resultados.

#### 4.1. Benchmark KOEBKE

Os resultados obtidos para o benchmark de Koebke serão apresentados na tabela 4.1.1

Tabela 4.1.1 – Resultados para um núcleo com barras de controle do benchmark de Koebke.

Tipo de Reator: KOEBK						
Autovalor de referência: 0,90384		Critério de convergência $k_{eff}$ : 1,0E-7		Critério de convergência $\phi$ : 1,0E-5		
Parâmetros	Elemento Combustível(cm)	Nº de malhas por região	Iterações Externas	$k_{eff}$	Desvio* :	Tempo(s)
2G	12	12	34	0,90254	0,14	9,65
(1+1/2G)	12	12	37	0,90953	0,63	4,72
2G	12	24	33	0,90242	0,13	121,64
(1+1/2G)	12	24	36	0,90937	0,61	58,42

\* Os desvios relativos foram calculados da seguinte maneira:

$$\text{Desvio: } \left| \frac{k - k_{ref}}{k_{ref}} \right| \times 100\%$$

Os resultados obtidos para a distribuição de potência do benchmark de Koebke serão apresentados na figura 4.1.1 e para o melhor entendimento desta tabela, assim como todas as outras tabelas para a distribuição de potência, ler-se-á na primeira linha o valor de referência da distribuição de potência, na segunda linha o desvio relativo encontrado com a formulação a dois grupos de energia e na terceira linha o desvio relativo percentual encontrado com a formulação de um grupo modificado e para evitar um exagero de informações, estão nas tabelas apenas os desvios relativos encontrados para “a malha mais fina”.

Referência Desv. 2G Desv.1+1/2G	1,356 0,1489 5,0049	1,601 0,4541 2,0127	1,103 0,1241 5,0144	1,030 0,0497 4,6508	0,830 0,6445 1,8797
		1,575 0,6738 0,8798	1,299 0,2890 2,6735	0,811 0,8687 1,5581	0,769 0,3026 0,5348
			0,921 0,7594 1,9881	1,059 0,3954 0,9671	0,618 0,0597 0,2864
$\left  \frac{p - p_{ref}}{p_{ref}} \right  \times 100\%$				0,742 0,6195 0,3683	

Figura 4.1.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark KOEBK

Pela figura 4.1.1, observa-se que os maiores desvios da ordem de 5%, ocorrem em duas regiões da primeira linha da figura, mas é exatamente nessas duas regiões que existem barras de controle, que poderiam acarretar uma diminuição do fluxo de nêutrons devido à absorção, e conseqüentemente um erro na potência calculada para estas zonas

## 4.2. Benchmark ZION

Os resultados obtidos para o benchmark de ZION serão apresentados na tabela 4.2.1

Tabela 4.2.1 – Resultados para um núcleo do benchmark ZION

Tipo de Reator: ZION						
Autovalor de referência: 1,274845		Critério de convergência $k_{eff}$ : 1,0E-7		Critério de convergência $\phi$ : 1,0E-5		
Parâmetros	Elemento Combustível(cm)	Nº de malhas por região	Iterações Externas	$k_{eff}$	Desvio (%)	Tempo(s)
2G	21,608	21	134	1,27495	0,01	467,401
(1+1/2G)	21,608	21	142	1,27571	0,07	231,09
2G	21,608	40	123	1,27488	0,01	5164,56
(1+1/2G)	21,608	40	141	1,27568	0,06	2511,46

Os resultados obtidos para a distribuição de potência do benchmark de ZION serão apresentados na figura 4.2.1

1,621 0,0125 1.9891	1,765 -0,0324 6.7319	1,528 0,0463 1.4776	1,560 0,0470 5.7083	1,254 0,1999 -0.1601	1,166 0,1457 3.2842	0,802 0,2691 -5.1516	0,509 0,0816 -4.1935
	1,575 0,0239 1.7343	1,664 0,0062 6.1984	1,393 0,1192 0.6172	1,365 0,1678 4.5728	1,037 0,2381 -2.2831	0,922 0,1444 2.0820	0,493 -0,1019 -6.0379
		1,443 0,0560 0.7926	1,475 0,0601 4.9044	1,183 0,1871 -1.2244	1,084 0,0995 2.0733	0,724 0,3226 -6.5051	0,442 -0,0986 -5.8329
			1,244 0,1149 -1.2376	1,219 0,0801 1.7512	0,898 0,1120 -5.2774	0,723 0,1254 -2.2418	0,316 -0,8488 -12.9566
				1,079 -0,1232 -2.0843	0,851 -0,1957 -4.7998	0,524 -1,2617 -10.0991	
					0,662 -0,8518 -7.1502	0,317 -2,0056 -16.5951	

Figura 4.2.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark ZION

O reator ZION é um reator mais complexo, pois o “*baffle*” foi tratado explicitamente. Pela figura 4.2.1, observa-se que desvios bastante significativos que ocorrem na última coluna, chegando a quase 13%. Vale notar que estas regiões são fronteiriças ao “*baffle*” pela direita do reator. Na última linha da mesma figura existe uma região com desvio de quase 17%. Esta região é também fronteira ao “*baffle*”, tanto pela direita quanto pela parte superior.

Esta proximidade a uma região onde não existe a queima de combustível pode acarretar um erro no cálculo do fluxo de nêutrons e conseqüentemente um erro na potência calculada para estas regiões.

### 4.3. Benchmark BIBLIS

Os resultados obtidos para o benchmark de BIBLIS serão apresentados na tabela 4.3.1

Tabela 4.3.1 – Resultados para um núcleo do benchmark BIBLIS

Tipo de Reator: BIBLIS						
Autovalor de referência: 1,025106		Critério de convergência $k_{eff}$ : 1,0E-8		Critério de convergência $\phi$ : 1,0E-5		
Parâmetros	Elemento Combustível(cm)	Nº de malhas por região	Iterações Externas	$k_{eff}$	Desvio	Tempo(s)
2G	23,124	21	178	1,02527	0,02	691,35
(1+1/2G)	23,124	21	192	1,02642	0,13	338,81
2G	23,124	30	169	1,02526	0,01	1511,48
(1+1/2G)	23,124	30	188	1,02641	0,13	826,37

Os resultados obtidos para o benchmark de BIBLIS serão apresentados na figura 4.3.1

1,091 0.1489 3.7164	1,102 0.3582 3.0461	1,243 0.2821 3.2171	1,220 0.2008 1.2275	1,089 0.0792 3.7839	0,982 0.2094 2.8186	1,095 0.4362 2.9442	1,015 0.2259 1.9467
	1,117 0.1104 3.9713	1,134 0.3001 2.6116	1,223 0.1292 -3.3435	1,068 0.1043 2.7238	1,032 0.3101 3.0288	1,072 0.4098 2.3768	0,972 0.2009 2.1086
		1,122 0.0913 4.1337	1,105 0.2384 2.3934	1,120 0.0494 3.0905	0,924 0.0414 2.8888	0,931 0.3395 2.8322	0,825 0.1122 2.7110
			1,161 0.1622 3.3202	1,038 0.1808 2.6380	0,950 0.1262 3.1712	0,765 0.0701 3.3757	0,546 0.0544 4.9866
				1,123 0.1275 2.6429	0,933 0.1014 0.3708	0,875 0.1564 2.5844	
					1,200 0.1774 0.1317	0,684 0.1136 3.3123	

Figura 4.3.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark BIBLIS

O reator BIBLIS, apesar de ser o mais heterogêneo entre todos, possuindo oito tipos de materiais diferentes, teve o melhor “comportamento”, seu maior desvio não chegou a 5%. Nota-se pela figura 4.3.1 que a zona onde esse maior desvio ocorre é, justamente, na intersecção entre a última coluna e a antepenúltima linha. Esta zona é também, como no caso do reator ZION, fronteira, não ao “*baffle*”, mas ao refletor, tanto pela lateral direita, quanto pela parte superior, onde não há queima de combustível, podendo acarretar um erro no cálculo do fluxo de nêutrons e conseqüentemente um erro na potência calculada para esta zona.

#### 4.4. Benchmark IAEA 2D

Os resultados obtidos para o benchmark de IAEA 2D serão apresentados na tabela 4.4.1

Tabela 4.4.1 – Resultados para um núcleo do benchmark IAEA 2D

Tipo de Reator: IAEA 2D						
Autovalor de referência: 1,029585		Critério de convergência $k_{eff}$ : 1,0E-6		Critério de convergência $\phi$ : 1,0E-5		
Parâmetros	Elemento Combustível(cm)	Nº de malhas por região	Iterações Externas	$k_{eff}$	Desvio	Tempo(s)
2G	20	20	132	1,02953	0,01	394,73
(1+1/2G)	20	20	124	1,02833	0,12	221,39
2G	20	40	120	1,02953	0,01	4366,81
(1+1/2G)	20	40	109	1,02829	0,12	2643,98

Os resultados obtidos para o benchmark de IAEA 2D serão apresentados na figura 4.4.1

0,7456	1,3097	1,4537	1,2107	0,6100	0,9351	0,9343	0,7549
0.3630	0.2524	0.2158	0.1095	0.0745	0.0618	0.0887	0.7747
15.6214	31.5834	27.3451	24.8067	0.4797	1.3304	13.4821	38.5726
	1,4351	1,4799	1,3149	1,0697	1,0361	0,9504	0,7358
	0.2475	0.1954	0.0963	0.0384	0.0808	0.0443	0.6864
	29.0365	26.2994	21.7983	14.0713	0.3647	14.8935	39.7553
		1,4694	1,3451	1,1792	1,0705	0,9752	0,6921
		0.1291	0.0359	0.0840	0.1532	0.1091	0.3467
		23.5107	18.5946	9.8184	3.5939	19.4209	53.5312
			1,1929	0,9670	0,9064	0,8461	
			-0.0511	0.1887	0.2906	0.3455	
			14.2721	6.7707	9.8255	37.4799	
				0,4706	0,6856	0,5972	
				0.2353	0.4824	0.7307	
				16.1482	20.0785	53.4763	
					0,5849		
					0.6607		
					53.3168		

Figura 4.4.1 – Resultados para distribuição de potência do benchmark IAEA 2D

Apresenta o pior resultado entre todos os benchmarks, devido à maior sensibilidade ao fazer a aproximação desejada.

#### 4.5. Análise Geral

Nas seções anteriores foram apresentados os resultados obtidos assim como uma análise particular para cada modelo *benchmark*.

Nesta seção faremos uma análise mais geral dos resultados obtidos. Para a análise dos resultados obtidos serão destacadas as tabelas 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 e 4.4.1, pois nelas aparecem sintetizados, os resultados obtidos para cada tipo de reator nuclear. As células, nas tabelas, onde aparecem “critério de convergência  $k_{\text{eff}}$  e critério de convergência  $\phi$ ”, dizem respeito ao critério de convergência do autovalor e do fluxo de nêutrons, respectivamente. A coluna parâmetro, diz respeito ao modo de solução das equações, isto é, 2 grupos, propriamente dito, (2G), ou um grupo modificado, (1+1/2G); a coluna “elemento combustível”, mostra o tamanho físico do elemento combustível de cada reator nuclear; a coluna “número de malhas por região”, mostra como cada região foi dividida, tanto vertical quanto horizontalmente; a coluna “iterações”, refere-se ao número de iterações externas, para o cálculo do autovalor. O critério de convergência das iterações internas foi de 10 vezes maior que os das iterações externas; a coluna “ $k_{\text{eff}}$ ” mostra o autovalor encontrado em cada teste; a coluna desvio mostra o quanto o autovalor encontrado desvia-se do benchmark e finalmente a coluna tempo, mostra o tempo de processamento para cada teste.

Fazendo-se uma primeira análise vemos, pelos resultados obtidos, que a solução da equação de um grupo modificado fornece resultados da ordem de 0,1%, de desvio percentual, em relação ao valor do autovalor de referencia benchmark para o autovalor, além disso, o tempo computacional envolvido é da ordem de 50% menor que tempo gasto para a solução a dois grupos de energia. O que, em um primeiro momento, mostra um resultado bem animador para a validação da teoria de grupo modificado. Porém, deve-se levar em consideração e comparar outro resultado: a distribuição de potência, como foi visto, também, nas seções anteriores.

Deve-se neste ponto voltar ao porquê de não ter sido realizada a segunda etapa da validação da equação de grupo modificado.

A discretização utilizada neste trabalho, tanto para a solução a dois grupos de energia quanto para um grupo modificado, foram baseadas em [1]. Devido a esta abordagem são montadas as equações (2.4.14), (2.4.15), (2.4.16) e (2.4.17), que representam as correntes líquidas em função do coeficiente efetivo de difusão.

Note que o caso mais geral, por exemplo, a equação (2.4.14) fica da seguinte forma:

$$\bar{J}_{gus}^{i,j} = -D_{gus}^{i,j} (\bar{\phi}_g^{i,j} - \bar{\phi}_g^{i-1,j}) \quad (4.1)$$

Onde:

$$u = \begin{cases} x; s = l \text{ ou } r \\ y; s = t \text{ ou } b \end{cases}$$

e o mais importante a se notar:  $g=1,2$

Para a resolução computacional para dois grupos de energia e um grupo modificado não existe problema algum, pois no primeiro caso existem os coeficientes de difusão para os dois grupos e no outro o coeficiente de difusão do grupo térmico não faz parte do cálculo. Porém, no que seria a segunda etapa da validação da teoria de grupo modificado, quando foi feito como dado de entrada o coeficiente de difusão do grupo térmico igual a zero, aparecerá uma indeterminação, ou seja, o numerador e o denominador da fração serão zero, pois como podemos ver na equação (4.1)

$$D_{gus}^{i,j} = \frac{2 \left( \frac{D_g^{i,j}}{a_u^i} \right) \left( \frac{D_g^{i-1,j}}{a_u^{i-1}} \right)}{\frac{D_g^{i,j}}{a_u^i} + \frac{D_g^{i-1,j}}{a_u^{i-1}}} \quad (4.1)$$

Por isso, então, a segunda etapa da validação para um grupo modificado não foi realizada.

Como foi dito no início deste capítulo, os resultados obtidos, com a formulação de grupo modificado, para o autovalor e para o tempo de processamento são realmente animadores. É importante frisar que o cálculo, tanto, do autovalor quanto do fluxo, são

dados por médias, e como se sabe, médias, em engenharia são informações perigosas e, portanto, deve-se ter cuidado ao interpretá-la e considerá-la.

Devido a este fato, procura-se fazer as análises e conclusões baseando-se na distribuição de potência, como foi feito nas secções anteriores.

Os programas foram executados em um computador cujo processador é um Intel Celeron com 2.1 Ghz de processamento, 1 GB de memória Ram e plataforma Windows XP Professional SP2.

# Capítulo 5

## Conclusões

A teoria de grupo modificado é uma aproximação para a equação de difusão de nêutrons, e devido a esse fato é de se esperar que haja algumas discrepâncias nos resultados obtidos.

A proposta inicial desta dissertação é fazer uma análise sistemática da teoria de grupo modificado e, se possível, através dos resultados obtidos, verificar a validade da formulação para um grupo modificado.

Para tal validação existem, entre muitas perguntas, duas de extrema importância, sendo a primeira pergunta: “O método pode ser utilizado?” e a segunda pergunta: “O método é satisfatório?”

Como mais um metodologia de solução da equação de difusão, a resposta é sim. O método pode ser usado. Como foi dito na introdução, o fator motivador é não haver nada na literatura especializada sobre esta abordagem.

Porém, a segunda pergunta, é realmente de fundamental importância na física de reatores: A formulação para grupo modificado é satisfatória?

De acordo com os resultados obtidos, ainda não!

Algumas empresas de projetos nucleares, como por exemplo, Eletronuclear S.A., limitam esses valores em no máximo 1% para a densidade média de potência no EC.

De qualquer modo os resultados são encorajadores, pois as maiores discrepâncias são exatamente em zonas perturbadas, como por exemplo, próximos à barras de controle, devido ao alto gradiente de fluxo, no caso do KOEBKE, próximo ao “baffle”, no caso do ZION, ou até mesmo, próximo ao refletor, no caso do BIBLIS.

Além disso, os resultados nos mostram outro indicador de coerência. A formulação de grupo modificado é baseada na sua essência no fato de se desprezar a fuga térmica dos nêutrons, com isso, era de se esperar que quanto maior fosse o tamanho físico do reator, e foi o que justamente aconteceu, o reator BIBLIS, teve um resultado melhor, por ser maior, que o reator KOEBKE que é menor.

A conclusão a que se chega com tudo que foi apresentado é que este trabalho se encontra numa etapa preliminar, ou até mesmo embrionária de desenvolvimento. O método se mostra importante, mas de acordo com os resultados obtidos não pode, ainda neste momento, ser validado, pois existem grandes discrepâncias em relação aos valores utilizados como referência.

### **5.1. Propostas para trabalhos futuros**

Finalmente, formularam-se algumas propostas visando novos trabalhos e de aperfeiçoar o método utilizado neste trabalho, tais como:

Uma extensão natural é resolver o problema em três dimensões e um grupo (modificado) de energia. Com isso ter-se-á uma oportunidade para analisar o comportamento da metodologia utilizada, mas não havendo uma certeza na melhora dos resultados.

Utilizar um método nodal, para uma melhor eficácia no tempo de processamento computacional na solução da equação.

## Referências Bibliográficas

- [1] NAKAMURA, S., 1977, “Computation Method in Engineering and Science”, first edition, John Wiley & Sons, New York.
- [2] ALVIM, A.C.M., 2007, “Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear”, primeira edição, Editora Certa, Curitiba.
- [3] WACHSPRESS, E.L., “Iterative Solution of Elliptic System and Application to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics”, New Jersey, Prentice-hall, 1966.
- [4] GREENSPAN, H., KLEBER, C.N., OKRENT, D., “Computing Methods in Reactor Physics”, New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [5] PRESS, H.W., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., et al, “Numerical Recipes in Fortran”, 2 ed. New York, Cambridge University Press, 1992.
- [6] DUDERSTADT J.J., e HAMILTON L.J., “Nuclear Reactor Analysis”, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [7] TRKOV, A., RAVNIK, M., “Effective Diffusion Homogenization of Cross Section for Pressurized Water Reactor Core Calculations”, Nuclear Science and Engineering, v.116, pp. 86-95, 1994.
- [8] CHRISTENSEN B., “Three-dimensional Static and Dynamic Reactor Calculations by the Nodal Expansion Method”, Riso National Laboratory, DK-4000, Roskild, Denmark, May 1985.
- [9] SMITH, K.S., “Assembly Homogenization Techniques for Lwr Analysis”, Progress in Nuclear engineering, v.17, n.03, pp. 303-335, 1996

- [10] NAKATA, H., MARTIN, W.R., "The Finite Element Response Matrix Method", Nuclear Science and Engineering, v.85, pp. 289-305, 1997.
- [11] VERHAGEN, F.M.C., VAN DER SCHAAR, M., DE KRUIJF, W.J.M., VAN DE WETERING, T.F.H., JONES, R.D., "ROSA, A Utility Tool for Loading Pattern Optimization", Advanced in Nuclear Fuel Management II Conference, Myrtle Beach, South California, March , 1997