

ANÁLISE DAS LIMITAÇÕES DA SEPARABILIDADE ESPAÇO-TEMPO NA
CINÉTICA DE REATORES NUCLEARES

Flamarion da Silva Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Antonio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2007

SANTOS, FLAMARION DA SILVA

Análise das Limitações da Separabilidade Espaço-Tempo na Cinética de Reatores Nucleares[Rio de Janeiro] 2007

VIII, 67 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Nuclear, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1.Aproximação Adiabática

2.Equações da Cinética de Reatores

I. COPPE/UFRJ II. Título(série)

Dedico esta Dissertação
primeiramente a Deus, Inteligência Suprema, que me concedeu
esta e tantas outras oportunidades, que tenho experimentado
nesta vida.

A Sr. Roberto e D. Dora, meus pais amados.

A minha esposa Bárbara e a minha filhinha

Ághata, minhas vidas meus amores.

A minhas irmãs, Roberta, Chárita e Scheilla.

Primeiramente agradeço a minha maravilhosa esposa Bárbara, pelo imensurável apoio durante todo processo de realização deste trabalho, pela sua paciência, por seus conselhos, sua ajuda e acima de tudo seu amor. A minha amada filhinha Ághata, pelos momentos de alegria e ternura, contribuindo com muitos momentos de plenitude após horas de tensão, referentes ao trabalho.

Aos meus pais amados, Dora e Roberto, por todo apoio e incentivo à minha vida acadêmica, pela educação e carinho que me deram e, principalmente, pelos valores que me foram passados, valores esses decisivos na formação de meu caráter.

Agradeço aos professores Aquilino e Fernando Carvalho do Programa de Engenharia Nuclear da COPPE, por seus conhecimentos transmitidos, conhecimentos ímpares que não se encontram em livros, pelas explicações e orientações que permitiram a realização deste trabalho.

Ao Zelmo, que também acrescentou muito com seus conhecimentos em Cinética Espacial.

Aos colegas do Laboratório de Monitoração de Processos (LMP), pelas conversas elucidativas, que de alguma forma corroboraram para ampliar alguns conceitos.

A todos os professores do Programa de Engenharia Nuclear, pelas inestimáveis colaborações no tocante à aquisição de novos conhecimentos.

Agradeço a todos que me apoiaram de alguma forma para a conclusão deste trabalho, incluindo minhas irmãs Roberta, Charita e Scheilla.

Por fim, gostaria de dedicar este trabalho a todos citados, principalmente, às duas pessoas de especial importância em minha vida, as quais amo com toda força, e que sempre estão ao meu lado na jornada da vida, minha querida esposa e minha linda filhinha.

Flamarion da Silva Santos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DAS LIMITAÇÕES DA SEPARABILIDADE ESPAÇO-TEMPO NA
CINÉTICA DE REATORES NUCLEARES

Flamarion da Silva Santos

Fevereiro/2007

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

Este trabalho tem como objetivo encontrar as limitações da aproximação adiabática em descrever a distribuição espaço-tempo do fluxo de nêutrons, quando algumas perturbações são introduzidas no núcleo de um reator nuclear. Mostrar como a aproximação adiabática se comporta com algumas perturbações inseridas no núcleo sem perder sua acurácia, quando comparada a um método direto, considerado como referência. Os resultados obtidos mostram que o núcleo perturbado apresenta uma resposta favorável a partir de um transiente de 4s, onde os erros percentuais para todos os testes se mostraram pequenos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF LIMITATIONS OF TIME-SPACES SEPARABILITY IN
NUCLEAR REACTORS KINETICS

Flamarion da Silva Santos

February/2007

Advisors: Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Department: Nuclear Engineering

This work has the objective to find the limitations of the adiabatic approximation to reproduce the flux distribution when some perturbations inside the reactor core are introduced. To show the behavior of adiabatic approximation with some perturbations inserted in core without losing its accuracy is a very important task. Will be used a directed method as reference, so the adiabatic methods will be analyzed to find the limits of its implementation. The obtained results show that the perturbed core presents precise answers after 4sec transients, were the percents error for all the test are very small.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Equações da Cinética de Reatores	3
2.1	Cinética Espacial	3
2.2	Cinética Pontual	7
3	Método de Diferenças Finitas	11
3.1	Discretização da Equação da Difusão a uma Dimensão e a dois Grupos de Energia	11
3.1.1	Diferenças Finitas	14
4	Solução das Equações da Cinética Espacial	23
4.1	Equações Semi-discretizadas	23
4.2	Discretização no Tempo	26
4.2.1	Solução Analítica da Equação da Concentração de Precursores	26
4.2.2	Solução da Equação que Governa o Fluxo de Nêutrons	27
4.3	Método do Cálculo Direto - Referência	29
5	Soluções das Equações da Cinética Pontual	30
5.1	Solução Analítica	30
5.2	Solução Numérica	32
6	Aproximação Adiabática	36
6.1	Introdução	36
6.2	Cálculo da Função Forma	37
6.2.1	Esquema Iterativo - Método das Potências	42
6.2.2	Normalização do Método das Potências	44

6.2.3	Método Inverso das Potências	45
6.2.4	Aceleração de Chebyshev	46
6.2.5	Fluxograma do Processo Iterativo	47
7	Apresentação e Análise dos Resultados	49
7.1	Soluções Analítica e Numérica da Equações da Cinética Pontual	49
7.2	Análise dos Resultados para aproximação adiabática	51
7.2.1	Benchmark BSS-1-A2	51
7.2.2	Perturbação Global	52
7.2.3	Perturbações Localizadas	56
8	Conclusões e sugestões	64

Capítulo 1

Introdução

Muitos métodos aplicados à cinética de reatores, utilizando a teoria da difusão, continuam a ser estudados e aperfeiçoados. Existem duas categorias de métodos aplicados à cinética espacial: os métodos diretos e os métodos indiretos. Os métodos diretos são talvez os que utilizam os procedimentos mais corretos conceitualmente para resolver a equação da difusão dependente do tempo. Nestes métodos, o problema espacial é particionado em um número finito de elementos de volume. Baseado neste particionamento espacial, uma forma acoplada da equação da difusão e das equações de precursores, espacialmente discretizada, pode ser obtida. Dependendo do método de discretização particular empregado, os valores dos fluxos desconhecidos podem ser definidos como pontos discretos ou médias em todo volume. Iremos classificar os métodos diretos em três grupos: método de diferenças finitas, método de malha grossa e método nodal, combinados com algum esquema de integração no tempo. Os métodos indiretos baseiam-se na idéia de separar a parte espacial da parte temporal. Os métodos de fatoração do espaço e tempo, os métodos modais e de síntese são considerados como métodos indiretos SUTTON & AVILLES [1], DE LIMA [2].

A finalidade do presente estudo é encontrar as condições em que a aproximação adiabática, que é um dos métodos de fatoração espaço-tempo da distribuição do fluxo, se torna acurada ao ser comparada com o método direto de diferenças finitas. A aproximação adiabática possui vantagens no tocante a facilidade de implementação, pois sua solução é expressa como o produto entre uma função forma, onde a dependência temporal é desprezada, e uma função amplitude. Esta análise se fará pela comparação da distribuição do fluxo de nêutrons, obtida por diferentes programas computacionais desenvolvidos nesta dissertação, quando perturbações localizadas e perturbações globais são impostas ao núcleo. A preocupação, e daí a mo-

tivação, advém do fato que se estudam vários fenômenos em um reator utilizando a aproximação adiabática, contudo o que se diz na literatura, é que a perturbação inserida, para utilização da aproximação adiabática, tem de ser pequena. O que remete a questão: quão pequena tem de ser esta perturbação? Ou seja, até que ponto se pode inserir uma perturbação sem que se perca a precisão no método? Estas questões serão aqui tratadas, mediante comparação dos resultados da aproximação adiabática com uma solução de referência, a fim de que pouco mais concreto se torne a margem com a qual se pode avançar nas análises para o uso da aproximação adiabática.

A dissertação contém seis capítulos. No capítulo 2, foi implementado um Método Direto de Diferenças Finitas, a fim de que seja usado como referência na comparação com o método que será analisado. Como será observado, o método de referência tem como base a discretização espacial por diferenças finitas e faz uso da integração analítica da equação de precursores em conjunto com o método de Crank-Nicholson para tratar da dependência temporal. No capítulo 3 foram deduzidas as equações da Cinética Pontual através das equações mencionadas no capítulo 2. Em seguida, foi encontrada a solução analítica para o caso de haver apenas um grupo de precursores. No capítulo 4 será mostrada a solução da Equação da Difusão a uma dimensão e a dois grupos de energia, utilizando diferenças finitas com esquema centrado na malha. Tendo obtido as soluções da Equação da Difusão a uma dimensão e a dois grupos de energia, e a solução da Cinética Pontual para um grupo de de precursores, avançamos para o próximo passo que é o desenvolvimento do método a ser analisado mediante a inserção no núcleo de algumas perturbações, método este conhecido como aproximação adiabática, como veremos no capítulo 5. Finalmente no capítulo 6 serão apresentados os resultados do método estudado e as conclusões a respeito do trabalho.

Capítulo 2

Equações da Cinética de Reatores

2.1 Cinética Espacial

A condição de criticalidade para o núcleo de um reator representa um balanço entre dois processos dinâmicos: As taxas de produção e perda de nêutrons. Em um reator, cita HENRY [3], operando a 4000 megawatts de potência térmica, por exemplo, são produzidos e perdidos aproximadamente 3×10^{20} nêutrons por segundo. O tempo de vida médio destes nêutrons está numa faixa entre 10^{-7} a 10^{-4} seg dependendo do tipo do reator.

O balanço de nêutrons entre as taxas de produção e perda é tema complexo e o estudo de como esse balanço é reestabelecido quando este é perturbado é muito importante. Com isso a Cinética de Reatores, que é uma área da Física de Reatores, tenta, com o auxílio da estatística, predizer o que acontece com a distribuição de fluxo de nêutrons $\varphi(\vec{r}, E, t)$ quando a condição de balanço associada com o estado crítico é perturbada [3]. As equações da Cinética de Reatores podem ser obtidas simplesmente partindo da Equação da Continuidade de Nêutrons, qual seja,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E)\varphi(\vec{r}, E) = \int_0^\infty \left[\sum_j \chi^j(E)\nu^j(E')\Sigma_f^j(\vec{r}, E') + \right. \\ \left. + \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \right] \varphi(\vec{r}, E') dE'. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Segundo a Lei de Fick a corrente $\vec{J}(\vec{r}, E)$ relaciona-se com a distribuição de fluxo $\varphi(\vec{r}, E)$ na forma :

$$\vec{J}(\vec{r}, E) \simeq -D(\vec{r}, E)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, E) \quad (2.2)$$

onde $D(\vec{r}, E)$ é o coeficiente de difusão. Então, utilizando a aproximação (2.2) na equação (2.1) temos:

$$\begin{aligned} & -\vec{\nabla}.D(\vec{r}, E)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E)\varphi(\vec{r}, E) \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_j \chi^j(E)\nu^j(E')\Sigma_f^j(\vec{r}, E') + \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \right] \varphi(\vec{r}, E') dE'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é conhecida como a Equação da Difusão de Nêutrons dependente da energia. A esta equação será adicionado o fato que a distribuição de nêutrons está mudando com o tempo e que alguns desses nêutrons nascem com um tempo de retardo. Os nêutrons que nascem com um tempo de retardo, chamados nêutrons retardados, surgem de certos produtos de fissão, chamados de precursores de nêutrons retardados, que após o decaimento $\bar{\beta}$ tornam-se instáveis e emitem nêutrons. Sendo assim, para se determinar a taxa com que os nêutrons são emitidos por esta fonte, é necessário levar em conta a concentração de todos os precursores de nêutrons retardados. Se a concentração do i -ésimo desses precursores em um ponto \vec{r} de um reator é $c_i(\vec{r}, t)$ e sua constante de decaimento β é λ_i (*segundo*⁻¹), temos que o número total de nêutrons emitidos por segundo no ponto \vec{r} e no instante t é dado por

$$\sum_{i=1}^I \lambda_i c_i(\vec{r}, t), \quad (2.4)$$

sendo a soma sobre todos os produtos de fissão que emitem nêutrons retardados. Existem cerca de vinte desses produtos, no entanto, a maior parte deles tem uma pequena produção de nêutrons, sendo suficientemente possível ajustar os dados assumindo seis grupos de precursores ($I = 6$). Os precursores dos nêutrons retardados são produzidos na fissão, assim, se β_i^j é a fração de nêutrons de uma fissão do isótopo j ($U^{235}, Pu^{239}, U^{238}, etc.$) que eventualmente aparece do decaimento do precursor

i , temos que o número dos precursores dos nêutrons retardados do i -ésimo tipo criado por segundo no ponto \vec{r} e no instante t é dado por

$$\sum_j \beta_i^j \int_0^\infty \nu^j(E) \Sigma_f^j(\vec{r}, E, t) \varphi(\vec{r}, E, t) dE. \quad (2.5)$$

Daí segue que a taxa de variação no tempo de $c_i(\vec{r}, t)$ para um combustível onde o transiente é curto, é dado por

$$\frac{\partial c_i(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sum_j \left(\beta_i^j \int_0^\infty \nu^j(E) \Sigma_f^j(\vec{r}, E, t) \varphi(\vec{r}, E, t) dE \right) - \lambda_i c_i(\vec{r}, t). \quad (2.6)$$

Os nêutrons retardados são emitidos com energias menores, em média, que a dos nêutrons prontos. Designaremos o espectro de fissão dos nêutrons retardados com emissão de energia para o i -ésimo precursor por $\chi_i(E)$ e da equação (2.4), a taxa na qual os nêutrons aparecem num elemento de volume dV com energia em dE , devido ao decaimento dos núcleos precursores, é dada por

$$\sum_i \chi_i(E) \lambda_i c_i(\vec{r}, t) dV dE. \quad (2.7)$$

Sendo $\chi_p^j(E)$ o espectro de nêutrons prontos emitidos pelo isotopo j , temos que a taxa na qual os nêutrons prontos aparecem num elemento de volume dV com energia em dE , é dada por

$$\left[\sum_j \chi_p^j(E) (1 - \beta^j) \int_0^\infty \nu^j(E') \Sigma_f^j(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, E', t) dE' \right] dV dE, \quad (2.8)$$

onde:

$$\beta^j \equiv \sum_{i=1}^I \beta_i^j. \quad (2.9)$$

Podemos agora estender a equação (2.3) para o caso dependente do tempo expressando matematicamente o fato que a taxa de variação no tempo do número de nêutrons em um elemento de volume dV com energia em dE é a diferença entre suas taxas de aparecimento e desaparecimento, como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{v(E)} \varphi(\vec{r}, E, t) dV dE \right] = \\ & \left[\sum_j \chi_p^j(E) (1 - \beta^j) \int_0^\infty \nu^j(E') \Sigma_f^j(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, E', t) dE' \right] dV dE + \\ & + \sum_i \chi_i(E) \lambda_i c_i(\vec{r}, t) dV dE + q(\vec{r}, E, t) dV dE + \vec{\nabla} \cdot \left(D(\vec{r}, E, t) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, E, t) \right) dV dE - \\ & - \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \varphi(\vec{r}, E, t) dV dE + \left[\int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, t) \varphi(\vec{r}, E', t) dE' \right] dV dE. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para simplificar a notação introduziremos dois operadores definidos da seguinte forma:

$$Af \equiv \Sigma_t(\vec{r}, E, t) f(\vec{r}, E, t) - \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) f(\vec{r}, E', t) dE'$$

e

$$F^j f \equiv \int_0^\infty \nu^j(E') \Sigma_f^j(\vec{r}, E', t) f(\vec{r}, E', t) dE',$$

onde $f(\vec{r}, E, t)$ é uma função qualquer.

Então, com todas as dependências funcionais suprimidas, as equações (2.10) e (2.6) podem ser escritas na forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(D \vec{\nabla} \varphi \right) - A \varphi + \sum_j \chi_p^j (1 - \beta^j) F^j \varphi + \sum_{i=1}^I \chi_i \lambda_i c_i + q, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \sum_j \beta_i^j F^j \varphi - \lambda_i c_i \quad (2.12)$$

com $i= 1, 2, \dots, I$.

Estas são as Equações da Cinética Espacial ou também conhecidas como as Equações da Difusão dependentes do tempo [3], levando em conta uma fonte externa q . Essas equações serão a base para o desenvolvimento das equações da Cinética Pontual, como veremos mais adiante.

2.2 Cinética Pontual

Neste capítulo deduziremos as equações da cinética pontual, supondo que a distribuição do fluxo de nêutrons no núcleo do reator possa ser descrito como o produto de uma função que dependa do espaço e fracamente do tempo e outra que dependa apenas do tempo, e com esta suposição chegaremos a uma descrição envolvendo equações diferenciais ordinárias no tempo, conhecidas como Equações da Cinética Pontual [3, 4, 5]. Para obtenção destas equações, nos basearemos no formalismo apresentado por HENRY [3] e introduziremos uma quantidade $T(t)$, conhecida como função amplitude, definida da seguinte maneira:

$$T(t) \equiv \int_V dV \int_0^\infty dE W(\vec{r}, E) \frac{1}{v(E)} \varphi(\vec{r}, E, t) \quad (2.13)$$

Para expressarmos nas equações da cinética espacial (2.11) e (2.12) a função amplitude (2.13), basta multiplicarmos a equação (2.11) pela função peso, $W(\vec{r}, E)$, e a equação (2.12) por $\chi_i(E)W(\vec{r}, E)$ e integrar ambas as equações em toda energia e em todo volume. Definiremos também uma função forma $f(\vec{r}, E, t)$, que varia pouco no tempo, onde:

$$f(\vec{r}, E, t) \equiv \frac{\varphi(\vec{r}, E, t)}{T(t)}. \quad (2.14)$$

Então, substituindo o produto $f(\vec{r}, E, t)T(t)$, na equação (2.11), a qual também será adicionado e subtraído o termo $\sum_j (\sum_{i=1}^I \chi_i \beta_i^j) F^j \varphi$, resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int dV \int dEW \left[\vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} f) - Af + \sum_j (\chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j) F^j f \right] T(t) - \\
& - \left[\int dV \int dEW \sum_{i,j} \chi_i \beta_i^j F^j f \right] T(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[\int dV \int dEW \chi_i c_i \right] + \\
& + \int dV \int dEW q = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int dV \int dEW \frac{1}{v} f T(t) \right] \tag{2.15}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left[\int dV \int dEW \chi_i \sum_j \beta_i^j F^j f \right] T(t) - \lambda_i \left[\int dV \int dEW \chi_i c_i \right] \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int dV \int dEW \chi_i c_i \right] \quad (i = 1, 2, \dots, I), \tag{2.16}
\end{aligned}$$

onde as integrais são em todo volume e em todo o intervalo de energia ($0 \leq E \leq \infty$).

Das definições (2.13) e (2.14), temos que:

$$T(t) = \int dV \int dEW \frac{1}{v} \varphi = \left[\int dV \int dEW \frac{1}{v} f \right] T(t), \tag{2.17}$$

implicando numa normalização para função forma $f(\vec{r}, E, t)$, qual seja,

$$\int dV \int dEW(\vec{r}, E) \frac{1}{v(E)} f(\vec{r}, E, t) = 1 \tag{2.18}$$

E desta forma, podemos escrever o lado direito das equações (2.15) e (2.16) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int dV \int dEW \frac{1}{v} f T(t) \right] = \left[\int dV \int dEW \frac{1}{v} f \right] \frac{dT(t)}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int dV \int dEW \chi_i c_i \right] = \left[\int dV \int dEW \frac{1}{v} f \right] \frac{d}{dt} C_i(t),$$

onde:

$$C_i(t) \equiv \frac{\int dV \int dEW \chi_i c_i(r, t)}{\int dV \int dEW \frac{1}{v} f}.$$

Então dividindo as equações (2.15) e (2.16) por

$$\int dV \int dEW \left(\sum_j [\chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j] F^j f \right)$$

vem

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{(\rho(t) - \beta(t))}{\Lambda(t)} T(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(t) + Q(t), \quad (2.19)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i(t)}{\Lambda(t)} T(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, I).$$

onde:

$$\rho(t) \equiv \frac{\int dV \int dEW \left[\nabla \cdot D \nabla f - A f + \sum_j \chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j F^j f \right]}{\int dV \int dEW \left[\sum_j \left(\chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j \right) F^j f \right]},$$

$$\beta_i(t) \equiv \frac{\int dV \int dEW \sum_i \chi_i \beta_i^j F^j f}{\int dV \int dEW \left[\sum_j \left(\chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j \right) F^j f \right]}, \quad \beta(t) \equiv \sum_{i=1}^I \beta_i(t),$$

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\int dV \int dEW \frac{1}{v} f}{\int dV \int dEW \left[\sum_j \left(\chi_p^j (1 - \beta^j) + \sum_i \chi_i \beta_i^j \right) F^j f \right]}$$

e

$$Q(t) \equiv \frac{\int dV \int dEW q}{\int dV \int dEW \frac{1}{v} f}.$$

Os termos acima são lidos como segue:

$\rho(t)$ = reatividade;

$\beta_i(t)$ = fração de nêutrons retardados no grupo i;

$\beta(t)$ = fração total de nêutrons retardados;

$\Lambda(t)$ = tempo de geração médio entre o nascimento do nêutron e sua subsequente absorção induzindo fissão.

As equações (2.19) são chamadas de Equações da Cinética Pontual e formam a base para análise de quase todos os transientes em um reator nuclear.

Capítulo 3

Método de Diferenças Finitas

A equação da difusão multigrupo é resolvida com mais frequência quando se quer analisar ou projetar um reator nuclear. Neste capítulo descreveremos a solução numérica para a equação da difusão de nêutrons em geometria cartesiana unidimensional e a dois grupos de energia, que é o caso de interesse. Temos que destacar também que este é caso mais simples de solução da equação da difusão multigrupo NAKAMURA [6].

A equação da difusão de nêutrons na forma multigrupo e independente de tempo é:

$$\begin{aligned} & -\vec{\nabla} \cdot [D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g(\vec{r})] + \Sigma_{tg}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) = \\ & = \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{gg'}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $\Sigma_{gg'}$ representando o espalhamento do grupo g' para o grupo g e k o fator de multiplicação.

Na seção seguinte vamos apresentar a discretização, por Diferenças Finitas, do caso unidimensional a dois grupos de energia.

3.1 Discretização da Equação da Difusão a uma Dimensão e a dois Grupos de Energia

A equação (3.1) tratada para geometria cartesiana a uma dimensão e a dois grupos de energia reduz-se a:

$$-\frac{d}{dx}\left(D_1(x)\frac{d}{dx}\phi_1(x)\right) + \Sigma_{R1}(x)\phi_1(x) = \frac{1}{k}[\nu\Sigma_{f1}(x)\phi_1(x) + \nu\Sigma_{f2}(x)\phi_2(x)], \quad (3.2)$$

$$-\frac{d}{dx}\left(D_2(x)\frac{d}{dx}\phi_2(x)\right) + \Sigma_{R2}(x)\phi_2(x) = \Sigma_{1\rightarrow 2}(x)\phi_1(x),$$

onde as constantes de multigrupo, $D_1(x)$, $D_2(x)$, $\Sigma_{R1}(x)$, $\Sigma_{R2}(x)$, $\nu\Sigma_{f1}(x)$, $\nu\Sigma_{f2}(x)$ e $\Sigma_{1\rightarrow 2}(x)$ são em geral contínuas por partes. Se representarmos nosso reator unidimensional através de um segmento de reta cujos extremos são caracterizados por a e b , temos que as constantes de multigrupo podem possuir um número finito de descontinuidades nesse intervalo. Fisicamente, esses pontos de descontinuidades representam interfaces entre composições homogêneas, ou homogeneizadas, sucessivas.

Iniciaremos a solução das equações com a discretização espacial do intervalo (a, b) , ou seja, dividiremos o intervalo (a, b) em uma série de sub-intervalos, onde cada sub-intervalo é conhecido como malha, que pode ser de mesmo tamanho (uniforme) ou não (não uniforme) como é mostrado na figura 3.1 abaixo, onde $x_0 = a$ e $x_N = b$.

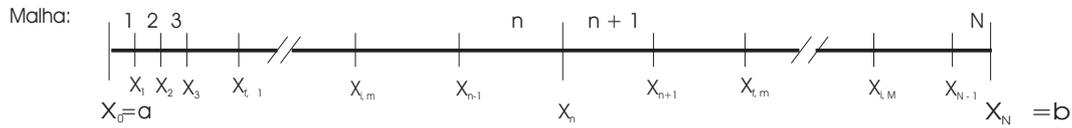


Figura 3.1: Discretização espacial do intervalo (a, b)

Observa-se que para $n = 1, \dots, N$:

$$D_g(x) = D_g^n; \quad x_{i,n} < x < x_{f,n}$$

e

$$\Sigma_{xg}(x) = \Sigma_{xg}^n; \quad x_{i,n} < x < x_{f,n}.$$

Temos também que $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $-D_1(x)\frac{d\phi_1(x)}{dx}$ e $-D_2(x)\frac{d\phi_2(x)}{dx}$ são contínuas em (a, b) . Como $D_1(x)$ e $D_2(x)$ são apenas contínuas por partes em (a, b) , isto implica que na interface em x_n , dada pela discretização do intervalo (a, b) , como mostrado na figura 3.1,

$$D_g(x_n^-)\frac{d\phi_g(x_n^-)}{dx} = D_g(x_n^+)\frac{d\phi_g(x_n^+)}{dx}, \quad (3.3)$$

com $g = 1, 2$. Onde $a < x_n < b$ e x_n^\pm são mostrados esquematicamente na figura 3.2.

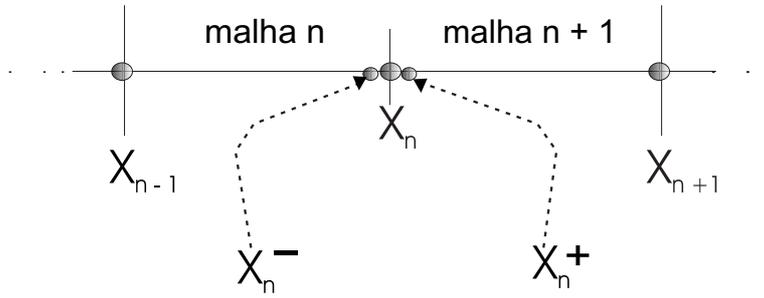


Figura 3.2: Configuração do esquema centrado na malha

No contorno $x = x_0$ e $x = x_N$ temos:

$$\alpha\phi_g(x) + \beta\frac{d\phi_g(x)}{dx} = 0,$$

para $g = 1, 2$, sendo que

- $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ condição de fluxo nulo: $\phi_g(x) = 0$,
- $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0 \Rightarrow$ condição de corrente nula: $-D_g(x)\frac{d\phi_g(x)}{dx} = 0$,
- α e $\beta \neq 0 \Rightarrow$ condição de albedo: $-D_g(x)\frac{d\phi_g(x)}{dx} = \gamma\phi_g(x)$.

Admitiu-se também nas equações (3.2), $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0$ e a não ocorrência de upscattering.

3.1.1 Diferenças Finitas

No esquema centrado na malha, integramos as equações (3.2) no sub-intervalo (x_{n-1}, x_n) , onde para a malha n da região m :

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

Neste esquema definimos o fluxo médio na malha n como:

$$\bar{\phi}_g^n \equiv \frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \phi_g(x) dx$$

Então integrando as equações (3.2), obtemos:

$$\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} -\frac{d}{dx} \left(D_1(x) \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right) dx + \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \Sigma_{R1}(x) \phi_1(x) dx = \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \frac{1}{k} [\nu \Sigma_{f1}(x) \phi_1(x) + \nu \Sigma_{f2}(x) \phi_2(x)] dx \quad (3.4)$$

$$\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} -\frac{d}{dx} \left(D_2(x) \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right) dx + \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \Sigma_{R2}(x) \phi_2(x) dx = \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \Sigma_{1 \rightarrow 2}(x) \phi_1(x) dx,$$

onde:

$$\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} -\frac{d}{dx} \left(D_g(x) \frac{d\phi_g(x)}{dx} \right) dx = D_g(x_{n-1}^+) \frac{d\phi_g(x_{n-1}^+)}{dx} - D_g(x_n^-) \frac{d\phi_g(x_n^-)}{dx}$$

$$\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) dx = \Sigma_{Rg}^n \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \phi_g(x) dx = \Sigma_{Rg}^n \bar{\phi}_g^n \Delta x_n;$$

analogamente

$$\int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \nu \Sigma_{fg}(x) \phi_g(x) dx = \nu \Sigma_{fg}^n \bar{\phi}_g^n \Delta x_n.$$

Substituindo as equações acima nas equações (3.4) para o grupo 1 e para o grupo 2 temos:

$$\begin{aligned}
& -D_1(x_{n-1}^+) \frac{d\phi_1(x_{n-1}^+)}{dx} + D_1(x_n^-) \frac{d\phi_1(x_n^-)}{dx} + \Sigma_{R1}^n \overline{\phi_1^n} \Delta x_n = \\
& = \frac{1}{k} [\nu \Sigma_{f1}^n \overline{\phi_1^n} + \nu \Sigma_{f2}^n \overline{\phi_2^n}] \Delta x_n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$-D_2(x_{n-1}^+) \frac{d\phi_2(x_{n-1}^+)}{dx} + D_2(x_n^-) \frac{d\phi_2(x_n^-)}{dx} + \Sigma_{R2}^n \overline{\phi_2^n} \Delta x_n = \Sigma_{1 \rightarrow 2}^n \phi_1^n \Delta x_n \tag{3.6}$$

Agora, usando as equação (3.3), segue que

$$D_g(x_{n-1}^+) \frac{d\phi_g(x_{n-1}^+)}{dx} = D_g(x_{n-1}^-) \frac{d\phi_g(x_{n-1}^-)}{dx} \tag{3.7}$$

e

$$D_g(x_n^-) \frac{d\phi_g(x_n^-)}{dx} = D_g(x_n^+) \frac{d\phi_g(x_n^+)}{dx}, \tag{3.8}$$

para $g = 1, 2$.

Usando, então, diferenças finitas para aproximar as derivadas e lembrando que $D_g(x_{n-1}^-) = D_g^{n-1}$, $D_g(x_{n-1}^+) = D_g(x_n^-) = D_g^n$ e $D_g(x_n^+) = D_g^{n+1}$, vem

$$D_g^n \frac{\overline{\phi_g^n} - \phi_g(x_{n-1}^+)}{\Delta x_n/2} \approx D_g^{n-1} \frac{\phi_g(x_{n-1}^-) - \overline{\phi_g^{n-1}}}{\Delta x_{n-1}/2}, \tag{3.9}$$

$$D_g^n \frac{\phi_g(x_n^-) - \overline{\phi_g^n}}{\Delta x_n/2} \approx D_g^{n+1} \frac{\overline{\phi_g^{n+1}} - \phi_g(x_n^+)}{\Delta x_{n+1}/2} \tag{3.10}$$

como existe continuidade de fluxo, ou seja,

$$\phi_g(x_{n-1}^+) = \phi_g(x_{n-1}^-) = \phi_g(x_{n-1})$$

e

$$\phi_g(x_n^+) = \phi_g(x_n^-) = \phi_g(x_n),$$

das equações (3.9) e (3.10) segue que

$$\phi_g(x_{n-1}) = \frac{D_g^{n-1} \Delta x_n}{D_g^{n-1} \Delta x_n + D_g^n \Delta x_{n-1}} \bar{\phi}_g^{n-1} + \frac{D_g^n \Delta x_{n-1}}{D_g^{n-1} \Delta x_n + D_g^n \Delta x_{n-1}} \bar{\phi}_g^n \quad (3.11)$$

e

$$\phi_g(x_n) = \frac{D_g^n \Delta x_{n+1}}{D_g^n \Delta x_{n+1} + D_g^{n+1} \Delta x_n} \bar{\phi}_g^n + \frac{D_g^{n+1} \Delta x_n}{D_g^n \Delta x_{n+1} + D_g^{n+1} \Delta x_n} \bar{\phi}_g^{n+1}. \quad (3.12)$$

Agora, substituindo as equações (3.11) e (3.12), respectivamente, nas equações (3.9) e (3.10), vem

$$D_g(x_{n-1}^+) \frac{d\phi_g(x_{n-1}^+)}{dx} = \frac{2D_g^{n-1} D_g^n}{D_g^{n-1} \Delta x_n + D_g^n \Delta x_{n-1}} \{\bar{\phi}_g^n - \bar{\phi}_g^{n-1}\} \quad (3.13)$$

$$D_g(x_n^-) \frac{d\phi_g(x_n^-)}{dx} = \frac{2D_g^n D_g^{n+1}}{D_g^n \Delta x_{n+1} + D_g^{n+1} \Delta x_n} \{\bar{\phi}_g^{n+1} - \bar{\phi}_g^n\} \quad (3.14)$$

Com isso as equações (3.5) e (3.6), tornam-se:

$$a_1^n \bar{\phi}_1^{n-1} + b_1^n \bar{\phi}_1^n + c_1^n \bar{\phi}_1^{n+1} = \frac{1}{k} [\nu \Sigma_{f_1}^n \bar{\phi}_1^n + \nu \Sigma_{f_2}^n \bar{\phi}_2^n] \quad (3.15)$$

e

$$a_2^n \bar{\phi}_2^{n-1} + b_2^n \bar{\phi}_2^n + c_2^n \bar{\phi}_2^{n+1} = \Sigma_{1 \rightarrow 2}^n \bar{\phi}_1^n. \quad (3.16)$$

Compactando as equações (3.15) e (3.16) em uma única equação para malha n , onde $1 < n < N$, obtemos a seguinte equação de diferenças:

$$a_g^n \bar{\phi}_g^{n-1} + b_g^n \bar{\phi}_g^n + c_g^n \bar{\phi}_g^{n+1} = \frac{1}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_g \nu \Sigma_{fg}^n \bar{\phi}_{g'}^n \Delta x_n + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^n \bar{\phi}_{g'}^n \Delta x_n, \quad (3.17)$$

onde:

$$a_g^n = -\frac{2D_g^{n-1}D_g^n}{D_g^{n-1}\Delta x_n + D_g^n\Delta x_{n-1}};$$

$$b_g^n = \Sigma_{Rg}^n \Delta x_n + \frac{2D_g^{n-1}D_g^n}{D_g^{n-1}\Delta x_n + D_g^n\Delta x_{n-1}} + \frac{2D_g^n D_g^{n+1}}{D_g^n\Delta x_{n+1} + D_g^{n+1}\Delta x_n}$$

e

$$c_g^n = -\frac{2D_g^n D_g^{n+1}}{D_g^n\Delta x_{n+1} + D_g^{n+1}\Delta x_n}.$$

Vamos obter agora uma equação para $n = 1$, onde as equações (3.5) e (3.6) podem ser também compactadas em uma única equação em g , onde g como já foi dito vai de 1 a 2.

$$D_g(x_0^+) \frac{d\phi_g(x_0^+)}{dx} - D_g(x_1^-) \frac{d\phi_g(x_1^-)}{dx} + \Sigma_{Rg}^1 \bar{\phi}_g^1 \Delta x_1 =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_{g\nu} \Sigma_{fg'}^1 \bar{\phi}_g^1 \Delta x_1 + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{gg'}^1 \bar{\phi}_g^1 \Delta x_1, \quad (3.18)$$

onde pela equação 3.14, temos que

$$D_g(x_1^-) \frac{d\phi_g(x_1^-)}{dx} = \frac{2D_g^1 D_g^2}{D_g^1 \Delta x_2 + D_g^2 \Delta x_1} \{\bar{\phi}_g^2 - \bar{\phi}_g^1\}, \quad (3.19)$$

e

$$D_g(x_0^+) \frac{d\phi_g(x_0^+)}{dx}, \quad (3.20)$$

que pode ser encontrado, aplicando a condição de contorno qual seja

$$\alpha \phi_g(x_0^+) + \beta \frac{d\phi_g(x_0^+)}{dx} = 0,$$

Logo:

$$\frac{d\phi_g(x_0^+)}{dx} = -\frac{\alpha}{\beta} \phi_g(x_0^+).$$

Aplicando diferenças finitas na equação (3.20) e substituindo a expressão acima, obtemos:

$$D_g(x_0^+) \frac{\alpha}{\beta} \phi_g(x_0^+) = -D_g(x_0^+) \frac{\bar{\phi}_g^1 - \phi_g(x_0^+)}{\Delta x_1/2}. \quad (3.21)$$

Isolando $\phi_g(x_0^+)$ temos que,

$$\phi_g(x_0^+) = \frac{\bar{\phi}_g^{-1}}{1 - \frac{\alpha \Delta x_1}{2\beta}}, \quad (3.22)$$

onde substituindo o resultado acima na primeira expressão da equação (3.21), temos então:

$$D_g(x_0^+) \frac{\alpha}{\beta} \phi_g(x_0^+) = D_g^1 \frac{2\alpha \bar{\phi}_g^{-1}}{2\beta - \alpha \Delta x_1} \quad (3.23)$$

Podemos então substituir os resultados de (3.19) e (3.23) na equação (3.18), arrumando-a em ordem crescente dos fluxos médios, na forma:

$$b_g^1 \bar{\phi}_g^{-1} + c_g^1 \bar{\phi}_g^{-2} = \frac{1}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_g \nu \Sigma_{fg'}^1 \bar{\phi}_{g'}^{-1} \Delta x_1 + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^1 \bar{\phi}_{g'}^{-1} \Delta x_1 \quad (3.24)$$

onde:

$$b_g^1 = \Sigma_{Rg}^1 \Delta x_1 - \frac{2\alpha D_g^1}{2\beta - \alpha \Delta x_1} + \frac{2D_g^1 D_g^2}{D_g^1 \Delta x_2 + D_g^2 \Delta x_1}$$

$$c_g^1 = -\frac{2D_g^1 D_g^2}{D_g^1 \Delta x_2 + D_g^2 \Delta x_1}.$$

Analogamente, para $n = N$, podemos escrever:

$$a_g^N \bar{\phi}_g^{-N} + b_g^N \bar{\phi}_g^{-N+1} = \frac{1}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_g \nu \Sigma_{fg'}^1 \bar{\phi}_{g'}^{-N} \Delta x_N + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^N \bar{\phi}_{g'}^{-N} \Delta x_N$$

onde:

$$a_g^N = -\frac{2D_g^{N-1} D_g^N}{D_g^{N-1} \Delta x_N + D_g^N \Delta x_{N-1}}$$

$$b_g^N = \Sigma_{Rg}^N \Delta x_N - \frac{2\alpha D_g^N}{2\beta - \alpha \Delta x_N} + \frac{2D_g^{N-1} D_g^N}{D_g^{N-1} \Delta x_N + D_g^N \Delta x_{N-1}}$$

Logo o sistema de equações pode ser escrito na forma matricial como se segue:

$$A\Psi = \frac{1}{k} F\Psi, \quad (3.25)$$

onde A é definido como uma matriz do tipo,

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ -S & A_2 \end{pmatrix},$$

sendo:

$$A_g \equiv \begin{pmatrix} a_g^1 & c_g^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_g^2 & a_g^2 & c_g^2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & b_g^3 & a_g^3 & c_1^3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & b_g^{N-1} & a_g^{N-1} & c_g^{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_g^N & a_g^N \end{pmatrix}; \quad g = 1, 2$$

e

$$S \equiv \begin{pmatrix} \Sigma_{1 \rightarrow 2}^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{1 \rightarrow 2}^2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \Sigma_{1 \rightarrow 2}^{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \Sigma_{1 \rightarrow 2}^N \end{pmatrix}.$$

Além disso, F , na equação 3.25, é da seguinte forma:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde :

$$F_g \equiv \begin{pmatrix} \nu\Sigma_{fg}^1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \nu\Sigma_{fg}^2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \nu\Sigma_{fg}^{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \nu\Sigma_{fg}^N \end{pmatrix}; \quad g = 1, 2$$

E, finalmente, Ψ escrevemos da seguinte forma:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\Phi}_2 \end{pmatrix}$$

onde :

$$\underline{\Phi}_g \equiv \begin{pmatrix} \overline{\phi}_g^1 \\ \overline{\phi}_g^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{\phi}_g^{N-1} \\ \overline{\phi}_g^N \end{pmatrix}; \quad g = 1, 2$$

Para resolvermos a equação (3.25) e obtermos k , que é o maior autovalor do problema, e ainda o autovetor a ele associado Ψ , usaremos o método das potências normalizado, juntamente com o conceito de vetor fonte [6, 7, 8], e ainda extrapolação de Chebyshev para acelerar a convergência do processo iterativo (iterações externas) resultante. É importante salientar também, que foi usado Eliminação de Gauss, para substituir as iterações internas.

Capítulo 4

Solução das Equações da Cinética Espacial

As equações (2.11) e (2.12), escritas em geometria cartesiana unidimensional, dois grupos de energia a um grupo de precursor, ficam na forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_g(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} \varphi_g(x, t) \right) - \Sigma_{R_g}(x, t) \varphi_g(x, t) + \\ &+ \sum_{g'=1}^2 \Sigma_{gg'}(x, t) \varphi_{g'}(x, t) + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'} \varphi_{g'}(x, t) + \lambda C(x, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \beta \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'} \varphi_{g'}(x, t) - \lambda C(x, t) \quad (4.2)$$

com $g=1, 2$.

4.1 Equações Semi-discretizadas

A discretização espacial das equações (4.1) e (4.2) será realizada dividindo o núcleo do reator em N segmentos, cujos comprimentos denotaremos por Δx_n , onde $n = 1, 2, \dots, N$, como mostrado na figura 3.1.

Utilizaremos, como feito na seção 3.1.1, o método de diferenças finitas com esquema centrado na malha, onde o fluxo de nêutrons e a concentração de precursores médios na malha n são assim definidos, respectivamente:

$$\bar{\varphi}_g^n(t) \equiv \frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \varphi_g(x, t) dx \quad e \quad \bar{C}^n(t) \equiv \frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} C(x, t) dx.$$

Integrando, então, as equações (4.1) e (4.2), para uma malha genérica n e um gupo de precursores, obtemos então o conjunto de equações discretizadas na forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\bar{\varphi}_g^n(t)}{dt} &= a_g^n \bar{\varphi}_g^{n-1}(t) + b_g^n \bar{\varphi}_g^n(t) + c_g^n \bar{\varphi}_g^{n+1}(t) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}^n(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) \Delta x_n + \\ &+ (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n(t) \bar{\varphi}_{g'}^n(t) \Delta x_n + \lambda \bar{C}^n(t) \Delta x_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\bar{C}^n(t)}{dt} = \beta \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg}^n(t) \bar{\varphi}_g^n(t) \Delta x_n - \lambda \bar{C}^n(t) \Delta x_n \quad (4.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_g^n &\equiv - \frac{2D_g^{n-1} D_g^n}{D_g^{n-1} \Delta x_n + D_g^n \Delta x_{n-1}} \\ b_g^n &\equiv \Sigma_{Rg}^n + \frac{2D_g^{n-1} D_g^n}{D_g^{n-1} \Delta x_n + D_g^n \Delta x_{n-1}} + \frac{2D_g^n D_g^{n+1}}{D_g^n \Delta x_{n+1} + D_g^{n+1} \Delta x_n} \\ c_g^n &\equiv - \frac{2D_g^n D_g^{n+1}}{D_g^n \Delta x_{n+1} + D_g^{n+1} \Delta x_n} \end{aligned}$$

Para esse problema tem-se dois grupos de energia com N pontos de malha e um grupo de precursores, para cada ponto de malha. Então tem-se $3N$ equações, que podem ser escritas na forma matricial como segue:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 A_1 + v_1(1 - \beta) F_1 & v_1(1 - \beta) F_2 & v_1 \lambda I \\ v_2 S & v_2 A_2 & 0 \\ \beta F_1 & \beta F_2 & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ C(t) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

onde φ_1 , φ_2 e C são matrizes colunas assim definidas:

$$\varphi_g(t) \equiv \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_g^1(t) \\ \bar{\varphi}_g^2(t) \\ \bar{\varphi}_g^3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\varphi}_g^N(t) \end{pmatrix},$$

onde $g = 1, 2$.

$$C(t) \equiv \begin{pmatrix} \bar{C}^1(t) \\ \bar{C}^2(t) \\ \bar{C}^3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{C}^N(t) \end{pmatrix},$$

enquanto que A_1, A_2, F_1, F_2 e S possuem a mesma forma das matrizes definidas na seção 3.1.1.

Para simplificar a compreensão sobre a discretização no tempo e integração analítica da equação da concentração de precursores que será realizada na próxima seção, reescreveremos a equação (4.5) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 A_1 + v_1(1 - \beta)F_1 & v_1(1 - \beta)F_2 \\ v_2 T & v_2 A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} C(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} C(t) = \beta \sum_{g=1}^2 F_g \varphi_g(t) - \lambda C(t). \quad (4.7)$$

4.2 Discretização no Tempo

Na seção anterior um conjunto de equações diferenciais ordinárias, dependentes do tempo, foram obtidas. Para resolver as equações (4.6) e (4.7), foram adotados dois procedimentos de integração numérica. O primeiro integra analiticamente a equação da concentração de precursores (4.7), como dito em DE LIMA [2], STACEY [9] e LAWRENCE [10], enquanto que o outro resolve a equação (4.6) usando o método de Cranck-Nicholson [2, 6, 9].

4.2.1 Solução Analítica da Equação da Concentração de Precursores

As equações da cinética espacial formam um sistema de equações rígido. Os valores de $(1/v_g)$ são da ordem de 10^{-7} , enquanto que os menores valores de λ são da ordem de 10^{-2} , caracterizando escalas diferentes de tempo em um mesmo problema. O uso da integração analítica da concentração de precursores se torna muito importante na redução da rigidez do sistema.

A integração analítica da concentração de precursores será realizada considerando que a fonte de fissão, dada pelo termo $\sum_{g=1}^2 F_g(t)\varphi_g(t)$, varie linearmente no tempo dentro de cada intervalo de tempo, $[t_l, t_{l+1}]$, discretizado (Figura 4.1).

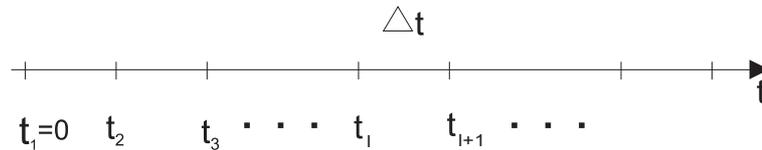


Figura 4.1: Esquema de discretização no tempo.

Com esta aproximação a equação (4.7) fica da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}C(t) = -\lambda C(t) + \beta \sum_{g=1}^2 F_g(t_l)\varphi_g(t_l) +$$

$$+ \frac{\beta}{\Delta t} (t - t_l) \left[\sum_{g=1}^2 F_g(t_{l+1}) \varphi_g(t_{l+1}) - \sum_{g=1}^2 F_g(t_l) \varphi_g(t_l) \right] \quad (4.8)$$

Agora, integrando a equação (4.8) no intervalo $[t_l, t_{l+1}]$, obtemos uma expressão para $C(t_{l+1})$, qual seja:

$$C(t_{l+1}) = C(t_l) e^{-\lambda \Delta t} + \beta \left[a \sum_{g=1}^2 F_g(t_{l+1}) \varphi_g(t_{l+1}) + b \sum_{g=1}^2 F_g(t_l) \varphi_g(t_l) \right], \quad (4.9)$$

onde os coeficientes a e b são assim definidos:

$$a \equiv \frac{(1 + \lambda \Delta t)(1 - e^{-\lambda \Delta t})}{\lambda^2 \Delta t} - \frac{1}{\lambda} \quad e \quad b \equiv \frac{\lambda \Delta t - 1 + e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda^2 \Delta t}.$$

4.2.2 Solução da Equação que Governa o Fluxo de Nêutrons

Para discretização no tempo da equação (4.6) usamos o método de Cranck-Nicholson, como sugerem SUTTON [1], DE LIMA [2], NAKANURA [6] e STACEY [9], adotando o parâmetro θ igual a 0,5. Sendo assim, a equação (4.6) torna-se:

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A(t_{l+1}) \right)^{-1} \underline{\Phi}(t_{l+1}) = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A(t_l) \right) \underline{\Phi}(t_l) + v_1 \Delta t \lambda \underline{C}(t_{l+1}) \quad (4.10)$$

com

$$\underline{\Phi}(t_l) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(t_l) \\ \varphi_2(t_l) \end{pmatrix}, \quad \underline{C}(t_{l+1}) \equiv \begin{pmatrix} C(t_{l+1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A(t_l) \equiv \begin{pmatrix} -v_1 A_1(t_l) + v_1(1 - \beta)F_1(t_l) & v_1(1 - \beta)F_2(t_l) \\ v_2 S(t_l) & v_2 A_2(t_l) \end{pmatrix}.$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.10) chegamos, finalmente, ao sistema de equações lineares a ser resolvido, qual seja,

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t_{l+1}) \\ \varphi_2(t_{l+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t_l) \\ \varphi_2(t_l) \end{pmatrix} + \lambda e^{-\lambda \Delta t} \begin{pmatrix} C(t_l) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

onde os blocos de matrizes são dados por

$$T_{11} = I - \frac{\Delta t}{2} A_{11}(t_{l+1}) - v_1 \Delta t \lambda \beta b F_1(t_{l+1}),$$

$$T_{12} = -A_{12}(t_{l+1}) - v_1 \Delta t \lambda \beta b F_2(t_{l+1}),$$

$$T_{21} = -A_{21}(t_{l+1}),$$

$$T_{22} = I - \frac{\Delta t}{2} A_{22}(t_{l+1}),$$

$$R_{11} = I + \frac{\Delta t}{2} A_{11}(t_l) + v_1 \Delta t \lambda \beta a F_1(t_l),$$

$$R_{12} = v_1 \Delta t \lambda \beta a F_2(t_l),$$

$$R_{21} = A_{21}(t_l) \quad e$$

$$T_{22} = I + \frac{\Delta t}{2} A_{22}(t_l).$$

onde:

$$A_{11}(t_l) \equiv -v_1 A_1(t_l) + v_1(1 - \beta) F_1(t_l);$$

$$A_{12}(t_l) \equiv v_1(1 - \beta) F_2(t_l);$$

$$A_{21}(t_l) \equiv v_2 S(t_l)$$

e

$$A_{22}(t_l) \equiv v_2 A_2(t_l).$$

O sistema de equações lineares em (4.11) é resolvido diretamente, em cada passo no tempo, por meio da decomposição LU e eliminação progressiva e substituição regressiva [11].

4.3 Método do Cálculo Direto - Referência

Para implementar o método direto foi criado um programa em Fortran, que foi chamado de KDF1D2G. Com este programa foi possível gerar as soluções de referência para os casos a serem estudados. A seqüência geral dos procedimentos do KDF1D2G é a seguinte:

- O fluxo inicial $\varphi_g(0)$ é o próprio fluxo obtido na solução do problema estacionário, por meio de diferenças finitas, DF , e de acordo com a equação (4.7), a concentração inicial de precursores $C(0)$ é dada por:

$$C(0) = \frac{\beta}{\lambda} \left(F_1(0) \varphi_1(0) + F_2(0) \varphi_2(0) \right).$$

- Na seqüência, o sistema linear (4.11) é resolvido para $\varphi_g(t_{l+1})$, para $l = 1, 2, \dots$, e a concentração de precursores $C(t_{l+1})$ é atualizada pela equação (4.9).

Capítulo 5

Soluções das Equações da Cinética Pontual

5.1 Solução Analítica

Para ρ/Λ e β_i/Λ independentes do tempo, a solução das equações da Cinética Pontual (2.19) é direta. De acordo com a proposta em análise, nós realizaremos com detalhes a solução analítica das equações da cinética fazendo $Q(t)$ igual a zero, ou seja, sem fonte externa e com a suposição de que exista apenas um grupo de precursores. Logo a equação (2.19), na forma matricial, se reduz a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho-\beta}{\Lambda} & \lambda \\ \frac{\beta}{\Lambda} & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ C(t) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

O método das transformadas de Laplace fornece um bom caminho para a solução destas equações lineares acopladas. Entretanto, iremos aplicar um critério de aproximação uniforme, assumindo que as soluções particulares sejam tais que $T(t) \approx C(t) \approx e^{wt}$ e então fazendo uma combinação linear dessas soluções particulares para encontrar a solução geral que obedece as condições iniciais do problema. Se o comportamento exponencial assumido é correto então, segue que

$$\frac{dT(t)}{dt} = wT(t)$$

e

$$\frac{dC(t)}{dt} = wC(t).$$

Elas serão válidas se

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho-\beta}{\Lambda} - w & \lambda \\ \frac{\beta}{\Lambda} & -(w + \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

Para que o sistema de equações (5.2) tenha solução diferente da solução trivial, o determinante da matriz dos coeficientes tem que se nulo, ou seja,

$$w^2 - \left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda} - \lambda\right)w - \frac{\lambda\rho}{\Lambda} = 0, \quad (5.3)$$

cuja solução é:

$$w_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda} - \lambda \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda} - \lambda \right)^2 + \frac{\beta\lambda}{\Lambda} \right]}. \quad (5.4)$$

Então, a solução geral será da forma:

$$T(t) = T_1 \exp(w_1 t) + T_2 \exp(w_2 t) \quad (5.5)$$

$$C(t) = C_1 \exp(w_1 t) + C_2 \exp(w_2 t).$$

Para determinarmos os coeficientes, T_1 , T_2 , C_1 e C_2 , precisamos aplicar as condições iniciais, onde consideramos que para $t = 0$ temos $T(t = 0) = T_0$. E daí vamos requerer que para $t < 0$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow C(0) = \frac{\beta}{\lambda\Lambda} T_0. \quad (5.6)$$

Logo as condições iniciais são:

$$T(0) = T_0 \quad e \quad C(0) = \frac{\beta}{\lambda\Lambda} T_0. \quad (5.7)$$

A solução completa da equação (5.1) pode assim ser escrita em termos de ρ , β , Λ , λ , $T(0)$, $C(0)$ e t . Entretanto, a expressão resultante é complicada, e torna-se difícil compreender a influência de ρ em sua solução, sem executarmos muitos

cálculos numéricos, como elucidada HENRY [3]. De acordo com esta observação e tendo interesse em desenvolver uma solução analítica que proporcione um entendimento físico, iremos fazer uma aproximação que irá simplificar bastante as estruturas algébricas da solução (5.5).

A aproximação é baseada no fato que, exeto para ρ próximo a β , uma raiz de (5.4) é muito grande em magnitude e a outra é muito pequena. Sabendo disto, podemos determinar uma solução aproximada da equação (5.3) notando que para a raiz w_1 , grande em magnitude e $w_1^2 \gg \lambda\rho/\Lambda$, sendo assim $\lambda\rho/\Lambda$ em (5.3) pode ser negligenciado. Similarmente, para a raiz w_2 , de pequena magnitude e $w_2^2 \ll \lambda\rho/\Lambda$, e w_2^2 em (5.3) pode ser negligenciado. Assim, para $w_1^2 \gg w_2^2$,

$$w_1 \cong \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} \quad e \quad w_2 \cong -\left(\frac{\beta - \rho}{\Lambda}\right), \quad (5.8)$$

onde λ na equação (5.3), também foi considerado pequeno em comparação com $(\rho - \beta)/\Lambda$.

Podemos assim escrever a função amplitude $T(t)$ como:

$$T(t) \cong T_0 \left[\left(\frac{\beta}{\beta - \rho}\right) \exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta - \rho}\right)t - \left(\frac{\rho}{\beta - \rho}\right) \exp\left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right)t \right]. \quad (5.9)$$

A equação (5.9) nos fornece a função amplitude em um instante t qualquer para uma dada reatividade ρ [2].

5.2 Solução Numérica

A proposta da presente seção é desenvolver uma solução numérica das Equações da Cinética Pontual a um grupo de precursores baseada no método de diferenças finitas, como consta em NAKAMURA[6] e em ALVIM[8]. A série de Taylor pode ser usada para se encontrar valores de uma função $f(x)$ na vizinhança de x_0 , onde as derivadas de todas as ordens são conhecidas. A série de Taylor também é usada para encontrar aproximadamente os valores das derivadas de uma função $f(x)$ se os valores de $f(x)$ são conhecidos para um número discreto de pontos $\{x_i\}; i = 1, 2, \dots, I$.

Suponhamos que conhecemos os valores de $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$, onde h é uma quantidade pequena. A expansão em série de Taylor para $f(x_0 + h)$ é

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \dots \quad (5.10)$$

Se truncarmos após à primeira derivada e resolvermos a equação para $f'(x_0)$, obtemos a seguinte aproximação

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] \quad (5.11)$$

Assim a primeira derivada para $x = x_0$ é aproximadamente encontrada através de $f(x_0 + h)$ e $f(x_0)$. Definindo diferenças finitas avançadas como

$$\Delta f(x_0) \equiv [f(x_0 + h) - f(x_0)] \quad (5.12)$$

e

$$\Delta x_0 \equiv (x_0 + h) - x_0 = h,$$

o lado direito da equação (5.12) pode ser expresso na forma:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0}, \quad (5.13)$$

que é a fórmula que caracteriza o método de diferenças avançadas [5]. Ilustramos o processo na figura (5.1) abaixo.

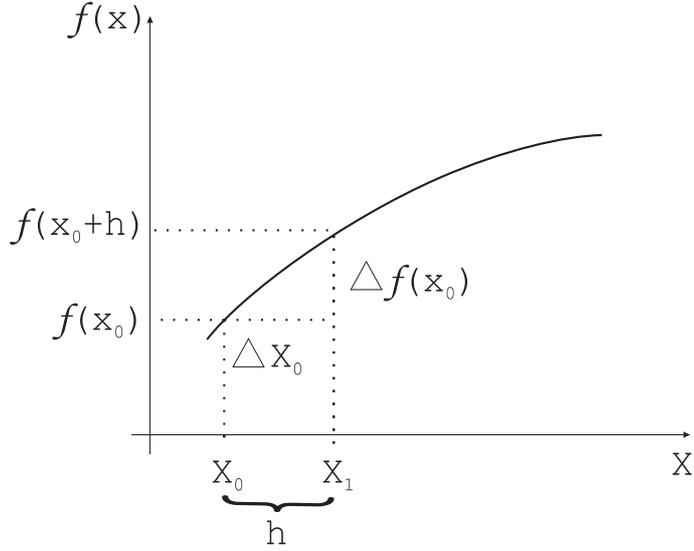


Figura 5.1: Diferenças Finitas Avançadas

Vamos agora escrever as equações da Cinética Pontual usando a noção de diferenças finitas avançadas, onde as funções diferenciais serão agora a diferencial da função amplitude $\frac{dT(t)}{dt}$ e a diferencial dos precursores $\frac{dC(t)}{dt}$. As equações da cinética pontual a um grupo de precursores por diferenças finitas ficam na forma:

$$\frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \approx \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} T(t + \Delta t) + \lambda C(t + \Delta t)$$

e

(5.14)

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \approx \frac{\beta}{\Lambda} T(t + \Delta t) - \lambda C(t + \Delta t),$$

onde reescrevemos as equações (5.14) da seguinte maneira:

$$T_{i+1} - T_i \approx \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} \Delta t T_{i+1} + \lambda \Delta t C_{i+1}$$

(5.15)

$$C_{i+1} - C_i \approx \frac{\beta}{\Lambda} \Delta t T_{i+1} - \lambda \Delta t C_{i+1},$$

com $T_i \equiv T(t_i)$, $T_{i+1} \equiv T(t_i + \Delta t)$, $C_i \equiv C(t_i)$ e $C_{i+1} \equiv C(t_i + \Delta t)$.

Das equações (5.15) podemos escrever:

$$T_{i+1} \approx \frac{1}{\left(1 - a_1 - \frac{a_2 a_3}{1+a_2}\right)} \left(T_i + \frac{a_2}{1+a_2} C_i\right)$$

(5.16)

$$C_{i+1} \approx \frac{1}{1-a_2} \left[\frac{1}{1-a_3 - \frac{a_2 a_3}{1+a_2}} \left(T_i + \frac{a_2}{1+a_2} C_i\right) + C_i \right]$$

onde:

$$a_1 \equiv \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} \Delta t,$$

$$a_2 \equiv \lambda \Delta t$$

e

$$a_3 \equiv \frac{\beta}{\Lambda} \Delta t.$$

Capítulo 6

Aproximação Adiabática

6.1 Introdução

A situação de interesse, qual seja, a análise da distribuição espaço-tempo do fluxo de nêutrons através de sua fatoração, exige que um afastamento da criticalidade seja pequena a fim de que a forma de $\varphi(x, t)$ seja aproximadamente a mesma que o reator possuía quando se encontrava no estado crítico. Como na teoria de perturbação isto é requerido de maneira que a forma do fluxo não mude muito quando é inserida uma perturbação localizada. Considerando a estabilidade de um reator operando, pequenos afastamentos da criticalidade são assumidos; e desta maneira a função forma pode ser aproximada de maneira simples e com suficiente acurácia, ou seja, suprimindo a dependência temporal BELL & GLASSTONE [1]. Este método, conhecido como aproximação adiabática, simulará a evolução no tempo da função forma através de sucessivos cálculos espaciais estáticos, e isso implica dizer que a função forma responderá instantaneamente às mudanças nas propriedades do reator, não sendo muito boa essa suposição para mudanças não uniformes em larga escala HETRICK [3]. Sendo assim, será apresentado aqui um método de solução por fatoração da distribuição de potência e distribuição do fluxo de nêutrons, conhecido como aproximação adiabática, onde a forma é dada, nesta análise, pela equação da difusão a dois grupos de energia e a amplitude pelas equações da cinética pontual, que para o caso em estudo será a um grupo de precursores.

6.2 Cálculo da Função Forma

Iniciaremos a dedução da distribuição do fluxo, $\varphi(x, t)$, pelo método da aproximação adiabática. Usando a definição em (2.14) e reescrevendo-a em geometria cartesiana unidimensional a dois grupos de energia, temos:

$$\varphi_g(x, t) = f_g(x, t)T(t) \quad g = 1, 2, \quad (6.1)$$

onde como já foi dito, $f_g(x, t)$, é a função forma e $T(t)$ a função amplitude, dada pela solução das equações da cinética pontual (2.19), que para um grupo de precursores e num instante t qualquer, apresenta a seguinte forma:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} T(t) + \lambda C(t) \quad (6.2)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} T(t) - \lambda C(t), \quad (6.3)$$

sendo a reatividade $\rho(t)$, obtida a partir do k , que vem a cada instante dado pela solução da equação da difusão, assim:

$$\rho(t) = 1 - \frac{1}{k}.$$

No presente estudo, estamos considerando o fato que a função forma, $f_g(x, t)$, depende fracamente do tempo, e que esta pode ser aproximada pela solução da equação da difusão estacionária como dito em SUTTON & AVILLES [1] e YASINSKY & HENRY [9], através de sucessivos cálculos estáticos durante um transiente, por isso é aproximada adiabaticamente, como segue:

$$f_g(x, t) \approx \phi_g(x), \quad (6.4)$$

onde $\phi_g(x)$ é solução da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dx} \left(D_g(x) \frac{d}{dx} \phi_g(x) \right) + \Sigma_{Rg}(x) \phi_g(x) = \\
& = \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x) \phi_{g'}(x) + \sum_{g'=1, g' \neq g}^2 \Sigma_{gg'}(x) \phi_{g'}(x). \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Com isso, podemos escrever a equação (6.1), aproximada adiabaticamente na forma:

$$\varphi_g(x, t) \approx \phi_g(x) T(t). \tag{6.6}$$

Uma vez determinada a distribuição do fluxo de nêutrons, $\varphi_g(x, t)$, pela aproximação adiabática (6.6), escreveremos então o nível de potência, $P(t)$, utilizando a distribuição do fluxo de nêutrons adiabático, como segue:

$$P(t) \equiv \sum_{g=1}^2 w_g \int_a^b \Sigma_{fg}(x, t) \varphi_g(x, t) dx, \tag{6.7}$$

e fazendo uso da equação (6.6), podemos reescrever (6.7), na forma:

$$P(t) \approx \left(\sum_{g=1}^2 w_g \int_a^b \Sigma_{fg}(x, t) \phi_g(x) dx \right) T(t). \tag{6.8}$$

Iremos agora reescrever as equações (6.1), (6.4), (6.6) e (6.8) utilizando o método de discretização espacial por diferenças finitas. Como dito no capítulo 3 os parâmetros nucleares são constantes na malha, onde:

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} \varphi_g(x, t) dx = \left(\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} f_g(x, t) dx \right) T(t), \tag{6.9}$$

sendo

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} \varphi_g(x, t) dx \equiv \bar{\varphi}_g^n(t) \quad (6.10)$$

e

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} f_g(x, t) dx \equiv \bar{f}_g^n(t), \quad (6.11)$$

temos que (6.9) fica na forma

$$\bar{\varphi}_g^n(t) = \bar{f}_g^n(t) T(t), \quad (6.12)$$

no entanto, a função forma $f_g(x, t)$, em (6.4), aplicando diferenças finitas, fica na forma:

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} f_g(x, t) dx \approx \frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} \phi_g(x) dx, \quad (6.13)$$

então podemos rescrever (6.13), como

$$\bar{f}_g^n(t) \approx \bar{\phi}_g^n. \quad (6.14)$$

Logo, a equação (6.12), pode ser reescrita na forma:

$$\bar{\varphi}_g^n(t) \approx \bar{\phi}_g^n T(t), \quad (6.15)$$

Esta equação define bem a Aproximação Adiabática, pois notamos que a função f , por depender fracamente do tempo, é aproximada pelo fluxo de nêutrons dado pela equação da difusão na forma discreta, $\bar{\phi}_g^n$.

Reescrevendo a equação (6.8) usando método de diferenças finitas, vem:

$$\begin{aligned}
P(t) &\approx \left(\sum_{g=1}^2 w_g \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \Sigma_{fg}(x, t) \phi_g(x) dx \right) T(t) = \\
&= \left(\sum_{g=1}^2 w_g \sum_{n=1}^N \Sigma_{fg}^n(t) \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^-} \phi_g(x) dx \right) T(t). \tag{6.16}
\end{aligned}$$

como

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{x_{n-1}^+}^{x_n^+} \phi_g(x) dx \equiv \bar{\phi}_g^n,$$

finalmente, podemos reescrever a equação (6.16) na forma

$$P(t) \approx \left(\sum_{g=1}^2 w_g \sum_{n=1}^N \Sigma_{fg}^n(t) \bar{\phi}_g^n \Delta x_n \right) T(t). \tag{6.17}$$

A fim de efetuarmos os sucessivos cálculos estáticos simulando a evolução no tempo que é a característica desse método, desenvolvemos o método representado na figura (6.1), demonstrando como se dá efetivamente a evolução espaço-temporal do método. As equações (6.15) e (6.17) procedem do método adiabático, no entanto como a proposta é mostrar o comportamento da distribuição de fluxo mediante perturbação, não serão mostrados resultados para potência global no capítulo a seguir.

Foi desenvolvido um programa denominado KAD1D2G, para a análise da acurácia da distribuição de fluxo pela aproximação adiabática. Será realizada, a análise, primeiramente para perturbações homogêneas e posteriormente para perturbações localizadas.

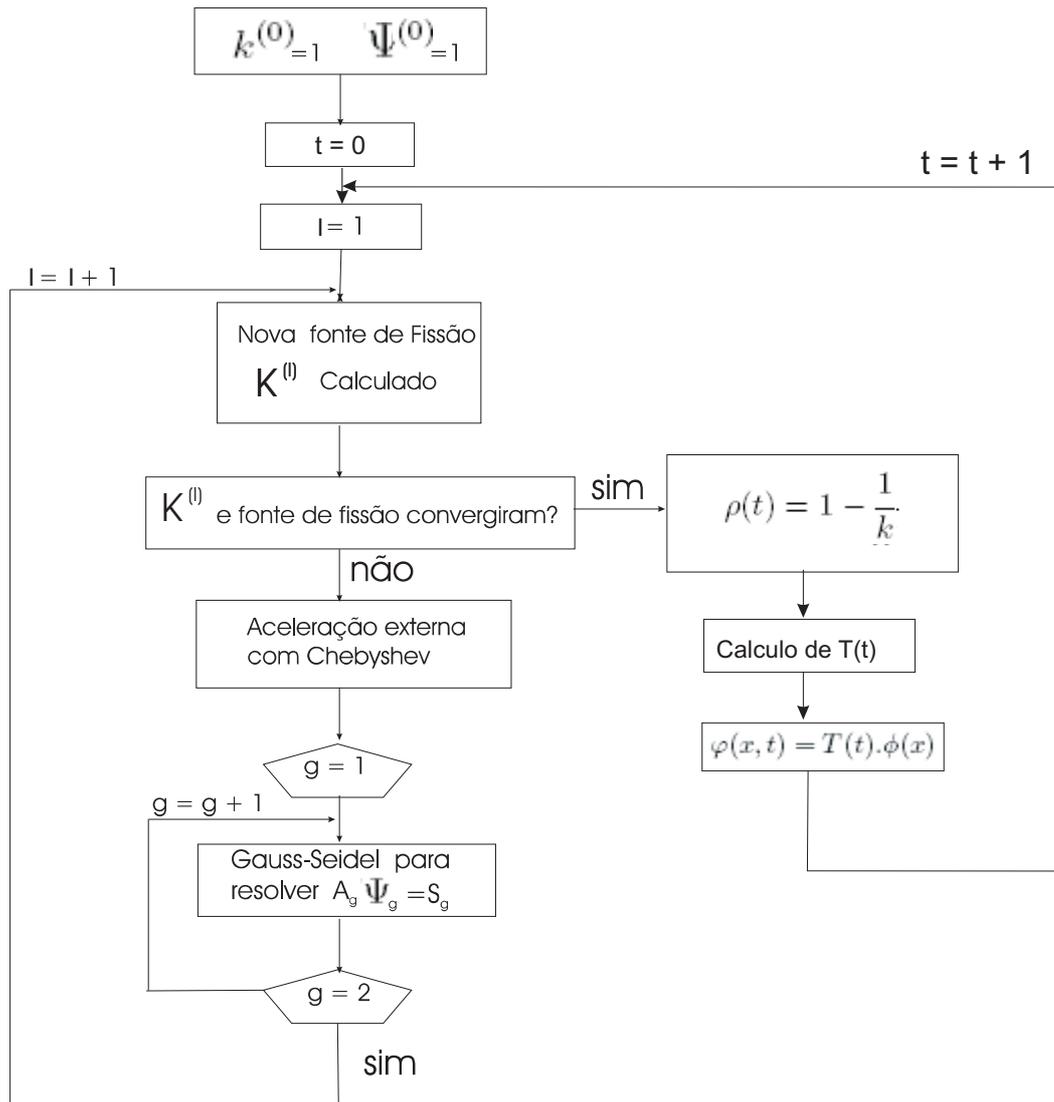


Figura 6.1: Esquema do cálculo da distribuição de fluxo para o Método Adiabático

6.2.1 Esquema Iterativo - Método das Potências

Sabemos que em qualquer solução numérica o método de diferenças finitas leva a equação da difusão de nêutrons a uma representação matricial de autovalor k^{-1} , e que a solução de tal problema pode ser obtida utilizando-se o método das potências, que é uma técnica comum de análise numérica [6]. Vamos portanto abordar agora a resolução de equações matriciais de autovalores, através do método das potências. Para esta abordagem, utilizaremos o formalismo proposto por ALVIM [8].

Seja a equação de autovalor:

$$A\Psi = \lambda\Psi; A \text{ real} \quad (6.18)$$

a qual supomos que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$. Então, o algoritmo

$$\Psi^{p+1} = A\Psi^p; p = 0, 1, \dots \quad (6.19)$$

em que Ψ^0 é arbitrário, vai gerar Ψ^p 's sucessivos, que tenderão para ξ_1 , ou seja, o autovetor associado ao maior autovalor em módulo. O quociente

$$\frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p\right)},$$

onde \mathbf{w} é um vetor coluna adequadamente escolhido, tenderá a λ_1 . Como supusemos que A tem autovalores distintos, estarão associados a esses autovalores, n autovetores linearmente independentes, que formam uma base para o espaço considerado.

Seja essa base $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Escrevendo

$$\Psi^{p+1} = A\Psi^p = A^{p+1}\Psi^0, \quad (6.20)$$

expandindo

$$\Psi^0 = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \quad (6.21)$$

e substituindo em (6.20) vem

$$\Psi^{p+1} = A^{p+1} \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = \sum_{i=1}^n a_i A^{p+1} \xi_i, \quad (6.22)$$

e como

$$A \xi_i = \lambda_i \xi_i \Rightarrow \Psi^{p+1} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^{p+1} \xi_i, \quad (6.23)$$

a expressão (6.23) pode ser escrita como:

$$\Psi^{p+1} = a_1 \lambda_1^{p+1} \left[\xi_1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{p+1} \xi_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{p+1} \xi_n \right]. \quad (6.24)$$

Uma vez que por hipótese, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$,

$$\Psi^p \rightarrow a_1 \lambda_1^p \xi_1$$

e se o número de iterações for elevado, temos:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Psi^p = \alpha \xi_1.$$

Portanto, Ψ tenderá ao autovetor ξ_1 associado ao maior autovalor em módulo. O quociente

$$\frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p\right)},$$

pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p\right)} &= \frac{\left(\mathbf{w}^T A^{p+1} \Psi^0\right)}{\left(\mathbf{w}^T A^p \Psi^0\right)} = \frac{\left(\mathbf{w}^T [a_1 \lambda_1^{p+1} \xi_1 + a_2 \lambda_2^{p+1} \xi_2 + \dots]\right)}{\left(\mathbf{w}^T [a_1 \lambda_1^p \xi_1 + a_2 \lambda_2^p \xi_2 + \dots]\right)} = \\ &= \frac{a_1 \lambda_1^{p+1} \left[\left(\mathbf{w}^T \xi_1\right) + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{p+1} \left(\mathbf{w}^T \xi_2\right) + \dots + \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{p+1} \left(\mathbf{w}^T \xi_{n2}\right) \right]}{a_1 \lambda_1^p \left[\left(\mathbf{w}^T \xi_1\right) + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \left(\mathbf{w}^T \xi_2\right) + \dots + \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \left(\mathbf{w}^T \xi_{n2}\right) \right]}. \end{aligned}$$

Portanto, a medida que p cresce, os $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ ($i > 1$) $\rightarrow 0$ e $\frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p\right)} \rightarrow \lambda_1$. O vetor \mathbf{w} é escolhido de forma a acelerar a convergência do processo. Usualmente faz-se $\mathbf{w} = \Psi^p$.

6.2.2 Normalização do Método das Potências

Na equação (6.24), se $|\lambda_1| > 1$, os Ψ^p irão crescer rapidamente em magnitude, à medida que formos iterando. Para contornar esse problema, costuma-se utilizar a seguinte normalização:

$$\Psi^{p+1} = A \left(\frac{\Psi^p}{\lambda^p} \right) = A \Psi_{Norm}^p,$$

$$\lambda^{p+1} = \frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi_{Norm}^p\right)}.$$

Que também pode ser escrita na como

$$\lambda^{p+1} = \lambda^p \frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p\right)},$$

com Ψ^0 arbitrário e $\lambda^0 = 1, 0$

6.2.3 Método Inverso das Potências

Seja o problema

$$A\Psi = \frac{1}{k}\Psi \quad (6.25)$$

Supondo que A possua inversa, podemos escrever:

$$k\Psi = A^{-1}\Psi. \quad (6.26)$$

Podemos então aplicar o método das potências ao problema de autovalor acima, onde basta substituir A por A^{-1} no algoritmo (6.19) anteriormente estudado, para obter o maior autovalor e seu autovetor associado. O método inverso é dado por:

$$\Psi^{p+1} = A^{-1} \left[\frac{\Psi^p}{k^p} \right] = A^{-1} \Psi_{Norm.}^p, \quad (6.27)$$

$$k^{p+1} = \frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1} \right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi_{Norm.}^p \right)}. \quad (6.28)$$

ou

$$\Psi^{p+1} = \frac{1}{k^p} A^{-1} \Psi^p, \quad (6.29)$$

$$k^{p+1} = k^p \frac{\left(\mathbf{w}^T \Psi^{p+1} \right)}{\left(\mathbf{w}^T \Psi^p \right)}. \quad (6.30)$$

Logo a iteração dada pelas equações (6.27) e (6.28) ou (6.29) e (6.30), determina o maior autovalor de (6.25) e o autovetor associado a este autovalor. Entretanto, como pode ser visto, para computar Ψ é necessário inverter a matriz A . Devido a isto este método é conhecido como método inverso das potências. Vimos que a solução da equação da difusão discretizada no capítulo 3, pode ser escrita como

$$A\Psi = \frac{1}{k}F\Psi. \quad (6.31)$$

Podemos reescrever (6.31) na forma

$$A^{-1}F\Psi = k\Psi, \quad (6.32)$$

pois sabemos que A possui inversa. Aplicando então o método das potências com normalização ao problema de autovalor (6.32) acima, vem

$$\Psi^{p+1} = \frac{1}{k^p}A^{-1}F\Psi^p \Rightarrow A\Psi^{p+1} = \frac{1}{k^p}F\Psi^p, \quad (6.33)$$

$$k^{p+1} = k^p \frac{\left(\mathbf{w}^T F\Psi^{p+1}\right)}{\left(\mathbf{w}^T F\Psi^p\right)}, \quad (6.34)$$

onde, Ψ^0 é arbitrário e k^0 é igual a 1,0.

6.2.4 Aceleração de Chebyshev

Existe também um forte incentivo de fazer o mínimo de iterações possíveis para convergir com a acurácia desejada. Por esta razão acelera-se a convergência das iterações externas por extrapolação da fonte. Para isso utilizamos, o processo iterativo Chebyshev para acelerar a convergência do problema de autovalor, usando combinação linear de vetores previamente definidos. Os polinômios de Chebyshev são usados para se obter a melhor combinação linear quando o maior autovalor é

desconhecido. Isto é realizado inserindo um parâmetro de extrapolação. Por exemplo, com um único parâmetro de extrapolação, teríamos a extrapolação de fonte escrito da seguinte maneira:

$$S^{(n)} = \frac{1}{k^{(n)}} F\Psi^{(n)} + \alpha^n \left(\frac{1}{k^{(n)}} F\Psi^{(n)} - S^{(n-1)} \right) \quad (6.35)$$

para dois parâmetros de extrapolação temos a seguinte forma:

$$S^{(n)} = \frac{1}{k^{(n)}} F\Psi^{(n)} + \alpha^n \left(\frac{1}{k^{(n)}} F\Psi^{(n)} - S^{(n-1)} \right) + \beta^n (S^{(n-1)} - S^{(n-2)}) \quad (6.36)$$

Os parâmetros de extrapolação α^n e β^n , podem ser escolhidos usando métodos baseados na interpolação polinomial de Chebyshev [7]. Em nosso estudo usaremos o método de extrapolação de fonte de um parâmetro com parâmetro fixo, ou seja, utilizamos a equação (6.35) e mantemos o parâmetro α^n constante, ou seja, $\alpha^n = \alpha$. Com base em alguns testes prévios, podemos afirmar que para $\alpha = 1,98$, obtivemos uma diminuição de 106 iterações para 63 iterações, ou seja, quase 60% a menos do total de iterações.

6.2.5 Fluxograma do Processo Iterativo

Na figura 6.2 representamos esquematicamente a estratégia para a obtenção do fator de multiplicação efetivo k_{eff} e de seu respectivo autovetor Ψ . O resultado para solução da equação da difusão a dois grupos será exposto no capítulo 7.

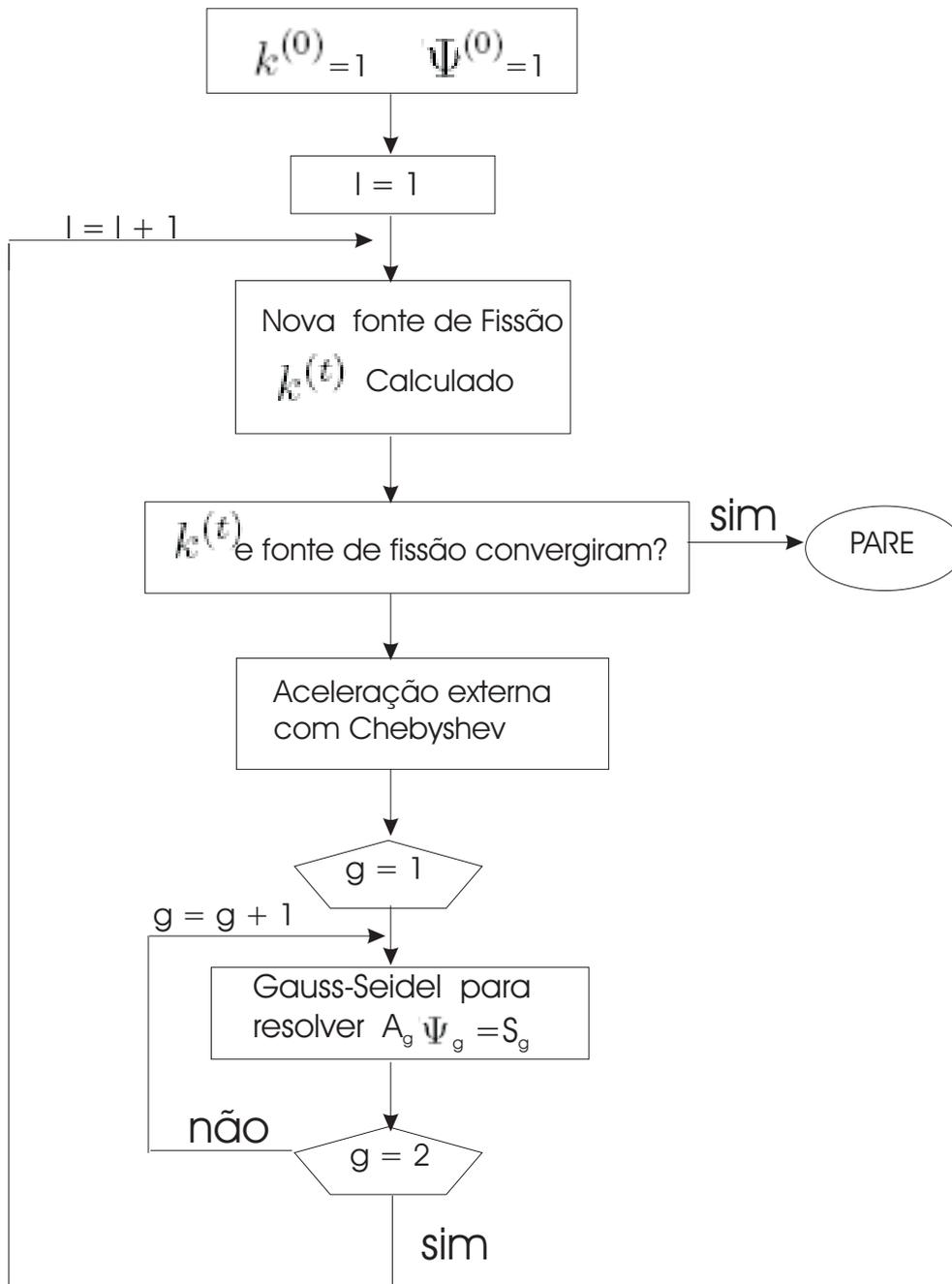


Figura 6.2: Estratégia de cálculo para obtenção do fluxo estacionário e do fator de multiplicação

Capítulo 7

Apresentação e Análise dos Resultados

7.1 Soluções Analítica e Numérica da Equações da Cinética Pontual

Usaremos agora as soluções representadas pelas equações (5.9) e (5.16) e faremos uma breve análise dos resultados que obteremos. Os parâmetros cinéticos utilizados nas análises realizadas são apresentadas na tabela (7.1), onde 1 e 2 representam, respectivamente, a primeira e a segunda análise e o passo no tempo é da ordem de $10^{-3}s$, para as duas análises.

Tabela 7.1: Parâmetros Cinéticos

	ρ	β	Λ	λ
1	0,00076	0,0075	0,00001	0,08
2	0,005	0,0075	0,00001	0,08

Apresentamos então uma comparação gráfica dos dois métodos de solução, onde os resultados para ambos os métodos, ou seja, para solução analítica $T(t)$ e para solução numérica T_i , foram colocados no mesmo gráfico, para um transiente de 600 segundos, ou seja, 10 min, entretanto justapomos os resultados para $\rho > 0$ e $\rho < 0$.

- Para $\rho = 0,00076$ e $\rho = -0,00076$, temos:

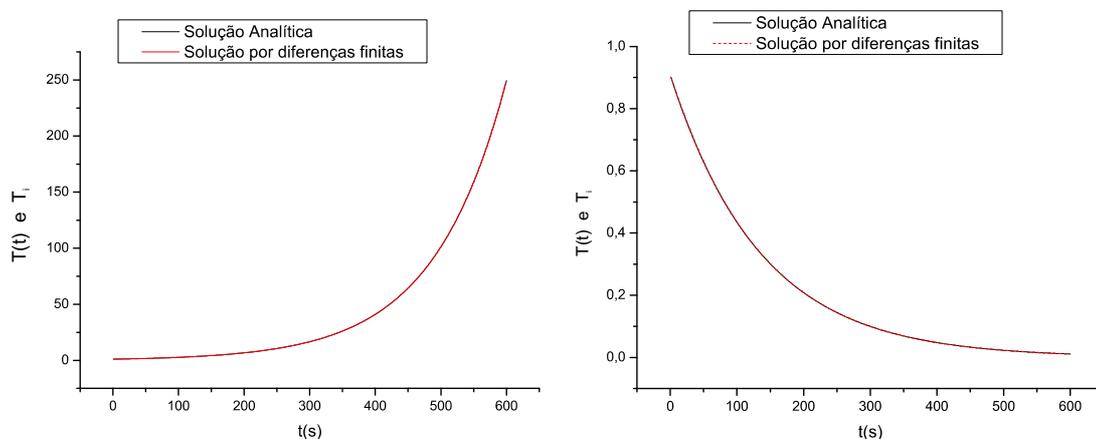


Figura 7.1: Curvas superpostas da solução analítica aproximada e solução numérica, para reatividade de 76PCMs positivos e negativos respectivamente

- Para $\rho = 0,005$ e $\rho = -0,005$, temos:

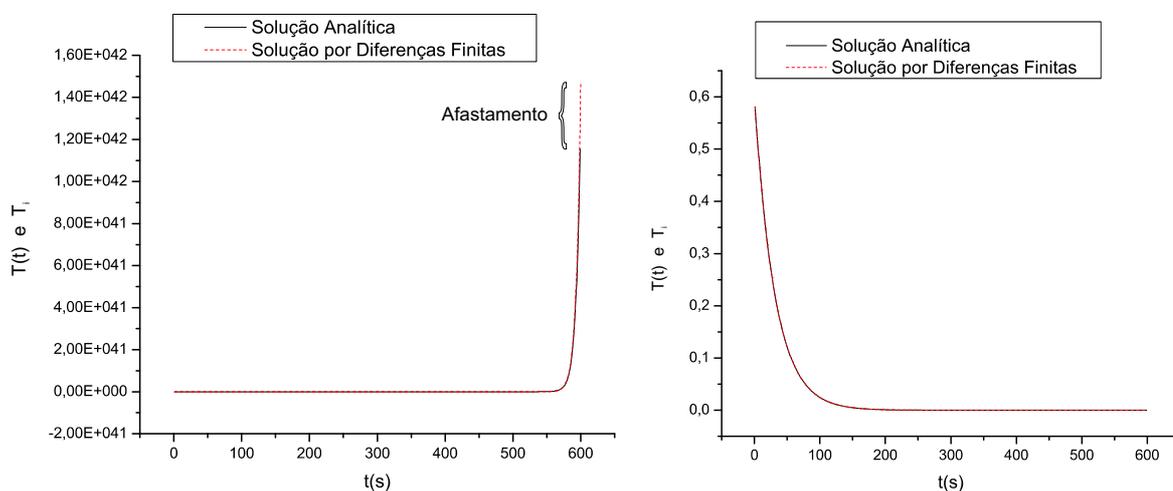


Figura 7.2: Curvas superpostas da solução analítica aproximada e solução numérica, para reatividade de 500PCMs positivos e negativos respectivamente.

Percebemos então, como esperávamos, um comportamento exponencial em ambas as equações, observamos também que para os valores da reatividade próximos à criticidade a solução analítica superpõe a solução por diferenças finitas onde o maior

desvio percentual entre a solução analítica e a solução por diferenças finitas é de 0,07% para $\rho = 0,00076$ e 0,08% para $\rho = -0,00076$, como observado na primeira comparação. Para um desvio da criticalidade mais acentuado observamos que a solução analítica se afasta da solução numérica acarretando um desvio percentual de 8,19% para $\rho = 0,005$ e de 0,1% para $\rho = -0,005$, como verificado no segundo caso.

7.2 Análise dos Resultados para aproximação adiabática

A primeira análise consiste em verificar a validade da aproximação adiabática, comparando-a com a solução de referência, desenvolvida no capítulo 6, para uma perturbação homogênea, simulando acúmulo de Xenônio ou inserção de Boro no núcleo. A segunda análise consiste em fazer o mesmo procedimento mas o caso será para uma perturbação localizada.

7.2.1 Benchmark BSS-1-A2

Neste ponto temos o propósito de comparar a distribuição de fluxo de nêutrons dado pela aproximação adiabática e o método de diferenças finitas direto, considerando o último como solução de referência. Para esta comparação utilizamos a configuração de núcleo que chamaremos de BSS-1-A2, que é uma adaptação do benchmark BSS-6-A2 de um reator slab finito de uma dimensão usado por STACEY [9]. A figura 7.3, mostra exatamente como é a geometria do núcleo ao qual foi aplicado uma discretização espacial uniforme acarretando em 240 pontos de malha, onde cada malha possui 1cm. Os parâmetros nucleares a dois grupos de energia são mostrados na tabela (7.2), onde consta os dados para as três regiões nas quais o núcleo foi dividido.

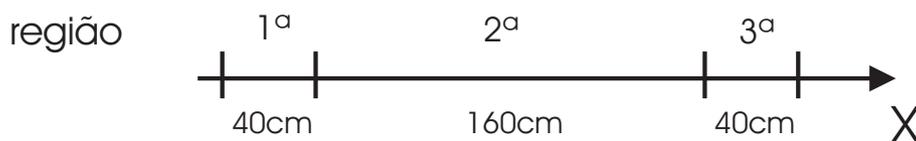


Fig 7.3: Configuração do reator slab

Tabela 7.2: Dados Nucleares do benchmark BSS-1-A2

<i>Constantes</i>	Região 1 e 3	Região 2
$D_1(cm)$	1,5	1,0
$D_2(cm)$	0,5	0,5
$\Sigma_{r1}(cm^{-1})$	0,026	0,02
$\Sigma_{r2}(cm^{-1})$	0,18	0,08
$\Sigma_{s2,1}(cm^{-1})$	0,015	0,01
$\nu\Sigma_{f1}(cm^{-1})$	0,01	0,005
$\nu\Sigma_{f2}(cm^{-1})$	0,2	0,099
χ^1	1,0	1,0
χ^2	0,0	0,0
$v^1(cm/s)$	$1,0 \times 10^7$	$1,0 \times 10^7$
$v^2(cm/s)$	$3,0 \times 10^5$	$3,0 \times 10^5$
β	0,00025	0,00025
λ	0,0124	0,0124

7.2.2 Perturbação Global

Para o problema de perturbação global, simulando acúmulo de Xenônio ou inserção de Boro, foi utilizado o Benchmark BSS-1-A2 (National Energy Software 1985), acima descrito. Nesta seção mostramos o resultado de perturbações inseridas, sendo as mesmas para todas as regiões, ou seja, as seções de choque de absorção das diferentes regiões foram perturbadas da seguinte forma:

$$\Sigma'_{Ag}(t) = \Sigma_{Ag}(t) + a, \quad (7.1)$$

onde a , é uma quantidade que inserida em (7.1), acarretará numa alteração da seção de choque de absorção, ou seja, a será aqui a perturbação inserida.

Introduzimos esta perturbação no núcleo no instante $t = 0$, e executamos os programas KDF2G-A1 e KAD1D2G, obtendo a distribuição de fluxo de nêutrons com as soluções de ambos, que foram comparados adotando a seguinte relação para o desvio percentual [13]:

$$\epsilon(\%) = \frac{|\varphi_{Ref} - \varphi_{Ad}|}{\varphi_{Ref}} \cdot 100, \quad (7.2)$$

onde, φ_{Ref} e φ_{Ad} , são respectivamente as distribuições de fluxo dada pela solução de referência e pela aproximação adiabática.

Tabela 6.2: Resultados para transiente de 1s

α	Percentual de perturbação		Grupo Rápido		Grupo Térmico	
	grupo I	grupo II	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,0009	0,5%	0,55%	14,36073	0,01896	14,27618	0,03098
0,0008	0,44%	0,49%	12,02032	0,01831	12,02032	0,02286
0,0007	0,39%	0,42%	9,88913	0,2331	9,82978	0,00968
0,0006	0,33%	0,36%	7,73564	0,0071	7,73564	0,0071
0,0005	0,28%	0,30%	5,81101	0,00768	5,77583	0,00555
0,0004	0,22%	0,24%	4,02079	0,00663	3,99651	0,000824
0,0003	0,17%	0,18%	2,46846	0,00304	2,45372	0,000580
0,0002	0,11%	0,12%	1,22343	0,0004269	1,21635	0,000427
0,0001	0,06%	0,06%	0,37107	0,021	0,36914	0,02211

Tabela 6.3: Resultados para transiente de 2s

α	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,0009	14,36007	0,01842	14,27552	0,03103
0,0008	12,09163	0,01788	12,01969	0,02288
0,0007	9,88856	0,02302	9,82922	0,00963
0,0006	7,78212	0,01687	7,73514	0,00717
0,0005	5,8105	0,00749	5,77532	0,00553
0,0004	4,02027	0,00657	3,99599	0,000841
0,0003	2,46808	0,00288	2,45335	0,000505
0,0002	1,22312	0,00048	1,21604	0,000463
0,0001	0,3709	0,02295	0,36897	0,02215

Tabela 6.4: Resultados para transiente de 3s

α	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,0009	14,35952	0,01836	14,27281	0,03183
0,0008	12,09107	0,01783	12,01913	0,02283
0,0007	9,88797	0,02294	9,82863	0,00962
0,0006	7,78154	0,01695	7,73456	0,00717
0,0005	5,80994	0,00745	5,77477	0,0055
0,0004	4,01978	0,00655	3,9955	0,000853
0,0003	2,46768	0,00282	2,45294	0,000467
0,0002	1,22281	0,000571	1,21573	0,000506
0,0001	0,37068	0,02193	0,36875	0,02214

Tabela 6.5: Resultados para transiente de 4s

α	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,0009	14,35891	0,01833	14,27437	0,03098
0,0008	12,09043	0,01779	12,0185	0,02284
0,0007	9,88732	0,02289	9,82799	0,00964
0,0006	7,78095	0,01698	7,73397	0,00718
0,0005	5,80944	0,00748	5,77427	0,00544
0,0004	4,01929	0,00654	3,99502	0,000862
0,0003	2,4672	0,00284	2,45247	0,000487
0,0002	1,22249	0,000465	1,21541	0,000557
0,0001	0,3705	0,02196	0,36858	0,02217

O comportamento da distribuição de fluxo de nêutrons para o transiente de 4 segundos, calculados com os métodos direto e adiabático são mostrados na figura 7.4.

Como primeira análise dos resultados, verificamos que o erro percentual para todos os transientes nas tabelas anteriores e para todas as perturbações, se mantém constante. Logo, para perturbações globais o tempo dos transientes não influenciam no erro percentual $\epsilon(\%)$ entre os métodos comparados.

É importante salientar, que a escolha de a , foi feita inicialmente, com base nas perturbações utilizadas por NAGAYA & KOBAYASHI [14] e FEYZI INANC [15], para o mesmo núcleo, levando em conta seis grupos de precursores, benchmark BSS-6-A2, entretanto, estes fizeram testes apenas para perturbações tipo rampa localizada, inserindo 0,1% na seção de choque de absorção durante um segundo. Os testes com esta perturbação, para um grupo de precursor, utilizando os programas KDF2G-A1 e KAD1D2G, se mostraram imprecisos, no entanto com seis grupos coincidiram com os resultados obtidos por NAGAYA & KOBAYASHI [14] e FEYZI INANC [15]. Várias tentativas foram feitas até alcançarmos um valor para a razoável, para início da análise.

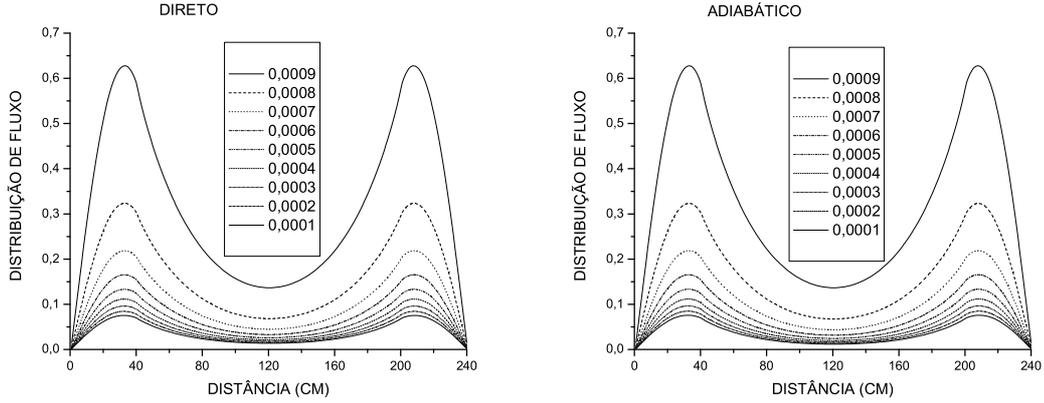


Fig 7.4: Curvas da distribuição do fluxo de nêutrons para perturbação homogênea: método direto e adiabático respectivamente

7.2.3 Perturbações Localizadas

Como primeira análise da perturbação localizada, na qual inserimos uma rampa de absorção crescente na primeira região e no segundo grupo de energia, comparamos as distribuições de fluxo obtidas pelos dois métodos desenvolvidos com a perturbação mantida durante 1 segundo, para um transiente de 1s, 2s, 3s, e 4s, em seguida o mesmo procedimento foi feito para perturbação decrescente. Vários testes foram realizados com essas perturbações tipo rampa, no entanto expomos os resultados, para o valor de $\delta\Sigma_a$ na equação (7.3), a partir de 0,000162, que equivale um acréscimo de 0,09% na seção de choque de absorção, diminuindo-se gradativamente esse acréscimo, a fim de se encontrar um limite no qual a aproximação adiabática torna-se acurada. Temos que destacar aqui que foram realizados testes com valores de $\delta\Sigma_a$ maiores que 0,000162, no entanto os erros encontrados foram muito grandes, por esta razão não vamos expor aqui valores maiores que os citados acima. Estas perturbações localizadas, foram introduzidas através da equação abaixo,

$$\Sigma_{a2}^1(t) = \Sigma_{a2}^1(0) + \delta\Sigma_a t. \quad (7.3)$$

Se $\delta\Sigma_a$ for positivo a rampa é crescente, se negativo a rampa é decrescente, logo, para esta seção usaremos $\delta\Sigma_a > 0$, na proxima usaremos $\delta\Sigma_a < 0$.

Tabela 6.6: Resultados para transiente de 1s

$\delta\Sigma_a$	Percentual de perturbação grupo II	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
		erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	0,09%	5,28367	0,00905	5,28401	0,00669
0,000144	0,08%	5,4248	0,00336	5,42509	0,00553
0,000126	0,07%	4,80656	0,00226	4,80685	0,00423
0,000108	0,06%	4,15824	0,00765	4,15851	0,0059
0,000090	0,05%	3,48444	0,02028	3,48469	0,0217
0,000072	0,04%	2,79246	0,00151	2,79268	0,000254
0,000054	0,03%	2,09317	0,01482	2,09336	0,01503
0,000036	0,02%	1,40206	0,01057	1,4022	0,00988
0,000018	0,01%	0,74073	0,000598	0,74081	0,0002254

Tabela 6.7: Resultados para transiente de 2s

$\delta\Sigma_a$	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	1,65938	0,0118	1,65927	0,01185
0,000144	1,19101	0,01198	1,19093	0,01195
0,000126	0,9152	0,00524	0,91513	0,00524
0,000108	0,69039	0,00772	0,69028	0,00773
0,000090	0,55433	0,00592	0,55425	0,00593
0,000072	0,42146	0,00163	0,4214	0,00161
0,000054	0,29442	0,00154	0,29437	0,00152
0,000036	0,17689	0,00295	0,17686	0,000308
0,000018	0,07763	0,0004822	0,077621	0,000476

Tabela 6.8: Resultados para transiente de 3s

$\delta\Sigma_a$	Grupo Rápido		Grupo Térmico	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	2,894	0,00297	2,89383	0,00282
0,000144	2,3874	0,01133	2,38726	0,01143
0,000126	1,94304	0,01482	1,94292	0,01488
0,000108	1,53349	0,00903	1,53339	0,00906
0,000090	1,1604	0,00411	1,16031	0,0041
0,000072	0,83151	0,00325	0,83141	0,00325
0,000054	0,63284	0,00103	0,63276	0,00105
0,000036	0,42819	0,00176	0,42814	0,00174
0,000018	0,21807	0,00204	0,21805	0,00203

Tabela 6.9: Resultados para transiente de 4s

$\delta\Sigma_a$	Grupo Rápido		Grupo Térmico	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	3,13534	0,002572	3,13516	0,02588
0,000144	2,62511	0,01402	2,62495	0,0139
0,000126	2,14987	0,00402	2,14973	0,00394
0,000108	1,70869	0,00467	1,70857	0,00462
0,000090	1,30359	0,01391	1,3035	0,01388
0,000072	0,94091	0,00121	0,94084	0,0012
0,000054	0,6915	0,0029	0,69142	0,00291
0,000036	0,4709	0,00262	0,47085	0,00261
0,000018	0,24196	0,00149	0,24194	0,00149

O gráfico dos dois métodos comparados para o transiente de 4 segundos com todas as perturbações inseridas estão na figura abaixo.

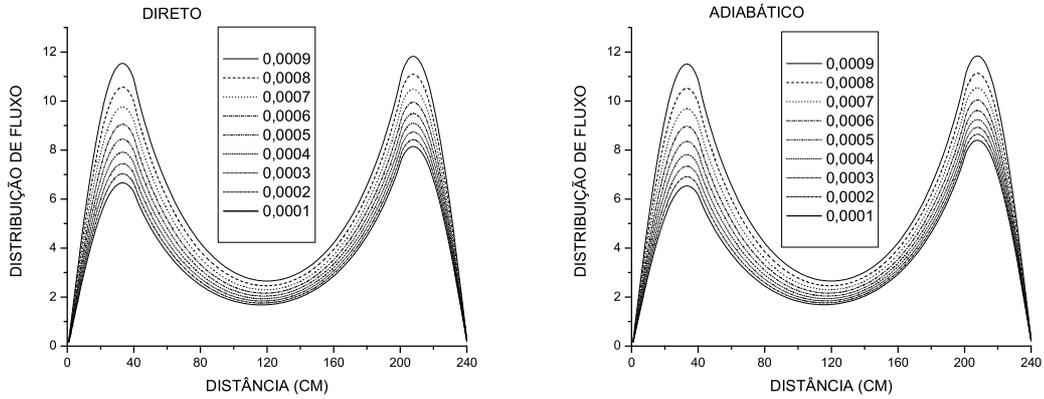


Fig 7.5: Curvas da distribuição do fluxo de nêutrons para perturbação crescente : método direto e adiabático respectivamente

Observa-se que os erros percentuais alternam em cada transiente, ou seja, ora aumenta, ora diminui, mostrando que para esse tipo de perturbação o tempo do transiente influencia no erro percentual $\epsilon(\%)$. Levando em conta que a medida que o tempo passa, a tendência do fluxo de nêutrons é de se estabilizar, tomamos o transiente de 4 segundos como referência e concluímos que para resultados satisfatórios de perturbação crescente tipo rampa, a aproximação adiabática é boa para valores de $\delta\Sigma_a \leq 0,000126$.

Rampa Decrescente

Os resultados da comparação para rampa decrescente entre os programas KDF2G-A1 e KAD1D2G são demonstrados nas tabelas abaixo seguindo os procedimentos já mencionados anteriormente para transientes de 1 a 4 segundos.

Tabela 6.10: Resultados para transiente de 1s

$ \delta\Sigma_a $	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	10,29444	0,36972	10,29047	0,3666
0,000144	11,77306	2,45458	11,76992	2,45227
0,000126	9,67076	1,54946	9,66823	1,54771
0,000108	7,40001	0,46559	7,39801	0,46428
0,000090	5,39643	0,00776	5,39487	0,00988
0,000072	3,75113	0,01558	3,74998	0,01397
0,000054	2,45145	0,00357	2,45065	0,00242
0,000036	1,45143	0,00721	1,45093	0,00793
0,000018	0,69756	0,00563	0,69733	0,0053

Tabela 6.11: Resultados para transiente de 2s

$ \delta\Sigma_a $	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	23,66864	22,20408	23,6683	22,20379
0,000144	16,87797	15,54414	16,87784	15,54406
0,000126	9,065027	8,62713	9,65023	8,62712
0,000108	5,08345	4,37998	5,08345	4,37998
0,000090	2,50146	2,07895	2,50147	2,07895
0,000072	1,1232	0,91988	1,12322	0,91988
0,000054	0,429	0,37599	0,42902	0,37598
0,000036	0,14244	0,11379	0,14243	0,11381
0,000018	0,05046	0,0059	0,05046	0,00591

Tabela 6.12: Resultados para transiente de 3s

$ \delta\Sigma_a $	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	11,15896	11,13666	11,15887	11,1363
0,000144	5,97605	5,72655	5,97596	5,72656
0,000126	2,02681	1,51844	2,02674	1,51848
0,000108	0,46183	0,00387	0,46177	0,00393
0,000090	0,75815	0,0008817	0,75809	0,000936
0,000072	0,80311	0,05319	0,80306	0,05323
0,000054	0,65818	0,0000027	0,65813	0,000198
0,000036	0,4362	0,000035	3,26137	2,64794
0,000018	0,22375	0,000189	0,22372	0,000212

Tabela 6.13: Resultados para transiente de 4s

$ \delta\Sigma_a $	<u>Grupo Rápido</u>		<u>Grupo Térmico</u>	
	erro máximo(%)	erro mínimo (%)	erro máximo(%)	erro mínimo (%)
0,000162	1,52362	1,19784	1,52346	1,19779
0,000144	0,39837	0,00201	0,39834	0,0022
0,000126	1,75352	1,90886	1,75346	0,90894
0,000108	1,86259	0,89545	1,86252	0,89552
0,000090	1,56963	0,57369	1,56956	0,57376
0,000072	1,20331	0,2634	1,20325	0,26346
0,000054	0,85567	0,04937	0,85561	0,04941
0,000036	0,54186	0,000247	0,54182	0,000189
0,000018	0,25992	0,000823	0,25989	0,000798

Se traçarmos todas as curvas obtidas, para cada método, durante 4 segundos em uma única figura, temos o que mostra a figura 7.6:

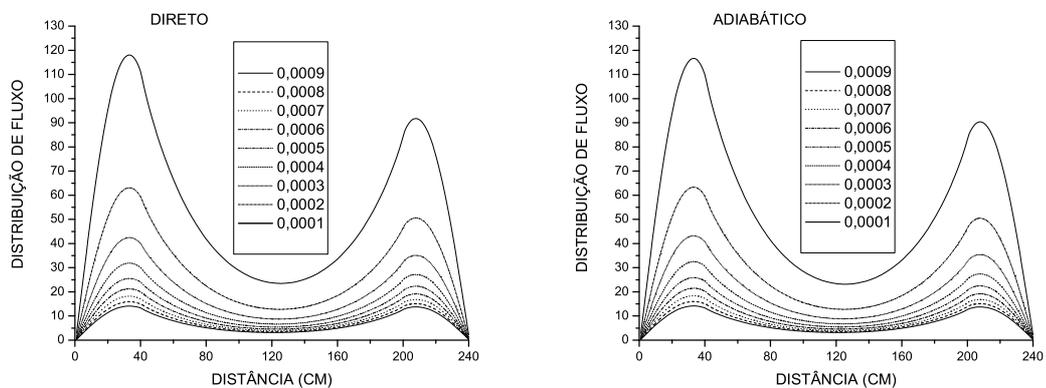


Fig 7.6: Curvas da distribuição do fluxo de nêutrons para perturbação decrescente: método direto e adiabático respectivamente

Novamente, tomando como referência a tabela com dados para o transiente de 4 segundos, verificamos que para rampa decrescente os erros percentuais são bem inferiores em relação aos outros métodos, permitindo à Aproximação Adiabática, uma perturbação mais intensa, qual seja $\delta\Sigma_a$ igual a $-0,000162$, na seção de choque de absorção.

Capítulo 8

Conclusões e sugestões

Os diversos testes realizados foram importantes para se detectar um limite de inserção de perturbação, no qual poder-se-a com mais ceteza, garantir o nível de acurácia da aproximação adiabática para o cálculo da distribuição de fluxo de nêutrons.

As perturbações homogêneas e localizadas foram submetidas a um transiente máximo de 4 segundos a fim de não restarem dúvidas das limitações que a aproximação adiabática se fazia mostrar desde o primeiro teste com a maior perturbação introduzida, ou seja, quando o valor de a for de 0,0009 na seção de choque de absorção (Σ_a) sendo a perturbação bem caracterizada para o caso homogêneo e o localizado, segundo os termos do capítulo anterior. Nota-se que para um transiente de 4 segundos, a distribuição de fluxo de nêutrons está estabilizada, acarretando um desvio absoluto máximo de apenas 0,00093 cm em relação ao transiente de 5 segundos e por isso ser razoável pararmos neste transiente os testes.

Como pode ser observado no capítulo anterior, para cada transiente analisado, ou seja, de 1 a 4 segundos, foi feita uma análise para cada perturbação até o limite em que o erro percentual se torna muito acentuado na comparação entre os programas KDF2G-A1 e KAD1D2G. É importante destacar que não foi tarefa fácil a implementação dos métodos, e que foram necessárias varias horas de teste com os programas. Importante também se faz aqui a observação de que os resultados obtidos nas tabelas (6.2),(6.3),..., (6.11) para os casos citados são referentes a um único grupo de precursores, ou seja, não foram levadas em conta as contribuições de mais grupos.

Nota-se numa primeira análise que a perturbação homogênea nos diz qual deve ser a magnitude que devemos utilizar na perturbação localizada. Logo, a primeira resposta que pode ser dada a respeito de quão pequenas são as perturbações que se devem

inserir para aplicar o método da aproximação adiabática, é que estas devem ser da ordem de 0,06% de Σ_{a2} , ou seja, para dada alteração no núcleo desta magnitude, tem-se pela aproximação adiabática um erro percentual no intervalo [14%,0.3%] para perturbação homogênea, [4%,0.2%] para rampa crescente de perturbação localizada e [5%,0.2%] para rampa decrescente de perturbação localizada. Destes três intervalos nota-se que para uma perturbação localizada tipo rampa crescente, a margem de erro ao se aplicar o método é de no máximo 4%, enquanto que para a decrescente e homogênea pode-se ocorrer erros de 5% e 14% respectivamente. Notamos também que na perturbação homogênea não importa o quão grande é o transiente, pois o erro para qualquer perturbação se mantém constante, ou seja, para a maior perturbação de nossas tabelas por exemplo, o erro para qualquer transiente é de 14%.

A partir de então os resultados serão dados para o transiente de 4s, onde se acredita que as curvas se aproximam da estabilidade e considerando que um erro de aproximadamente 2%, seja razoavelmente bom para os fins propostos.

Para que a aproximação adiabática se torne acurada deve-se introduzir uma perturbação, no caso homogênea, em que o valor da constante a na equação (7.1), seja $\leq 3 \times 10^{-4}$, para perturbação tipo rampa crescente a perturbação tem que ser tal, de modo que o valor de $\delta\Sigma_a$ na equação (7.3) tenha valor $\leq 1,26 \times 10^{-4}$, ocupando quase a faixa inteira analisada e para perturbação tipo rampa decrescente a perturbação pode ser a partir de $1,62 \times 10^{-4}$, ocupando toda faixa analisada.

Este foi o primeiro estudo em que se faz uma análise minuciosa da distribuição do fluxo de nêutrons mediante perturbação, entretanto dá a primeira noção mais clara sobre os limites da aproximação adiabática. Sugerimos para complementar os estudos iniciados os seguintes tópicos:

- aplicação de mais grupos de precursores na análise aproximação adiabática;
- extensão para solução tridimensional.

Bibliografia

- [1] SUTTON T. M. & AVILES B. N. "Difusion Theory Methods for Spatial Kinetic Calculations". *Progress in Nuclear Energy*, vol. 30, N^o 2, pp. 119-182, 1996.
- [2] DE LIMA Z. R. "Aplicação do Método dos Pseudo-Harmônicos à Cinética Multidimensional". *Programa de Engenharia Nuclear*. COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro-Brasil, 2005.
- [3] HENRY, Allan F. *Nuclear-Reactor Analysis*. Vol. 4, Mit Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [4] YASINSKY J. B. & HENRY A. F. "Some Numerical Concerning Space-Time Reactor Kinetics Behavior". *Nuclear Science and Engineering*, vol. 22, pp. 171-181, 1965.
- [5] BELL, G. I. & GLASSTONE, S. *Nuclear Reactor Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1987.
- [6] NAKAMURA, S. *Computational Methods in Engineering and Science*. New York. London. Sydney e Toronto, Jhon Wiley & Sons, 1977.
- [7] DUDERSTADT, James J. & HAMILTON, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1987.
- [8] ALVIM, A. C. M. *Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Nuclear*. COPPE-UFRJ, 2003.
- [9] STACY Jr. W. M. *Benchmark Problem Book*. ANL-7416-Suplement 3, National Energy Software Center, 1985.
- [10] LAWRENCE, S. *Computational Methods in Engineering and Science*. New York. London. Sydney e Toronto, Jhon Wiley & Sons, 1977.

- [11] PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, & B. P. FLANNERY. "The Art of Scientific Computing". *Numerical Recipes in Fortran*. 2ª edição, Cambridge University Press, 731-735, 1992.
- [12] HERTRICK, David L. *Dynamics of Nuclear Reactors*. 1ª edição. Chicago e Londres, The University of Chicago Press Ltda, 1971.
- [13] MURRAY, R. Spiegel. *Estatística Resumo da Teoria*. 1ª edição. Rio de Janeiro-Brasil, Ao Livro Técnico S. A., 1967
- [14] Y.NAGHAYA & K. KOBAYASH. "Solution of 1-D Multigroup Time-dependent Diffusion Equations using the Coupled Reactors Theory". *Ann. Nucl. Energy*, vol. 22, N° 7, pp. 421-440, 1995.
- [15] FEYZI, Inanc. "A Course Mesh Nodal Method for One-Dimensional Spatial Kinetics Calculations". *Ann. Nucl. Energy*, vol. 24, N° 4, pp. 257-265, 1997.