

# A CINÉTICA DE SISTEMAS SUBCRÍTICOS

Cristiano da Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por :

---

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

---

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

---

Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

---

Prof. Antônio Carlos de Abreu Mól, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2007

SILVA, CRISTIANO DA

A Cinética de Sistemas Subcríticos [Rio de Janeiro] 2007

VIII, 74 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,M.Sc., Engenharia Nuclear, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Cinética Pontual

2. Solução de Equações Diferenciais

3. Métodos Numéricos

I. COPPE/UFRJ II. Título(série)

Dedico este trabalho  
a Nicole Katharina Grüter.

Agradeço este trabalho aos meus professores, amigos e especialmente à minha grande amiga Nicole, que sempre me ajudou embora tão longe.

Agradeço também a todos os funcionários do Programa de Engenharia Nuclear da COPPE/UFRJ pelos diversos e importantes auxílios prestados durante o período em que, juntamente com meus orientadores, desenvolvi este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## A CINÉTICA DE SISTEMAS SUBCRÍTICOS

Cristiano da Silva

Fevereiro/2007

Orientadores: Aquilino Senra Martinez  
Fernando Carvalho da Silva

Programa: Engenharia Nuclear

Os objetivos deste trabalho consistem em verificar a validade das equações da cinética pontual convencionais para a descrição da evolução temporal da população de nêutrons em um reator subcrítico, a relevância de uma fonte externa para sistemas multiplicativos bem próximos da condição de criticalidade e a relevância de uma fonte externa para sistemas multiplicativos afastados da condição de criticalidade, utilizando-se o método de retirada abrupta de uma fonte localizada. Para isto, dois novos sistemas de equações da cinética pontual são avaliados, comparados entre si e com o sistema de equações da cinética pontual convencionais, tendo-se como método de referência a expansão em modos do fluxo de neutrons solução da equação de difusão unidimensional. Os estados transientes são analisados mediante o método de retirada abrupta da fonte.

Os resultados obtidos mostram que, embora descrevam de maneira razoável o comportamento temporal de um sistema subcrítico, as equações da cinética pontual convencionais não possuem uma boa acurácia em tal análise.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## THE KINETICS OF SUBCRITICAL SYSTEMS

Cristiano da Silva

February/2007

Advisors: Aquilino Senra Martinez  
Fernando Carvalho da Silva

Department: Nuclear Engineering

The goals of this work consist on verifying the validity of the conventional point kinetic equations for time behavior description of neutron population in a subcritical reactor, the relevance of an external source for multiplying systems quite near to criticality condition and the relevance of an external source for multiplying systems far away from criticality condition, accounting for this the source jerk method of a localized source. For this, two new systems of point kinetic equations are evaluated, compared between them and with the system of conventional point kinetic equations, having as reference method the expansion of the time dependent flux, solution of the unidimensional one-group diffusion equation, to mode distributions. The transient states are analyzed by means of the source jerk method. The results show that, even so describing in a reasonable way the time behavior of a subcritical system, the conventional kinetic equations not have a good accuracy in such analysis.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O Método Direto</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 O Método Direto . . . . .	5
1.3 Solução Analítica e Cálculos para uma Placa plana . . . . .	14
<b>2 As equações da cinética pontual convencionais</b>	<b>20</b>
2.1 Introdução . . . . .	20
2.2 Desenvolvimento das Equações Pontuais . . . . .	22
2.3 Cálculo de $\phi^\dagger(x)$ e de parâmetros integrais . . . . .	28
<b>3 As equações da cinética pontual obtidas mediante a escolha de uma função importância associada ao nível relativo da população de nêutrons em um sistema subcrítico</b>	<b>33</b>
3.1 O núcleo subcrítico em regime estacionário . . . . .	33
3.1.1 A distribuição de fluxo . . . . .	33
3.1.2 O fator de multiplicação do núcleo subcrítico . . . . .	34
3.2 A cinética de um sistema subcrítico . . . . .	37
3.2.1 Equação básica e cinética pontual . . . . .	37
3.2.2 O Comportamento Assintótico . . . . .	43
3.2.3 A expressão para $n_{F,o}^+(x)$ . . . . .	44

<b>4</b>	<b>Desenvolvimento de novas equações da cinética pontual mediante uma função importância associada a produção de nêutrons de fissão</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	48
4.2	Sistema em um estado estático . . . . .	49
4.3	Sistema em um estado dinâmico . . . . .	51
4.4	Cálculo de $G(x)$ e dos Parâmetros Integrais para uma Placa plana	53
<b>5</b>	<b>Resultados e Análise</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>

# Introdução

A essência de um reator nuclear convencional é a reação de fissão em cadeia controlada do  $U^{235}$  e  $Pu^{239}$ . Isto produz calor que é usado para gerar vapor que por sua vez move uma turbina. A reação em cadeia depende de um excesso de neutrons para ter continuidade (uma fissão de  $U^{235}$  requer um neutron de entrada e produz uma média de 2.43 neutrons, BOLDEMAN [1]).

Por muitos anos teve-se interesse em utilizar  $Th^{232}$  como combustível nuclear, uma vez que ele é três vezes mais abundante que o urânio. Também todo o tório minerado é potencialmente utilizável em um reator, comparado com os 0.7% do urânio natural. Um reator a tório poderia funcionar tendo  $Th^{232}$  capturando um neutron e se tornando  $Th^{233}$ , que decai em  $U^{233}$ , que fissiona. O problema é que o número de neutrons gerado é insuficiente para manter a reação em cadeia.

Nos últimos anos teve-se interesse em transmutar os radionuclídeos transurânicos de longa vida (os actínídeos neptúnio ( $Np$ ), amerício ( $Am$ ) e cúrio ( $Cm$ ) particularmente) formados pela captura neutrônica em um reator convencional, que reportam a rejeitos de longa duração. Se estes pudessem se tornar radionuclídeos de vida curta, o gerenciamento e eventual disposição de rejeitos radioativos de alto nível seria mais fácil e menos caro. A maior parte dos radionuclídeos (notavelmente produtos de fissão) decaem rapidamente, tal que sua radioatividade coletiva é reduzida a menos de 0.1% do nível original 50 anos após terem sido removidos do reator. Entretanto, os principais de vida longa são actínídeos. Os ADS's, sigla em inglês para Accelerator Driven Systems, se referem a ambas as questões. Eles são vistos como sendo melhores que um reator à fissão convencional, porque são subcríticos e param quando a corrente de entrada (um feixe de prótons), fornecida por um acelerador de partículas, cessa. Isto se deve ao fato deles queimarem material que não tem razão de fissão por captura neutrônica alta o suficiente para capacitar criticidade e

manter a reação de fissão em cadeia. Este material pode ser tório combustível ou actínídeos que necessitam de incineração.

A capacidade da elevada corrente gerada por aceleradores de alta energia produzir neutrons por reação de spallation de elementos pesados tem sido usada na pesquisa estrutural de tais materiais. Neste processo, um feixe de protons de alta energia (usualmente  $> 500\text{Mev}$ ) é direcionado a um alvo de alto número atômico que permite que um neutron possa ser produzido por  $25\text{Mev}$  do feixe de prótons incidente (estes números se comparam com os  $200\text{-}210\text{ Mev}$  liberados por fissão de um átomo de urânio 235 ou plutônio 239). Um feixe de  $1000\text{Mev}$  criará de 20 a 30 neutrons de spallation por próton. Alguns serão capturados mas outros irão causar fissões em torno de uma taxa de 400 por próton de fonte (97% de proximidade da criticalidade).

Se o alvo de spallation é envolvido por um manto de elemento combustível, tal como isótopos físeis de urânio ou plutônio, há a possibilidade de se sustentar uma reação de fissão. Isto é conhecido como um ADS. Nele, acima de 10% dos neutrons poderiam advir de spallation, contudo seria normalmente menos, mesmo onde a incineração de actínídeos é o objetivo principal.

Em tais reatores nucleares subcríticos, os neutrons produzidos por spallation seriam utilizados para causar fissão no combustível, assistidos por neutrons que posteriormente surgiriam dessa fissão. Teria-se então um reator nuclear que poderia ser desligado simplesmente cessando-se o feixe de prótons, ao invés da necessidade de se inserir barras de controle para absorver neutrons e tornar o elemento combustível subcrítico. O combustível poderia ser misturado com rejeitos de longa vida provenientes dos reatores convencionais.

O outro papel de um reator nuclear subcrítico, ou ADS, é a destruição de isótopos pesados, particularmente actínídeos mas também produtos de fissão de longa vida, tais como o tecnécio ( $Tc^{99}$ ) e o iodo ( $I^{129}$ ). Aqui o elemento envoltório seria combustível actínídeo e/ou combustível nuclear gasto. Um meio seria iniciar com combustível recentemente gasto, proveniente de reatores convencionais, na parte mais externa do envoltório e progressivamente movê-lo para dentro. Ele seria então removido e reprocessado com o urânio reciclado e com a maior parte dos produtos de fissão separados como rejeito. Os actínídeos são então repostos no sistema para posterior transmutação mediante fissão.

No caso de átomos de isótopos de número ímpar mais pesados que o  $Th^{232}$ , eles têm uma alta probabilidade de absorver um neutron e subsequentemente sofrer fissão nuclear, daí produzindo alguma energia e contribuindo para o processo de multiplicação. Isótopos pares podem capturar um neutron, talvez sofrer decaimento beta, e então fissão. Um espectro de neutrons rápidos possibilita máxima fissão com máximo de formação de novos actínídeos, devido a captura de neutron. Este processo de converter isótopos férteis em físeis é chamado regeneração.

Portanto, a princípio, o reator subcrítico pode ser capaz de converter todos os elementos transurânicos em, geralmente, produtos de fissão de vida curta e produzir alguma energia no processo.

Por seu turno, o estudo da evolução de nêutrons em sistemas nucleares, quer sejam eles subcríticos ou não, é um problema desafiador, e constitui um tópico fundamental no que diz respeito ao projeto de reatores. A necessidade de estudar estruturas subcríticas multiplicativas dirigidas por fontes externas de nêutrons, e que estão sendo propostas para a transmutação, segurança e produção aceitável de energia, está introduzindo novos aspectos que precisam ser abordados.

O objetivo principal desta dissertação é então modelar um sistema físico que seja capaz de descrever a evolução da população de nêutrons em um sistema subcrítico. Tentaremos verificar de igual forma que a escolha de uma função importância, tal como o fluxo adjunto na equação da cinética pontual convencional, constitui um feito determinante na acurácia dos resultados e na definição de diferentes parâmetros integrais. Consideraremos também a relevância de uma fonte externa para sistemas críticos e subcríticos.

Para um mesmo sistema placa plana, o estado dinâmico da população de nêutrons será calculado por 4 métodos: o Método Direto, tema do Capítulo 1; o método das Equações Pontuais Convencionais, tema do Capítulo 2; o método das Equações Pontuais obtidas pela Teoria de Perturbação Generalizada Heurística (HGPT - Heuristically Generalized Perturbation Theory), tema do Capítulo 3; e, finalmente, pelo Método das Equações Pontuais Associadas aos Nêutrons de Fissão, tema do Capítulo 4.

O estado dinâmico aqui analisado ocorre pelo desaparecimento abrupto de uma fonte, o que é equivalente a um experimento subcrítico usando o método

de retirada abrupta da fonte, ou source jerk method.

O Método Direto consiste em expandir o fluxo de nêutrons dependente do tempo em modos, que em nosso caso vão de  $n=1$ , isto é, modo 1 ou primeiro modo, até  $n=21$  (modo 21 ou vigésimo primeiro modo), pois, como verificado, para  $n > 21$  não há uma alteração significativa no resultado. Como será visto, devido a simetria de nosso sistema, apenas os modos ímpares ( $n=1,3,5,\dots,21$ ) serão considerados.

No Método das Equações Pontuais Convencionais, apenas variamos o valor do fator de multiplicação  $k_{eff}$ , de modo a obter o nível de subcriticalidade desejado.

No Método das Equações Pontuais obtidas pela HGPT, fornecemos o valor da fonte externa de nêutrons, o valor estacionário da população de nêutrons desejada para a análise do sistema e, uma vez encontrado o valor de um parâmetro especial, que chamaremos de reatividade generaliza  $\rho_{gen}$ , mediante uma análise do comportamento assintótico descrito na seção 3.2.2, podemos analisar o comportamento dinâmico da população de nêutrons.

Por sua vez, pelo Método das Equações Pontuais do Capítulo 4, o estado dinâmico é analisado mediante a variação de dois novos parâmetros integrais  $k_p$  e  $k_{d,i}$ , associados respectivamente a taxa de multiplicação de nêutrons prontos (o índice "p" em  $k_p$  refere-se a "prompt", do inglês "instantâneo") e a taxa de multiplicação de nêutrons retardados (o índice "d" em  $k_{d,i}$  refere-se a "delayed", do inglês "retardado", e o índice "i" refere-se aos 6 diferentes grupos de precursores, isto é,  $i = 1$ , ou  $i = 2, \dots$ , ou  $i = 6$ ).

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta alguns resultados numéricos dos 4 diferentes métodos, bem como uma comparação entre eles. Os resultados obtidos pelo Método Direto para a evolução da população de nêutrons, bem como para a evolução da concentração de precursores, serão tomados como base para as comparações entre os resultados obtidos pelos diferentes sistemas de equações pontuais.

O Capítulo 6 exhibe conclusões pertinentes à análise dos diferentes resultados.

Outras questões que se façam necessárias à fundamentação e melhor compreensão do trabalho serão abordadas ao longo do texto.

# Capítulo 1

## O Método Direto

### 1.1 Introdução

O estudo da evolução neutrônica em sistemas nucleares é um problema desafiador de física matemática, e constitui um tópico fundamental no projeto de reatores críticos e subcríticos.

A necessidade de se estudar estruturas multiplicativas subcríticas guiadas por uma fonte externa de nêutrons, que têm sido propostas para a transmutação de rejeitos de longa duração e para uma produção segura e aceitável de energia, está introduzindo novos e interessantes aspectos que devem ser devidamente tratados.

A proposta deste capítulo, baseado em DULLA, RAVETTO & ROSTAGNO [2], é apresentar soluções de alguns problemas simples de cinética e proporcionar exemplos concretos para ferramentas que serão introduzidas nos capítulos seguintes.

Esta apresentação tenciona revisitar métodos para a solução de problemas de valores de contorno.

### 1.2 O Método Direto

Consideremos o problema mais simples, isto é, difusão a um grupo de energia em uma placa plana homogênea com uma única família de precursores e propriedades independentes do tempo.

O comportamento temporal de tal reator é descrito pelas seguintes equações:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \Sigma_a \Psi(x, t) + (1 - \beta) \nu \Sigma_f \Psi(x, t) + \lambda C(x, t) + S(x, t) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = -\lambda C(x, t) + \beta \nu \Sigma_f \Psi(x, t) \quad (1.2)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\Psi(x, 0) = \phi_o(x) \quad (1.3)$$

$$C(x, 0) = C_o(x) \quad (1.4)$$

e com as seguintes condições de contorno:

$$\Psi\left(\frac{a}{2}, t\right) = \Psi\left(-\frac{a}{2}, t\right) = 0 \quad (1.5)$$

$$C\left(\frac{a}{2}, t\right) = C\left(-\frac{a}{2}, t\right) = 0 \quad (1.6)$$

onde

- $v$  [cm/seg] é a velocidade dos nêutrons no sistema;
- $D$  [cm] é o coeficiente de difusão;
- $\Sigma_a$  [cm<sup>-1</sup>] é a seção de choque macroscópica de absorção;
- $\beta$  é a fração de nêutrons retardados;
- $\nu$  é o número médio de nêutrons produzidos por fissão;
- $\Sigma_f$  [cm<sup>-1</sup>] é a seção de choque macroscópica de fissão;
- $\lambda$  [seg<sup>-1</sup>] é a constante de decaimento do grupo de precursores;
- $S(x, t)$  [nêutrons/seg] é uma fonte externa dependente da posição e do tempo. (A letra  $S$  será usada como uma expressão geral para a fonte apenas neste capítulo).

Tentaremos solucionar as equações (1.1) e (1.2) mediante as seguintes separações de variáveis (onde  $\psi_n(x)$  é uma base conveniente):

$$\Psi(x, t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(x) \quad (1.7)$$

$$C(x, t) = \sum_n C_n(t) \psi_n(x) \quad (1.8)$$

$$S(x, t) = \sum_n S_n(t) \psi_n(x) \quad (1.9)$$

A expansão das condições iniciais (1.3) e (1.4) pode ser obtida mediante (1.7) e (1.8) como se segue:

$$\Psi(x, t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(x)$$

$$\Psi(x, 0) = \phi_o(x) = \sum_n a_n(0) \psi_n(x) \quad (1.10)$$

$$|\phi_o(x)\rangle = \sum_n a_n(0) |\psi_n(x)\rangle$$

com uma condição de normalização:

$$\langle \psi_n(x) | \phi_o(x) \rangle = a_n(0) \underbrace{\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle}_{=1}$$

$$a_n(0) = \langle \psi_n(x) | \phi_o(x) \rangle \quad (1.11)$$

$$C(x, t) = \sum_n C_n(t) \psi_n(x)$$

$$C(x, 0) = C_o(x) = \sum_n C_n(0) \psi_n(x) \quad (1.12)$$

$$|C_o(x)\rangle = \sum_n C_n(0) |\psi_n(x)\rangle$$

$$\langle \psi_n(x) | C_o(x) \rangle = C_n(0) \underbrace{\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle}_{=1}$$

$$C_n(0) = \langle \psi_n(x) | C_o(x) \rangle \quad (1.13)$$

Substituindo (1.11) e (1.13) em (1.10) e (1.12), respectivamente, temos

$$\phi_o(x) = \sum_n \langle \psi_n(x) | \phi_o(x) \rangle \psi_n(x) \quad (1.14)$$

$$C_o(x) = \sum_n \langle \psi_n(x) | C_o(x) \rangle \psi_n(x) \quad (1.15)$$

As componentes da fonte são funções dependentes do tempo conhecidas, dadas pela equação (1.9) da seguinte maneira:

$$S(x, t) = \sum_n S_n(t) \psi_n(x)$$

$$|S(x, t)\rangle = \sum_n S_n(t) |\psi_n(x)\rangle$$

$$\langle \psi_n(x) | S(x, t) \rangle = S_n(t) \underbrace{\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle}_{=1}$$

$$S_n(t) = \langle \psi_n(x) | S(x, t) \rangle \quad (1.16)$$

O problema físico pode então possuir uma solução analítica mediante uma expansão em autofunções. As autofunções de Helmholtz constituem um sistema completo e ortogonal, a base que melhor se ajusta para representar a solução do problema de difusão

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) + B_n^2 \psi_n(x) = 0 \quad ; \quad \psi_n\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_n\left(-\frac{a}{2}\right) = 0 \quad (1.17)$$

o qual possui soluções simétricas (estamos interessados apenas em soluções simétricas, uma vez que  $\phi_o(x)$  é simétrico):

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x)$$

onde  $B_n = (n\pi/a)$  é conhecido como buckling geométrico, e  $n = \text{ímpar}$ .

Após introdução das expansões acima no problema (1.1) e (1.2), fazendo uso da ortogonalidade das funções de Helmholtz, o sistema de equações para as componentes das soluções desconhecidas pode ser dado por uma forma matricial compacta introduzindo-se os vetores:

$$|x_n(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_n(t) \\ c_n(t) \end{pmatrix}$$

(1.18)

$$|S_n(t)\rangle = \begin{pmatrix} S_n(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

como

$$\frac{d}{dt}|x_n(t)\rangle = \hat{M}|x_n(t)\rangle + |S_n(t)\rangle \quad (1.19)$$

onde

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} v[(1-\beta)\nu\Sigma_f - \Sigma_a - DB_n^2] & v\lambda \\ \beta\nu\Sigma_f & -\lambda \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

A solução é expressa em termos de autovetores da matriz característica  $\hat{M}$ . Para este propósito, os seguintes problemas de autovalor direto e adjunto são resolvidos:

$$\hat{M}|u_n\rangle = \omega_n|u_n\rangle \quad (1.21)$$

$$\langle u_n|\hat{M}^\dagger = \omega_n^*\langle u_n|$$

onde os autovalores  $\omega_n$  são soluções da equação inhour algébrica generalizada associada a cada autofunção espacial:

$$\det(\hat{M}_n - \omega_n\hat{\mathcal{J}}) = 0 \quad (1.22)$$

onde  $\hat{\mathcal{J}}$  é a identidade.

Neste caso há dois (sete, quando seis famílias são consideradas) autovalores reais e distintos  $\omega_{n,j}$ ,  $j = 1, 2$ .

Os autovetores têm a seguinte forma:

$$|u_n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta_i \nu \Sigma_f}{\omega_n + \lambda_i} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\langle u_n| = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v\lambda_i}{\omega_n + \lambda_i} \end{pmatrix}$$

Em suma, a solução analítica total torna-se, em termos generalizados:

$$\begin{aligned} |x_n(t)\rangle &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\langle u_n^{(j)} | u_n^{(j)} \rangle} \left[ \langle u_n^{(j)} | x_n(0) \rangle e^{\omega_{n,j} t} + \int_0^t \langle u_n^{(j)} | S_n(t') \rangle e^{\omega_{n,j}(t-t')} dt' \right] |u_{n^{(j)}}\rangle \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^2 \left[ b_{no}^{(j)} e^{\omega_{n,j} t} + \int_0^t \sigma_n^{(j)}(t') e^{\omega_{n,j}(t-t')} dt' \right] |u_n^{(j)}\rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

Multiplicando a equação (1.24) pelo vetor linha

$$\langle \varphi_n(x) | = \begin{pmatrix} \psi_n(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

obtemos a expressão explícita para o fluxo de nêutrons:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \sum_{\substack{n \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left\{ \left( 1 + \frac{\beta_i \nu \Sigma_f v \lambda_i}{(\omega_{n,j} + \lambda_i)^2} \right)^{-1} \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \left[ \langle \psi_n | \phi_o \rangle e^{(\omega_{n,j} t)} + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{v \lambda_i}{\omega_{n,j} + \lambda_i} \langle \psi_n | c_{i,o} \rangle \right) e^{(\omega_{n,j} t)} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{(\omega_{n,j}(t-t'))} dt' \right] \right\} \psi_n(x) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Quando seis grupos de precursores são considerados, generalizamos a solução substituindo os autovetores fornecidos pela equação (1.22) pelos seguintes autovetores:

$$|u_n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\beta_1 \nu \Sigma_f}{\omega_n^{(j)} + \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\beta_6 \nu \Sigma_f}{\omega_n^{(j)} + \lambda_6} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\langle u_n| = \left( 1 \quad \frac{v\lambda_1}{\omega_n^{(j)} + \lambda_1} \quad \dots \quad \frac{v\lambda_6}{\omega_n^{(j)} + \lambda_6} \right)$$

os quais fornecem a seguinte expressão para o fluxo de nêutrons ao multiplicarmos a equação (1.23) pela equação (1.24):

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \sum_{\substack{n \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^7 \left\{ \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \nu \Sigma_f v \lambda_i}{(\omega_{n,j} + \lambda_i)^2} \right) \right]^{-1} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \left[ \langle \psi_n | \phi_o \rangle e^{(\omega_{n,j} t)} + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{v \lambda_i}{\omega_{n,j} + \lambda_i} \langle \psi_n | c_{i,o} \rangle \right) e^{(\omega_{n,j} t)} + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{(\omega_{n,j}(t-t'))} dt' \right] \right\} \psi_n(x) \quad (1.28) \end{aligned}$$

e a seguinte expressão para a concentração de precursores, ao multiplicarmos a equação (1.23) pelo vetor

$$\langle \tilde{\varphi}_n(x) | = \begin{pmatrix} 0 & \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
C_i(x, t) = & \sum_{\substack{n \\ \text{impar}}}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^7 \left\{ \left[ 1 + \frac{\beta_i \nu \Sigma_f v \lambda_i}{(\omega_{n,j} + \lambda_i)^2} \right]^{-1} \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left[ \langle \psi_n | \phi_o \rangle e^{(\omega_{n,j} t)} + \left( \frac{v \lambda_i}{\omega_{n,j} + \lambda_i} \langle \psi_n | c_{i,o} \rangle \right) e^{(\omega_{n,j} t)} + \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{(\omega_{n,j}(t-t'))} dt' \right] \frac{\beta_i \nu \Sigma_f}{\omega_{n,j} + \lambda_i} \right\} \psi_n(x) \quad (1.30)
\end{aligned}$$

onde  $\omega_{n,j}$  são soluções da equação inhour:

$$\frac{\omega_{n,j} \Lambda_n}{1 + \omega_{n,j} \Lambda_n} + \frac{\omega_{n,j} \Lambda_n}{1 + \omega_{n,j} \Lambda_n} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\omega_{n,j} + \lambda_i} - \rho_n = 0 \quad (1.31)$$

e

$$\rho_n = \frac{k_{eff,n} - 1}{k_{eff,n}} \quad (1.32)$$

é a reatividade;

$$k_{eff,n} = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B_n^2} \quad (1.33)$$

é o fator de multiplicação;

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (1.34)$$

é o comprimento de difusão da placa plana;

$$\Lambda_n = \frac{1}{v \Sigma_a (1 + L^2 B_n^2)} \quad (1.35)$$

é o tempo de vida dos nêutrons prontos.

É relevante ressaltar algumas propriedades das raízes  $\omega_{n,j}$  da equação inhour:

- as seis menores raízes têm valores aproximados e cada uma se aproxima de  $-\lambda_i$  conforme a subcriticalidade aumenta;
- a sétima raiz,  $\omega_{n,7}$ , é bem maior em valor absoluto e determina a resposta pronta da população de nêutrons relacionada ao inverso do tempo de vida pronto;
- com uma fonte constante no tempo, a solução é assintoticamente dirigida pela exponencial associada a raiz dominante do primeiro modo:

$$\begin{aligned} \Psi_{as}(x, t) = & \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \nu \Sigma_f v \lambda_i}{(\omega_{1,1} + \lambda_i)^2} \right) \right]^{-1} \cdot \\ & \cdot \left[ \langle \psi_1 | \phi_o \rangle e^{(\omega_{1,1} t)} + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{v \lambda_i}{\omega_{1,1} + \lambda_i} \langle \psi_1 | c_{i,o} \rangle \right) e^{(\omega_{1,1} t)} + \right. \\ & \left. + \langle \psi_1 | S(x) \rangle \frac{(e^{(\omega_{1,1} t)} - 1)}{\omega_{1,1}} \right] \psi_1(x) \end{aligned} \quad (1.36)$$

### 1.3 Solução Analítica e Cálculos para uma Placa plana

O estado dinâmico analisado ao longo deste trabalho ocorre mediante a retirada abrupta da fonte, conhecida como source jerk method.

O método direto, tema deste capítulo, consiste em expandir o fluxo dependente do tempo em modos, do de primeira ordem ao de vigésima primeira ordem. Devido a sua retirada abrupta, a fonte será simulada como uma função delta expandida convenientemente no centro da placa plana.

Primeiramente consideremos o estado estático do sistema. A equação que rege o fluxo neutrônico nesta condição é:

$$\left( -D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a \right) \phi_o(x) = \nu \Sigma_f \phi_o(x) + Q \delta(x - x^0) \quad (1.37)$$

a qual possui a seguinte solução:

$$\phi_o(x) = \begin{cases} \frac{Q}{D} \cdot \frac{\sin[\mu(\frac{a}{2}+x^{\vee})]\sin[\mu(\frac{a}{2}-x)]}{\mu\sin(\mu a)} & , (x \geq x^{\vee}) \\ \frac{Q}{D} \cdot \frac{\sin[\mu(\frac{a}{2}-x^{\vee})]\sin[\mu(\frac{a}{2}+x)]}{\mu\sin(\mu a)} & , (x < x^{\vee}) \end{cases} \quad (1.38)$$

solução esta que se refere a uma placa plana de largura  $a$  com uma fonte pontual em  $x^{\vee}$ , que, por simplicidade será tomado como sendo o centro da placa plana, isto é,  $x^{\vee} = 0$ . O parâmetro  $\mu$  é definido como

$$\mu = \frac{\sqrt{k_{\infty} - 1}}{L} .$$

Obviamente na equação (1.37),  $Q\delta(x - x^{\vee}) = S(x)$ .

A equação estática para a concentração de precursores pode ser obtida da equação (1.2) da seguinte forma. Considere

$$\frac{\partial C_i(x, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(x, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Psi(x, t) \quad (1.39)$$

na situação estática, em que tanto o fluxo quanto a concentração de precursores são independentes do tempo, isto é

$$C_i(x, t) \longrightarrow C_{i,o}(x)$$

$$\Psi(x, t) \longrightarrow \phi_o(x)$$

;

$$\underbrace{\frac{\partial C_{i,o}(x)}{\partial t}}_{=0} = \beta_i \nu \Sigma_f \phi_o(x) - \lambda_i C_{i,o}(x)$$

$$0 = \beta_i \nu \Sigma_f \phi_o(x) - \lambda_i C_{i,o}(x)$$

$$C_{i,o}(x) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \nu \Sigma_f \phi_o(x) \quad (1.40)$$

Estamos agora em condições de calcular os parâmetros integrais da equação (1.26); para então obter o fluxo de nêutrons e analisar a evolução temporal da população de nêutrons no sistema em questão.

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \phi_o \rangle &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \psi_n \cdot \phi_o \, dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \psi_n \cdot \phi_o \, dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x) \cdot \frac{Q \sin[\mu(\frac{a}{2} + x)] \sin[\mu(\frac{a}{2} - x)]}{D \mu \sin(\mu a)} \, dx = \\ &= \sqrt{8a^3} \frac{Q}{D} \left[ \frac{\sin(\mu \frac{a}{2})}{\sin(\mu a)} \right] \frac{[\cos(\mu \frac{a}{2}) - \cos(n \frac{\pi}{2})]}{[(n\pi)^2 - (\mu a)^2]} \end{aligned} \quad (1.41)$$

A fonte é pontual e localizada no tempo, isto é

$$S(x, t') = Q \delta(x - x') \delta(t - t')$$

Expandindo  $\delta(x - x')$  entorno de  $x' = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \sum_n \psi_n(x) \cdot \psi_n(x') = \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x) \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x) \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\cos(B_n \cdot 0)}_{=1} = \\
&= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x) \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned}
S(x, t') &= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} Q \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(B_n x) \delta(t - t') = \\
&= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} Q \psi_n(x) \delta(t - t')
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | S(x, t') \rangle &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{+a}{2}} \psi_n(x) \cdot S(x, t') \, dx = \\
&= 2 \int_0^{\frac{+a}{2}} \psi_n(x) \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} Q \psi_n(x) \delta(t - t') \, dx = \\
&= 2 \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} Q \delta(t - t') \int_0^{\frac{+a}{2}} \psi_n(x) \cdot \psi_n(x) \, dx = \\
&\left[ \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} Q \frac{\sin(n\pi) + n\pi}{n\pi} \right] \delta(t - t')
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Substituindo este resultado na integral

$$\int_0^t v \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{\omega_{n,j}(t-t')} dt' \, ,$$

temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t v \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{\omega_{n,j}(t-t')} dt' = \\
& v \left[ \left( \frac{2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} Q \frac{\sin(n\pi) + n\pi}{n\pi} \right] \int_0^t \delta(t-t') e^{\omega_{n,j}(t-t')} dt' = \\
& = v \left[ \left( \frac{2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} Q \frac{\sin(n\pi) + n\pi}{n\pi} \right] \frac{1}{-\omega_{n,j}} (1 - e^{\omega_{n,j}t}) \tag{1.44}
\end{aligned}$$

Uma vez calculados os parâmetros integrais, tomaremos a equação (1.26) e expressar-la-emos em termos do número de nêutrons, presentes no reator, em um determinado instante. Para isto, basta que multipliquemos por  $\nu\Sigma_f$  e integremos em relação a  $x$  na extensão de todo o reator, isto é, de  $-a/2$  até  $+a/2$ . Ou seja:

$$n(t) = \nu\Sigma_f \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi(x, t) dx \tag{1.45}$$

que é uma expressão equivalente àquela encontrada para a potência, como pode ser visto em DUDERSTADT & HAMILTON [3].

De modo a caracterizarmos transientes espaciais neutrônicos, os seguintes parâmetros serão introduzidos:

- razão assintótica, como o desvio relativo do valor da solução  $\Psi_{as}$ :

$$\mathcal{R}_{as} = \left| \frac{\Psi - \Psi_{as}}{\Psi_{as}} \right| \tag{1.46}$$

- razão de dominância da fonte, como o desvio relativo da porção dominante da solução  $\Psi_{DF}$ , que é particularmente útil para caracterizar sistemas dirigidos por fontes:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{DF}} = \left| \frac{\Psi - \Psi_{\mathcal{DF}}}{\Psi_{\mathcal{DF}}} \right| \quad (1.47)$$

onde  $\Psi_{\mathcal{DF}}$  é expresso por

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{DF}}(x, t) = & \sum_{j=1}^7 \left\{ \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \nu \Sigma_f v \lambda_i}{(\omega_{1,j} + \lambda_i)^2} \right) \right]^{-1} \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \langle \psi_1 | \phi_o \rangle e^{(\omega_{1,j} t)} + \left( \sum_{i=1}^6 \frac{v \lambda_i}{\omega_{1,j} + \lambda_i} \langle \psi_1 | c_{i,o} \rangle \right) e^{(\omega_{1,j} t)} + \right. \\ & \left. \left. + \left( \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{21} \int_0^t \langle \psi_n | S(x, t') \rangle e^{(\omega_{n,j}(t-t'))} dt' \right) \right] \right\} \psi_n(x) \quad (1.48) \end{aligned}$$

isto é, o somatório em  $n$  se dá única e exclusivamente para o termo de fonte. Com isso buscamos ressaltá-lo para verificar sua contribuição ao fluxo de nêutrons.

# Capítulo 2

## As equações da cinética pontual convencionais

### 2.1 Introdução

Este capítulo objetiva dar uma breve descrição das Equações da Cinética Pontual Convencionais. Este tema é extensamente discutido na literatura, AK-CASU, LELLOUCHE & SHOTKIN [4], e dispensa um detalhamento minucioso no presente texto. Todavia sua abordagem se faz necessária, uma vez que um dos objetivos deste trabalho consiste em comparar os resultados para reatores subcríticos fornecidos pelo sistema de equações convencionais e os demais sistemas desenvolvidos nos próximos capítulos, bem como uma comparação com os resultados fornecidos pelo Método Direto.

Considere então um sistema multiplicativo livre de fonte externa e com seções de choque independentes do tempo. Este sistema será dito "crítico" se ele puder sustentar um fluxo estacionário de nêutrons  $\phi_o(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$ , não nulo em qualquer parte do sistema.

Este sistema é denotado como um reator de referência, e sua distribuição de nêutrons é a solução, não trivial, do seguinte problema homogêneo

$$\left( A + \frac{\chi}{4\pi} F \right) \phi_o(\vec{r}, E, \hat{\Omega}) = 0 \quad (2.1)$$

onde  $A$  é o operador que descreve o transporte, absorção e espalhamento de nêutrons no meio multiplicativo, e  $F$  o operador global de multiplicação de nêutrons prontos e retardados. Estes operadores serão mais bem definidos na próxima seção.

Para o sistema mencionado, também é possível determinar uma solução da equação adjunta

$$\left( A^\dagger + \frac{\chi}{4\pi} F^\dagger \right) \phi_o^\dagger(\vec{r}, E, \hat{\Omega}) = 0 \quad (2.2)$$

que é bem conhecida pelo fato de abarcar o significado de importância de nêutrons no sentido clássico.

Introduzimos agora o conceito de fator de multiplicação efetivo mediante a consideração de um reator estacionário não crítico.

Desde que um reator não esteja no estado crítico, a equação (2.1) não tem outra solução que não seja a trivial, isto é,  $\phi_o(\vec{r}, E, \hat{\Omega}) = 0$ .

Vamos supor então que alteremos o número médio de nêutrons por fissão  $\nu^j$  de cada isótopo  $j$  multiplicando-o por  $(1/k_{eff})$ , mantendo inalteradas todas as outras propriedades nucleares e geométricas.

Esta modificação é equivalente a multiplicar o operador de produção  $F$  por  $(1/k_{eff})$ .

Ajustando o valor do número  $k_{eff}$ , podemos sempre associar um sistema crítico fictício a um dado reator não crítico.

O devido valor para  $k_{eff}$  é determinado pelo requerimento de que

$$\left[ A + \left( \frac{1}{k_{eff}} \right) \frac{\chi}{4\pi} F \right] \phi_o(\vec{r}, E, \hat{\Omega}) = 0 \quad (2.3)$$

tenha uma solução não trivial.

É claro que  $k_{eff}$  deve ser igual a 1 para um reator crítico.

## 2.2 Desenvolvimento das Equações Pontuais

Consideremos a equação (2.3). Uma equação semelhante pode ser escrita em termos do fluxo de nêutrons e em notação vetorial da seguinte maneira

$$A|\phi\rangle = \frac{1}{k_{eff}} \frac{\chi}{4\pi} F|\phi\rangle \quad (2.4)$$

que possui uma forma adjunta expressa por

$$\langle\phi|A^\dagger = \frac{1}{k_{eff}} \langle\phi|\frac{\nu\Sigma_f}{4\pi}F^\dagger \quad (2.5)$$

Por simplicidade omitiremos as dependências em relação ao espaço de fase  $(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$ .

Para os termos das equações (2.4) e (2.5) temos as seguintes definições:

- $A$  é o operador de remoção, definido por

$$A = \{\hat{\Omega}\vec{\nabla} + \Sigma_t(\vec{r}, E)\}(\cdot) - \int_{E_{min}}^{E_{max}} \int_{4\pi} \Sigma_s(E', \hat{\Omega}' \rightarrow E, \hat{\Omega})(\cdot) d\hat{\Omega}' dE' \quad (2.6)$$

onde  $\Sigma_t(\vec{r}, E)$  e  $\Sigma_s(E', \hat{\Omega}' \rightarrow E, \hat{\Omega})$  são respectivamente a seção de choque macroscópica total e a seção de choque macroscópica de espalhamento;

- $F$  é o operador de fissão, definido por

$$F = \int_{E_{min}}^{E_{max}} \int_{4\pi} \nu\Sigma_f(\vec{r}, E)(\cdot) d\hat{\Omega} dE \quad (2.7)$$

onde  $\nu\Sigma_f(\vec{r}, E)$  é o número médio de nêutrons gerados por fissão vezes a seção de choque macroscópica de fissão;

- $A^\dagger$  é o operador adjunto do operador de remoção  $A$ , definido como

$$A^\dagger = \{-\hat{\Omega}\vec{\nabla} + \Sigma_t(\vec{r}, E)\}(\cdot) - \int_{E_{min}}^{E_{max}} \int_{4\pi} \Sigma_s(E', \hat{\Omega}' \rightarrow E, \hat{\Omega})(\cdot) d\hat{\Omega}' dE'. \quad (2.8)$$

- $F^\dagger$  é o operador adjunto do operador de fissão  $F$ , definido como

$$F^\dagger = \int_{E_{min}}^{E_{max}} \int_{4\pi} \chi(\vec{r}, E)(\cdot) d\hat{\Omega} dE. \quad (2.9)$$

- $\chi(\vec{r}, E)$  é o espectro de fissão,

$$\chi(\vec{r}, E) = (1 - \beta(\vec{r}))\chi_p(\vec{r}, E) + \sum_{i=1}^I \beta_i(\vec{r})\chi_{d,i}(\vec{r}, E) \quad (2.10)$$

$$\int_{E_{min}}^{E_{max}} \chi(\vec{r}, E) dE = 1 \quad (2.11)$$

onde  $\chi_p(\vec{r}, E)$  é o espectro de fissão dos nêutrons prontos, com  $\int_{E_{min}}^{E_{max}} \chi_p(\vec{r}, E) dE = 1$  e  $\chi_{d,i}(\vec{r}, E)$  é o espectro de fissão dos nêutrons retardados, com  $\int_{E_{min}}^{E_{max}} \chi_{d,i}(\vec{r}, E) dE = 1$ .  $\beta(\vec{r})$  e  $\beta_i(\vec{r})$  são respectivamente a fração de nêutrons retardados e a fração do  $i$ -ésimo grupo de nêutrons retardados, com

$$\beta(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \beta_i(\vec{r}) \quad (2.12)$$

Para um sistema em estado crítico e sem fonte externa de nêutrons, as equações relevantes para a descrição do meio multiplicativo em questão são aquelas correspondentes às equações (2.4) e (2.5) com  $k_{eff} = 1$ , isto é

$$A|\phi_c\rangle = \frac{\chi}{4\pi} F|\phi_c\rangle \quad (2.13)$$

$$\langle \phi_c | A^\dagger = \langle \phi_c | \frac{\nu \Sigma_f}{4\pi} F^\dagger \quad (2.14)$$

onde  $\phi_c$  é, obviamente, o fluxo de nêutrons solução do problema crítico estacionário.

Multiplicando a equação (2.4) por  $\langle \phi_c |$ , e integrando em todo o espaço de fase, temos

$$\langle \phi_c | \mathbf{A} | \phi \rangle = \frac{1}{k_{eff}} \underbrace{\left\langle \phi_c \left| \frac{\chi(\vec{r}, E)}{4\pi} \mathbf{F} \right| \phi \right\rangle}_{:=S^c} \quad (2.15)$$

onde  $S^c$  é por definição o número médio de nêutrons de fissão na teoria convencional.

Consideremos agora a equação de transporte de nêutrons dependente do tempo em sua forma mais geral e compacta:

$$V^{-1} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = -A |\Psi\rangle + (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F |\Psi\rangle + \sum_{i=1}^I \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \lambda_i |c_i\rangle + |q_{ext}\rangle \quad (2.16)$$

como pode ser visto em HETRICK [5].

Pesando esta última equação com o fluxo neutrônico adjunto solução da equação (2.14), temos

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_c \left| V^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle &= \\ &= -\langle \phi_c | A | \Psi \rangle + \left\langle \phi_c \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| \Psi \right\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle \phi_c | q_{ext} \rangle \end{aligned} \quad (2.17)$$

O fluxo  $\Psi$ , solução da equação de transporte, pode ser fatorado como

$$\Psi = S^c(t) \cdot \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad (2.18)$$

onde  $S^c(t)$  é chamado fator de amplitude, enquanto  $\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$  é conhecido como função de forma. É evidente que tal fatoração não é única, fazendo-se então necessária a imposição de certas restrições.

A idéia subjacente à fatoração (2.18) é a de que a evolução da população de nêutrons segue duas escalas de tempo: a escala da amplitude, que deve ser a mais rápida, e a escala da função de forma.

Visando tornar única a fatoração em questão, um método de aproximação para  $\varphi$  é empregado. O mais simples, e não muito refinado, conforme ACKASU, LELLOUCHE & SHOTKIN [4], consiste em assumir a função de forma como sendo proporcional ao fluxo estacionário, que neste caso corresponde a  $\phi_c$ .

Se denotarmos a constante de proporcionalidade por  $1/S_o^c$ , temos

$$\Psi \approx S^c \cdot \frac{1}{S_o^c} \phi_c \quad , \quad (2.19)$$

ou

$$\Psi \approx S_N^c \cdot \phi_c \quad , \quad (2.20)$$

onde  $S_N^c$  é, por definição, o número médio de nêutrons normalizado em um determinado instante  $t$ , isto é

$$S_N^c(t) := \frac{S^c(t)}{S_o^c} \quad . \quad (2.21)$$

No entanto,  $S_o^c$  pode ser arbitrariamente tomado como sendo a unidade, de tal maneira que  $S_N^c(t)$  coincida com  $S^c(t)$ , implicando

$$\Psi \approx S^c \cdot \phi_c \quad . \quad (2.22)$$

Por fim, substituindo a ultima aproximação na equação (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi_c \left| V^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right| (S^c(t) \cdot \phi_c) \right\rangle &= \\
&= -\langle \phi_c | A | (S^c(t) \cdot \phi_c) \rangle + \left\langle \phi_c \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| (S^c(t) \cdot \phi_c) \right\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle \phi_c | q_{ext} \rangle
\end{aligned}$$

Como a integração  $\langle \cdot \rangle$  se dá no espaço de fase  $(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$ ,  $S^c(t)$  pode ser deslocado para fora da integral, uma vez que depende apenas de  $t$ . Assim sendo

$$\begin{aligned}
\langle \phi_c | V^{-1} | \phi_c \rangle \frac{dS^c(t)}{dt} &= \\
&= -\langle \phi_c | A | \phi_c \rangle S^c(t) + \left\langle \phi_c \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| \phi_c \right\rangle S^c(t) \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle \phi_c | q_{ext} \rangle
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.23) por um fator de normalização  $\mathcal{I} = \langle \phi_c | (\chi/4\pi) F | \phi_c \rangle$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \phi_c | V^{-1} | \phi_c \rangle}{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle} \frac{dS^c(t)}{dt} &= \\
\underbrace{\quad}_{:=l_{eff}^c} &= -\frac{\langle \phi_c | A | \phi_c \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{:=1/k_{eff,c}}} S^c(t) + \frac{\langle \phi_c | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \phi_c \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{:= (1 - \beta_{eff}^c)}} S^c(t) \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\langle \phi_c | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{:=C_i^c}} + \frac{\langle \phi_c | q_{ext} \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{Q^c}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$l_{eff}^c \frac{\partial S^c}{\partial t} = -\frac{1}{k_{eff,c}} S^c + (1 - \beta_{eff}^c) S^c + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^c + Q^c$$

Rearranjando esta última equação,

$$l_{eff}^c \frac{\partial S^c}{\partial t} = \left[ \left( 1 - \frac{1}{k_{eff,c}} \right) - \beta_{eff}^c \right] S^c + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^c + Q^c \tag{2.25}$$

Observa-se pela definição que  $k_{eff,c} = 1$ . No entanto, como estamos interessados em analisar a evolução da população de nêutrons em um sistema subcrítico com base no fator de multiplicação, substituímos arbitrariamente  $k_{eff,c}$  por  $k_{eff}$  na equação (2.24):

$$l_{eff}^c \frac{\partial S^c}{\partial t} = \left[ \left( 1 - \frac{1}{k_{eff}} \right) - \beta_{eff}^c \right] S^c + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^c + Q^c \quad (2.26)$$

Evidentemente, quanto mais próximo estiver o sistema das condições de criticidade, mais próximo  $k_{eff}$  estará de  $k_{eff,c}$ , isto é, de 1, como pode ser verificado pela equação (2.4).

Percebemos assim que a aproximação do fator de forma pelo fluxo estacionário acarretou um ajuste da equação (2.25) ao estado crítico. Espera-se então que a acurácia com a qual as equações da cinética pontual convencionais descrevam o comportamento dinâmico da população de nêutrons para qualquer  $k_{eff} \neq 1$ , não seja muito boa e muito menos exata, tendo-se apenas uma indicação de como tal população se comporta no tempo.

Resultados que verifiquem e/ou comprovem tais afirmações serão vistos e analisados no capítulo 5.

Para a concentração de precursores, o comportamento dinâmico é expresso pela seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial t} |c_i\rangle = \beta_i F |\Psi\rangle - \lambda_i |c_i\rangle \quad (2.27)$$

Multiplicando a equação (2.27) por  $\langle \phi_c | (\chi_{d,i}/4\pi)$  e considerando a aproximação (2.22), temos

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right| c_i \right\rangle &= \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| (S^c \cdot \phi_c) \right\rangle - \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \lambda_i \right| c_i \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle &= \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \phi_c \right\rangle S^c - \lambda_i \left\langle \phi_c \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dividindo ambos os lados da equação acima pelo fator de normalização  $\mathcal{I} = \langle \phi_c | (\chi/4\pi) F | \phi_c \rangle$ , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}_{:=C_i^c} = \frac{\langle \phi_c | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F | \phi_c \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{:=\beta_{i,eff}^c}} S^c - \lambda_i \frac{\langle \phi_c | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}{\underbrace{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle}_{:=C_i^c}}$$

que finalmente fornece:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i^c = \beta_{i,eff}^c S^c - \lambda_i C_i^c \quad (2.29)$$

As equações (2.26) e (2.29) são conhecidas como as equações da cinética pontual convencionais. Elas constituem um sistema acoplado o qual solucionaremos, neste trabalho, pelo método numérico de diferenças finitas.

### 2.3 Cálculo de $\phi^\dagger(x)$ e de parâmetros integrais

Nesta seção buscamos solucionar a equação (2.5), encontrando-se a expressão para  $\phi^\dagger(x)$ . Calculamos também alguns parâmetros integrais relevantes ao estudo dinâmico das equações da cinética pontual convencionais.

Considere a equação (2.5). Para uma placa plana, podemos reescrevê-la como

$$A^\dagger \phi^\dagger(x) = \frac{1}{k_{eff}} \frac{\nu \Sigma_f}{4\pi} F^\dagger \phi^\dagger(x) \quad (2.30)$$

Tomando a teoria de difusão a um grupo de energia, podemos manipulá-la e solucioná-la como se segue.

$$A^\dagger \phi^\dagger(x) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{\nu \Sigma_f}{4\pi} F^\dagger \phi^\dagger(x) = 0$$

$$\left( -D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a \right) \phi^\dagger(x) - \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi^\dagger(x) = 0$$

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) + \Sigma_a \phi^\dagger(x) - \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi^\dagger(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) - \underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{:=1/L^2} \phi^\dagger(x) + \frac{1}{k_{eff}} \underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{:=1/L^2} \underbrace{\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}}_{:=k_\infty} \phi^\dagger(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) - \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{=a_1} \phi^\dagger(x) + \frac{k_\infty}{k_{eff}} \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{=a_1} \phi^\dagger(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) - a_1 \phi^\dagger(x) + a_1 a_2 \phi^\dagger(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) + \underbrace{(a_1 a_2 - a_1)}_{=a_3} \phi^\dagger(x) = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi^\dagger(x) + a_3 \phi^\dagger(x) = 0 \quad (2.32)$$

Resolvendo (2.32), encontramos:

$$\phi^\dagger(x) = c_1 \cdot \frac{\cos(\sqrt{a_3} \cdot x)}{\cos(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2})} \quad (2.33)$$

Pelas condições de contorno,  $\phi^\dagger(\pm a/2) = 0$ , não importando o sinal, uma vez que a função cosseno é par, temos:

$$\phi^\dagger\left(\frac{a}{2}\right) = c_1 \cdot \frac{\cos(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2})}{\cos(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2})} = 0 \quad (2.34)$$

A equação (2.34) pode ser satisfeita tomando  $c_1 = 0$ , o que daria a solução trivial. Como não estamos interessados na solução trivial, temos que tomar a razão, na mesma equação, como sendo zero. No entanto, o denominador e o numerador são idênticos, o que acarreta uma indeterminação. No sentido de solucioná-la, expressamos a constante  $c_1$  da seguinte maneira:

$$c_1 = cte \cdot \cos\left(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2}\right) \quad (2.35)$$

de forma a escrevermos a equação (2.33) como

$$\phi^\dagger(x) = cte \cdot \cos(\sqrt{a_3} \cdot x) \quad (2.36)$$

Retomando as condições de contorno, temos

$$\phi^\dagger\left(\frac{a}{2}\right) = cte \cdot \cos\left(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2}\right) = 0$$

Mais uma vez não estamos interessados em uma constante nula. Dessa forma

$$\cos\left(\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2}\right) = 0 \quad (2.37)$$

Vemos que o argumento desta última equação deve ser

$$\sqrt{a_3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{n\pi}{2}, \quad n = \text{impar} \quad (2.38)$$

de maneira que

$$\sqrt{a_3} = \frac{n\pi}{a} \quad (2.39)$$

Pela equação (2.31), vemos que  $a_3$  é definido como

$$a_3 = a_1 a_2 - a_1 = \frac{1}{L^2} \frac{k_\infty}{k_{eff}} - \frac{1}{L^2} \quad (2.40)$$

Substituindo a definição (2.40) de  $a_3$  na equação (2.39), obtemos

$$\sqrt{\frac{1}{L^2} \frac{k_\infty}{k_{eff}} - \frac{1}{L^2}} = \frac{n\pi}{a} \quad (2.41)$$

a qual finalmente fornece

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{1 + (L \cdot \frac{n\pi}{a})^2} = k_{eff,n} \quad (2.42)$$

Podemos perceber que esta última equação é a equação (1.33), e que pela definição de buckling geométrico

$$k_{eff,n} = \frac{k_{\infty}}{1 + (L \cdot B_n)^2} \quad (2.43)$$

Como visto pela equação (1.17), as várias constantes  $B_n$  são conhecidas como autovalores, e as funções correspondentes,  $\cos(B_n x)$ , são chamadas autofunções. Pode-se mostrar que se o reator considerado não é crítico, o fluxo é a soma de todas as autofunções, cada uma multiplicada pela função que depende do tempo. Entretanto, se o reator é crítico, todas essas funções ou modos, exceto o primeiro, desaparecem rapidamente com o tempo, e o fluxo de nêutrons assume o formato estacionário do primeiro modo, ou modo fundamental, o mesmo se sucedendo para o fluxo adjunto, isto é,

$$\phi^{\dagger}(x) = cte \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \quad (2.44)$$

que é o fluxo adjunto para um reator placa plana crítico.

Deve ser observado que o valor da constante  $cte$ , que determina a magnitude de  $\phi^{\dagger}$ , não foi estabelecido em uma primeira análise. Matematicamente, isto se deve ao fato da equação (2.32) ser homogênea, e  $\phi^{\dagger}$  multiplicado por qualquer constante é ainda solução da equação. Fisicamente, a razão da magnitude de  $cte$  não ter sido estabelecida é que a magnitude de  $\phi^{\dagger}$  no reator é determinada pela população de nêutrons em que o reator está operando, e não pelas propriedades materiais, como pode ser visto em LAMARSH & BARATTA [6].

Para encontrar uma expressão para  $cte$ , é necessário um cálculo separado para a população de nêutrons no reator. Podemos reescrever a equação (1.45) como

$$\text{número de nêutrons} = \nu \Sigma_f \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \phi^{\dagger}(x) \, dx \quad (2.45)$$

de onde obtemos

$$\text{número de nêutrons} = \frac{2a \cdot \nu \Sigma_f \cdot cte}{\pi} \quad (2.46)$$

que confere a seguinte expressão para o fluxo adjunto

$$\phi^\dagger(x) = \frac{\pi \cdot \text{número de nêutrons}}{2a \cdot \nu \Sigma_f} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (2.47)$$

Se arbitrariamente considerarmos a população de nêutrons igual a  $\nu \Sigma_f$ , chegamos a seguinte expressão simplificada:

$$\phi^\dagger(x) = \frac{\pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (2.48)$$

Para uma análise dinâmica e comparativa, que veremos mais adiante, é relevante o cálculo da expressão de  $l_{eff}^c$ , definido na equação (2.24). Temos que

$$l_{eff}^c = \frac{\langle \phi_c | V^{-1} | \phi_c \rangle}{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} F | \phi_c \rangle} \quad (2.49)$$

onde  $V^{-1}$  é o operador descrito por

$$V^{-1} = \frac{1}{v} \quad (2.50)$$

Substituindo a equação (2.50) na (2.49) e fazendo as devidas substituições e manipulações:

$$l_{eff}^c = \frac{\langle \phi_c | \frac{1}{v} | \phi_c \rangle}{\langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} \nu \Sigma_f | \phi_c \rangle} = \frac{\frac{1}{v} \langle \phi_c | \phi_c \rangle}{\nu \Sigma_f \langle \phi_c | \frac{\chi}{4\pi} | \phi_c \rangle} = \frac{1}{v} \frac{1}{\nu \Sigma_f} \quad (2.51)$$

# Capítulo 3

As equações da cinética pontual obtidas mediante a escolha de uma função importância associada ao nível relativo da população de nêutrons em um sistema subcrítico

## 3.1 O núcleo subcrítico em regime estacionário

### 3.1.1 A distribuição de fluxo

Considere a equação (2.13) escrita convenientemente da seguinte maneira:

$$A_o^\lambda \phi_c - P_o^\lambda \phi_c = 0 \quad (3.1)$$

onde, por simplicidade, ocultamos as dependências em relação ao espaço de fase, e

$$P_o^\lambda := \frac{\chi_o^\lambda}{4\pi} F_o^\lambda \quad (3.2)$$

No mesmo sistema, tornado subcrítico pela alteração de alguns parâmetros tal que  $A_o^\lambda, P_o^\lambda \rightarrow A_o, P_o$ , a condição para se obter um estado estacionário é ter uma fonte externa  $q_{ext}^{(o)}(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$  tal que a equação governante torna-se:

$$A_o\phi_o - P_o\phi_o - q_{ext}^{(o)} = 0 \quad (3.3)$$

onde  $\phi_o$  representa a solução da equação não homogênea, a qual coincide com a solução (1.38) para uma placa plana homogênea onde se aplique o source jerk method.

A distribuição contínua de  $\phi_o$  no espaço e no ângulo, assim como a distribuição discreta relevante à representação multigrupo, são obviamente, em geral, diferentes daquelas para  $\phi_c$ , onde  $\phi_c$  é a solução da equação (3.1). Mas evidentemente  $\phi_o$  se aproxima de  $\phi_c$  se  $A_o, P_o \rightarrow A_o^\lambda, P_o^\lambda$ .

Para um ADS, uma vez definidas as propriedades materiais, a geometria do sistema, as secções de choque relevantes e a intensidade da fonte, a distribuição do fluxo não homogêneo é totalmente determinada pela equação (3.3).

### 3.1.2 O fator de multiplicação do núcleo subcrítico

Nesta seção tentaremos buscar uma expressão para o fator de multiplicação de um sistema subcrítico regido pela equação (3.3).

Considere então as equações (2.4) e (2.5) escritas em termos do operador  $P$  e  $P^\dagger$  respectivamente:

$$A|\phi\rangle - \frac{1}{k_{eff}}P|\phi\rangle = |0\rangle \quad (3.4)$$

$$\langle\phi|A^\dagger - \frac{1}{k_{eff}}\langle\phi|P^\dagger = \langle 0| \quad (3.5)$$

Pesando a equação (3.4) com o vetor  $\langle\phi|$ , solução da equação (3.5), temos

$$\langle\phi|A|\phi\rangle - \frac{1}{k_{eff}}\langle\phi|P|\phi\rangle = \underbrace{\langle\phi|0\rangle}_{=0}$$

$$\langle \phi|A|\phi \rangle = \frac{1}{k_{eff}} \langle \phi|P|\phi \rangle$$

$$k_{eff} = \frac{\langle \phi|P|\phi \rangle}{\langle \phi|A|\phi \rangle} \quad (3.6)$$

Para adaptar a equação (3.6) a um sistema subcrítico, levando-se em conta a mudança no formato do fluxo, propõe-se uma definição diferente de subcriticalidade, introduzindo um coeficiente  $k_{fonte}$ , de acordo com GANDINI & SALVATORES [7]. O procedimento consiste em tomar uma condição de balanço integral obtida pela integração da equação (3.4) por um vetor coluna unitário  $\langle u|$ , com  $\phi$  substituído por  $\phi_o$  e  $k_{eff}$  pelo coeficiente  $k_{fonte}$ , tal como

$$A|\phi_o\rangle - \frac{1}{k_{fonte}}P|\phi_o\rangle = |0\rangle$$

$$\langle u|A|\phi_o\rangle - \frac{1}{k_{fonte}}\langle u|P|\phi_o\rangle = \underbrace{\langle u|0\rangle}_{=0}$$

$$\langle u|A|\phi_o\rangle = \frac{\langle u|P|\phi_o\rangle}{k_{fonte}}. \quad (3.7)$$

Pela a equação (3.3) temos

$$\langle u|A_o|\phi_o\rangle - \langle u|P_o|\phi_o\rangle - \langle u|q_{ext}^{(o)}\rangle = \underbrace{\langle u|0\rangle}_{=0}$$

$$\langle u|A_o|\phi_o\rangle = \langle u|P_o|\phi_o\rangle + \langle u|q_{ext}^{(o)}\rangle \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.7), temos:

$$\langle u|P_o|\phi_o\rangle + \langle u|q_{ext}^{(o)}\rangle = \frac{\langle u|P_o|\phi_o\rangle}{k_{fonte}}$$

$$k_{fonte} = \frac{\langle u|P_o|\phi_o\rangle}{\langle u|P_o|\phi_o\rangle + \langle u|q_{ext}^{(o)}\rangle} \quad (3.9)$$

Esta nova definição engloba em uma mesma esfera de igualdade a importância dos nêutrons gerados por fissão e a importância da fonte de nêutrons.

No entanto, uma definição mais satisfatória de subcriticalidade tem sido proposta introduzindo uma função importância  $n_{F,o}^+$  associada com o nível de potência relativo no sistema subcrítico, de acordo com GANDINI [8]. O índice  $F,o$  em  $n_{F,o}^+$  refere-se à fonte e ao estado estacionário.

Esta função importância é solução da seguinte equação:

$$A_o^\dagger n_{F,o}^+ - F_o \frac{F_o^\dagger}{4\pi} n_{F,o}^+ - \frac{\nu}{S_o} \Sigma_f^{(o)} = 0 \quad (3.10)$$

onde  $\nu$  é o número médio de nêutrons liberados por fissão;  $S_o$  a população de nêutrons em condições nominais não perturbadas e  $\Sigma_f^{(o)}$  a seção de choque macroscópica de fissão no estado estacionário.

Procedendo analogamente à obtenção das equações (3.7), (3.8) e (3.9), no entanto tomando como vetor peso  $\langle n_{F,o}^+|$ , e não o vetor unitário  $\langle u|$ , a seguinte definição é obtida ( compare com a equação(3.9) ):

$$k_{sub} = \frac{\langle n_{F,o}^+|P_o|\phi_o\rangle}{\langle n_{F,o}^+|P_o|\phi_o\rangle + \langle n_{F,o}^+|q_{ext}^{(o)}\rangle} \quad (3.11)$$

que leva em consideração tanto a distribuição de fluxo inhomogêneo quanto a importância de nêutrons com respeito ao observável relevante do sistema, isto é, o nível da população de nêutrons.

Conforme nos aproximamos da criticalidade, nos aproximamos de um estado estacionário que independe de fonte externa para se manter e a equação (3.11) se aproxima da equação (3.6), como requerido pelos fundamentos físicos.

Estas diferentes definições do coeficiente de multiplicação implicam uma ambiguidade na definição de reatividade, isto é, de sua mudança relativa devido a uma perturbação nos parâmetros do reator. De acordo com sua definição corrente, a reatividade está associada com o coeficiente  $k_{eff}$  e então aplicável apenas a sistemas livres de fonte externa.

## 3.2 A cinética de um sistema subcrítico

### 3.2.1 Equação básica e cinética pontual

Buscaremos nesta seção as equações da cinética pontual a serem resolvidas para a investigação do comportamento cinético de um núcleo subcrítico, com base na nova função importância  $n_{F,o}^+$ . A metodologia aplicada será a mesma da seção 2.2, com o fluxo adjunto sendo substituído pela função importância  $n_{F,o}^+$ . No entanto, agora nos deparamos com um problema de fonte externa, o qual requer um tratamento não tão simples quanto aquele visto anteriormente. As idéias que norteiam o presente capítulo remetem à teoria de perturbação generalizada heurística ou, do inglês, HGPT: Heuristicaly Generalized Perturbation Theory, A.GANDINI [9].

Considere então a equação (2.16). Pesando-a com  $\langle n_{F,o}^+ |$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\ & \langle n_{F,o}^+ | -A | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| \Psi \right\rangle \\ & + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle n_{F,o}^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora suponha que perturbemos o sistema da seguinte maneira:

$$-A \longrightarrow -A_o + \delta A$$

$$F \longrightarrow F_o + \delta F$$

$$q_{ext} \longrightarrow q_{ext}^{(o)} + \delta q_{ext}$$

onde  $-A_o$ ,  $F_o$  e  $q_{ext}^{(o)}$  correspondem a estados estacionários não perturbados.

Substituindo e manipulando estas perturbações na equação (3.15) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\ & \langle n_{F,o}^+ | (-A_o + \delta A) | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} (F_o + \delta F) \right| \Psi \right\rangle \\ & + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle n_{F,o}^+ | (q_{ext}^{(o)} + \delta q_{ext}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\ & \langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle \\ & + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F_o \right| \Psi \right\rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} \delta F \right| \Psi \right\rangle \\ & + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \underbrace{\langle n_{F,o}^+ | q_{ext}^{(o)} \rangle}_{=1} + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle \end{aligned}$$

Somando e subtraindo

$$\sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle \left( = \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i (F_o + \delta F) \right| \Psi \right\rangle \right)$$

no lado direito da última equação, e levando em conta a relação de reciprocidade da importância  $\langle n_{F,o}^+ | q_{ext}^{(o)} \rangle = 1$ , A.GANDINI [9], teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\ & \langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle \\ & + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F_o \right| \Psi \right\rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} \delta F \right| \Psi \right\rangle \\ & + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + 1 + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle \\ & + \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\
& \langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle \\
& + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F_o \right| \Psi \right\rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} \delta F \right| \Psi \right\rangle \\
& + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} c_i \right| \right\rangle + 1 + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle \\
& + \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i (F_o + \delta F) \right| \Psi \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\
& \langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle \\
& + \underbrace{\left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F_o \right| \Psi \right\rangle}_{\text{}} + \underbrace{\left\langle n_{F,o}^+ \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} \delta F \right| \Psi \right\rangle}_{\text{}} \\
& + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} c_i \right| \right\rangle + 1 + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle \\
& + \underbrace{\sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F_o \right| \Psi \right\rangle}_{\text{}} + \underbrace{\sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i \delta F \right| \Psi \right\rangle}_{\text{}} \\
& - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\
& \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| \left[ (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} + \sum_{i=1}^I \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i \right] \delta F \right| \Psi \right\rangle \\
& + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} c_i \right| \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle + 1 \\
& + \underbrace{\left\langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \right\rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| F_o \left[ (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} + \sum_{i=1}^I \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i \right] \right| \Psi \right\rangle}_{\text{}} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (3.10) em sua forma vetorial, pesando-a com o vetor  $\langle \Psi |$  e manipulando de forma adequada, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | A_o^\dagger | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{1}{4\pi} \langle \Psi | \underbrace{F_o F_o^\dagger}_{:=\Xi_o^\dagger} | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{\nu}{S_o} \langle \Psi | \Sigma_f^{(o)} \rangle &= 0 \\
\langle \Psi | A_o^\dagger | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{1}{4\pi} \langle \Psi | \Xi_o^\dagger | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{\nu}{S_o} \langle \Psi | \Sigma_f^{(o)} \rangle &= 0 \\
\langle A_o \Psi | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{1}{4\pi} \langle \Xi_o \Psi | n_{F,o}^+ \rangle - \frac{\nu}{S_o} \langle \Psi | \Sigma_f^{(o)} \rangle &= 0 \\
\langle n_{F,o}^+ | A_o | \Psi \rangle - \frac{1}{4\pi} \langle n_{F,o}^+ | \Xi_o | \Psi \rangle - \frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle &= 0 \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Pelas propriedades dos operadores lineares, temos

$$\Xi_o = (\Xi_o^\dagger)^\dagger = (F_o F_o^\dagger)^\dagger = (F_o^\dagger)^\dagger (F_o)^\dagger = F_o F_o^\dagger \tag{3.15}$$

de onde concluimos que  $\Xi_o$  é um operador hermiteano, pois  $\Xi_o = \Xi_o^\dagger$ , e/ou que  $F_o$  e  $F_o^\dagger$  comutam.

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14) e multiplicando o resultado por  $-1$ , encontramos

$$\begin{aligned}
-\langle n_{F,o}^+ | A_o | \Psi \rangle + \frac{1}{4\pi} \langle n_{F,o}^+ | F_o F_o^\dagger | \Psi \rangle + \frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle &= 0 \\
\langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| F_o \frac{F_o^\dagger}{4\pi} \right| \Psi \right\rangle &= -\frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle \\
\langle n_{F,o}^+ | -A_o | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| F_o \left[ (1-\beta) \frac{\chi_p}{4\pi} + \sum_{i=1}^I \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i \right] \right| \Psi \right\rangle &= -\frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Substituindo o lado direito da equação (3.16) na equação (3.13) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\
& \langle n_{F,o}^+ | \delta A | \Psi \rangle + \left\langle n_{F,o}^+ \left| \underbrace{\left[ (1-\beta) \frac{\chi_p}{4\pi} + \sum_{i=1}^I \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i \right]}_{\delta F} \right| \Psi \right\rangle \\
& + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle \\
& + 1 - \frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tomando a definição (2.10), a equação (3.17) torná-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \Psi \rangle = & \\
& \left\langle n_{F,o}^+ \left| \delta A + \frac{\chi}{4\pi} \delta F \right| \Psi \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \Psi \right\rangle \\
& + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + 1 - \frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \Psi \rangle \\
& + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Vimos no capítulo 2, equações (2.18)-(2.22), que uma fatoraçoão pode ser aplicada a  $\Psi$ , de modo a obtermos parâmetros integrais bem definidos e consequentemente uma forma de melhor lidar com as equações da cinética.

No presente capítulo, um método semelhante pode ser aplicado à equação (3.18). Para isto, basta tomarmos a equação (2.22) e substituirmos  $S^c$  por  $S^n$  e  $\phi^c$  por  $\phi_o$ , onde  $S^n$  corresponde à população de nêutrons na teoria H.G.P.T. e  $\phi_o$  ao fluxo estacionário solução da equação (3.3).

Assim sendo:

$$\Psi \approx S^n \cdot \phi_o \tag{3.19}$$

Substituindo então a fatoraçoão (3.19) na equação (3.18), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | (S^n(t) \cdot \phi_o) \rangle = & \\
\left\langle n_{F,o}^+ \left| \delta A + \frac{\chi}{4\pi} \delta F \right| (S^n(t) \cdot \phi_o) \right\rangle - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| (S^n(t) \cdot \phi_o) \right\rangle & \\
+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + 1 - \frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | (S^n(t) \cdot \phi_o) \rangle & \\
+ \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \phi_o \rangle \frac{dS^n(t)}{dt} = & \\
\left\langle n_{F,o}^+ \left| \delta A + \frac{\chi}{4\pi} \delta F \right| \phi_o \right\rangle S^n(t) - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \phi_o \right\rangle S^n(t) & \\
+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + 1 - \underbrace{\frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f^{(o)} | \phi_o \rangle}_{=1} S^n(t) & \\
+ \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \phi_o \rangle \frac{dS^n(t)}{dt} = & \\
\left\langle n_{F,o}^+ \left| \delta A + \frac{\chi}{4\pi} \delta F \right| \phi_o \right\rangle S^n(t) - \sum_{i=1}^I \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \phi_o \right\rangle S^n(t) & \\
+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + [1 - S^n(t)] + \langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle &
\end{aligned}$$

Dividindo todos os membros da equação acima por um fator de normalização

$\mathcal{I} = \langle n_{F,o}^+ | (\chi/4\pi) F | \phi_o \rangle$ , teremos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\langle n_{F,o}^+ | V^{-1} | \phi_o \rangle}{\mathcal{I}}}_{:=l_{eff}^n} \frac{dS^n(t)}{dt} = & \\
\underbrace{\frac{\langle n_{F,o}^+ | \delta A + \frac{\chi}{4\pi} \delta F | \phi_o \rangle}{\mathcal{I}}}_{:=\rho_{gen}} S^n(t) - \underbrace{\sum_{i=1}^I \frac{\langle n_{F,o}^+ | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F | \phi_o \rangle}{\mathcal{I}}}_{:=\beta_{eff}^n} S^n(t) & \\
+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \underbrace{\frac{\langle n_{F,o}^+ | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}{\mathcal{I}}}_{:=\xi_i} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{I}}}_{:=\zeta} [1 - S^n(t)] + \underbrace{\frac{\langle n_{F,o}^+ | \delta q_{ext} \rangle}{\mathcal{I}}}_{:=\rho_{fonte}} &
\end{aligned}$$

$$l_{eff}^n \frac{dS^n(t)}{dt} = \rho_{gen} S^n(t) - \beta_{eff}^n S^n(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \xi_i + \zeta[1 - S^n(t)] + \rho_{fonte}$$

$$l_{eff}^n \frac{dS^n(t)}{dt} = (\rho_{gen} - \beta_{eff}^n) S^n + \sum_{i=1}^I \lambda_i \xi_i + \zeta[1 - S^n(t)] + \rho_{fonte} \quad (3.20)$$

Considere agora a equação (2.27) para a concentração de precursores. Multiplicando-a por  $\langle n_{F,o}^+ | \chi_{d,i} / 4\pi \rangle$ , tomando a fatoração (3.19) e dividindo pelo fator de normalização  $\mathcal{I}$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle = \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| \phi_o \right\rangle S^n - \lambda_i \left\langle n_{F,o}^+ \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \xi_i = \beta_{i,eff}^n S^n - \lambda_i \xi_i \quad (3.21)$$

### 3.2.2 O Comportamento Assintótico

A população de nêutrons assintótica seguindo a inserção de uma perturbação que mantém o sistema subcrítico pode ser obtida das equações (3.20) e (3.21).

Tomando

$$\frac{d}{dt} \xi_i = 0$$

temos pela equação (3.21) que

$$\xi_i = \frac{\beta_{i,eff}^n}{\lambda_i} S^n \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.22), juntamente com  $(dS^n/dt) = 0$ , na equação (3.20), encontramos

$$\rho_{gen} S_{as}^n + \zeta(1 - S_{as}^n) + \rho_{fonte} = 0$$

Mas lembrando ainda que

$$\zeta = \frac{1}{\mathcal{I}} \equiv \frac{1 - k_{sub}}{k_{sub}}$$

podemos isolar  $S_{as}^n$  na última equação, e encontrar

$$S_{as}^n = \frac{1 - k_{sub} + k_{sub} \cdot \rho_{fonte}}{1 - k_{sub} - k_{sub} \cdot \rho_{gen}} \quad (3.23)$$

Como esperado,  $S^n$  incrementa com  $\rho_{fonte}$  (isto é, com o aumento da fonte), e com  $\rho_{gen}$  (isto é, com reatividade positiva).

No limite

$$\rho_{gen} \longrightarrow \frac{1 - k_{sub}}{k_{sub}} \quad (3.24)$$

isto é, com o sistema se aproximando da criticalidade,  $S^n$  diverge (devido a presença da fonte).

### 3.2.3 A expressão para $n_{F,o}^+(x)$

A função importância  $n_{F,o}^+(x)$ , associada com o nível populacional relativo de nêutrons no sistema subcrítico, pode ser calculada pela equação (3.10). Baseando-se na teoria de difusão a um grupo de energia pode ser escrita como:

$$\left( -D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a \right) n_{F,o}^+(x) - \nu \Sigma_f n_{F,o}^+(x) - \frac{\nu}{S_o} \Sigma_f = 0 \quad (3.25)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$n_{F,o}^+ \left( +\frac{a}{2} \right) = n_{F,o}^+ \left( -\frac{a}{2} \right) = 0$$

Por simplicidade, chamemos  $(\nu/S_o)\Sigma_f$  de  $\mathfrak{S}$ , de tal maneira que:

$$\left(-D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a\right) n_{F,o}^+(x) - \nu \Sigma_f n_{F,o}^+(x) - \mathfrak{S} = 0 \quad (3.26)$$

$$-D \frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) + \Sigma_a n_{F,o}^+(x) - \nu \Sigma_f n_{F,o}^+(x) - \mathfrak{S} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) - \frac{\Sigma_a}{D} n_{F,o}^+(x) + \frac{\nu \Sigma_f}{D} n_{F,o}^+(x) + \frac{\mathfrak{S}}{D} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) - \frac{\Sigma_a}{D} n_{F,o}^+(x) + \frac{\nu \Sigma_f}{D} \cdot \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a} n_{F,o}^+(x) + \frac{\mathfrak{S}}{D} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) - \underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{1/L^2} n_{F,o}^+(x) + \underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{1/L^2} \cdot \underbrace{\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}}_{k_\infty} n_{F,o}^+(x) + \frac{\mathfrak{S}}{D} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) - \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{a_1} n_{F,o}^+(x) + \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{a_1} \cdot \underbrace{k_\infty}_{a_2} n_{F,o}^+(x) + \underbrace{\frac{\mathfrak{S}}{D}}_{a_3} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) - a_1 n_{F,o}^+(x) + a_1 a_2 n_{F,o}^+(x) + a_3 = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) + \underbrace{(a_1 a_2 - a_1)}_{a_4} n_{F,o}^+(x) + a_3 = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} n_{F,o}^+(x) + a_4 n_{F,o}^+(x) + a_3 = 0 \quad (3.27)$$

Resolvendo a última equação, encontramos:

$$n_{F,o}^+(x) = C_2 \cdot \cos(\sqrt{a_4}x) - (a_3/a_4) \quad (3.28)$$

Lembrando que  $n_{F,o}^+(a/2) = 0$ , pela condição de contorno, temos:

$$0 = C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2}\right) - \frac{a_3}{a_4}$$

$$C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a_3}{a_4}$$

$$C_2 = \frac{(a_3/a_4)}{\cos(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2})}$$

$$n_{F,o}^+(x) = \frac{(a_3/a_4)}{\cos(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2})} \cos(\sqrt{a_4}x) - \frac{a_3}{a_4}$$

$$n_{F,o}^+(x) = \frac{a_3}{a_4} \left[ \frac{\cos(\sqrt{a_4}x)}{\cos(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2})} \right] - \frac{a_3}{a_4}$$

$$n_{F,o}^+(x) = \frac{a_3}{a_4} \left[ \frac{\cos(\sqrt{a_4}x)}{\cos(\sqrt{a_4} \cdot \frac{a}{2})} - 1 \right]$$

$$a_4 = a_1 a_2 - a_1 = \frac{1}{L^2} \cdot k_\infty - \frac{1}{L^2} = \frac{1}{L^2} (k_\infty - 1) = \mu^2 \quad ;$$

$$\sqrt{a_4} = \pm \mu$$

$$\sqrt{a_4} = +\mu$$

$$n_{F,o}^+(x) = \frac{\mathfrak{S}}{D} \cdot \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{\cos(\mu x)}{\cos(\mu \cdot \frac{a}{2})} - 1 \right] \quad (3.29)$$

Como vimos acima, por definição  $\mathfrak{S} = (\nu/S_o)\Sigma_f$ . Lembremos que, pelas relações de reciprocidade, GANDINI [10]:

$$\frac{\nu}{S_o} \langle \Sigma_f | \phi_o \rangle = 1 = \langle n_{s,o}^+(x) | S_{ext} \rangle$$

de tal forma que:

$$\frac{\nu}{S_o} = \frac{1}{\langle \Sigma_f | \phi_o \rangle} \quad (3.30)$$

Logo:

$$\langle \Sigma_f | \phi_o \rangle = \int \Sigma_f \phi_o(x) dx = \Sigma_f \int \phi_o(x) dx = \Sigma_f \cdot \text{neutrons}$$

$$\mathfrak{S} = \left( \frac{\nu}{S_o} \right) \cdot \Sigma_f = \left( \frac{1}{\Sigma_f \cdot \text{neutrons}} \right) \cdot \Sigma_f = \frac{1}{\text{neutrons}} \quad (3.31)$$

Como vemos, não precisamos conhecer o valor de  $\Sigma_f$ , e  $\mathfrak{S}$  consiste no inverso da população total de nêutrons no reator estacionário.

O parâmetro integral de relevância para cálculos posteriores é  $l_{eff}^n$ . Por sua definição, vemos que pode ser expresso da mesma forma que  $l_{eff}^c$ , isto é

$$l_{eff}^n = \frac{1}{v} \frac{1}{\nu \Sigma_f} \quad (3.32)$$

# Capítulo 4

## Desenvolvimento de novas equações da cinética pontual mediante uma função importância associada a produção de nêutrons de fissão

### 4.1 Introdução

A física de reatores subcríticos foi discutida nos dois últimos capítulos em termos da teoria convencional para um núcleo crítico pontual, usando  $k_{eff}$ . Todavia a equação contendo  $k_{eff}$  é fisicamente estrita a sistemas de reatores limitados ao estado crítico.

As equações presentes nos capítulos 2 e 3 usam o fluxo adjunto e uma função peso associada à população de nêutrons relativa, respectivamente. Neste presente capítulo, uma nova equação pontual é deduzida de acordo com o balanço do número de nêutrons de fissão em um sistema subcrítico.

Embora a equação tenha uma aparência similar à convencional, todos os valores que aparecem na nova equação têm um significado físico distinto, conforme descrito por NISHIHARA, IWASAKI & UDAGAWA [11]. Eles representam quantidades físicas reais e não médias, ou seja, não representam quantidades ponderadas por alguma função peso, tal como o fluxo adjunto ou  $n_{F,o}^+$ .

A variável convencional  $k_{eff}$  é substituída por  $k_f$ , representando a taxa de multiplicação de um nêutron de fissão, de acordo com KOBAYASHI & NISHIHARA [12].

## 4.2 Sistema em um estado estático

Um evento de fissão em um sistema subcrítico com uma fonte externa pode ser causado por dois tipos de nêutrons: nêutrons provenientes de eventos de fissão e nêutrons provenientes da fonte.

A nova equação a ser desenvolvida é designada para levar em conta o número médio de nêutrons de fissão originado dos dois tipos de nêutrons.

Os números médios são diferentes porque os dois tipos de nêutrons têm distribuição espacial e espectro de energia individuais.

Para descrever então claramente o fenômeno de multiplicação de um sistema subcrítico, é indispensável que duas taxas de multiplicação sejam introduzidas: uma,  $k_f$ , corresponde aos nêutrons de fissão; a outra,  $k_q$ , corresponde aos nêutrons de fonte.

Estas são chamadas respectivamente de taxa de multiplicação de nêutrons de fissão e taxa de multiplicação de nêutrons de fonte.

Esta seção descreve brevemente a obtenção de  $k_f$  e  $k_q$  a partir da equação de transporte para um estado estático, empregando uma função importância associada aos nêutrons de fissão.

Esta seção também discute o balanço dos nêutrons de fissão em estado estacionário mediante estas taxas.

A função importância para nêutrons de fissão,  $G(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$ , pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$A^\dagger G(\vec{r}, E, \hat{\Omega}) = \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) \quad (4.1)$$

onde  $G(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$  significa o número de nêutrons de fissão produzidos por um nêutron em  $(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$ . Pode ser calculada considerando-se o lado direito da equação (4.1) como uma fonte de nêutrons, assumindo a não ocorrência de reação de fissão, e então resolvendo-a como um problema adjunto usando o código usual de difusão ou transporte.

As taxas de multiplicação  $k_f$  e  $k_q$  podem ser obtidas pelas equações (3.3) e (4.1) como se segue.

Considere a equação (3.3) pesada com  $\langle G |$ , isto é:

$$\underbrace{\langle G|A_o|\phi_o\rangle}_{(4.2)} = \left\langle G \left| \frac{\chi_o}{4\pi} F_o \right| \phi_o \right\rangle + \langle G|q_{ext}^{(o)}\rangle \quad (4.2)$$

e a equação (4.1), no estado estacionário, pesada por  $\phi_o$ ,

$$\langle \phi_o|A_o^\dagger|G\rangle = \langle \phi_o|\nu\Sigma_f^{(o)}\rangle$$

$$\langle A_o\phi_o|G\rangle = \langle \phi_o|\nu\Sigma_f^{(o)}\rangle$$

$$\underbrace{\langle G|A_o|\phi_o\rangle}_{(4.3)} = \langle \nu\Sigma_f^{(o)}|\phi_o\rangle \quad (4.3)$$

Igualando as equações (4.2) e (4.3), temos:

$$\left\langle G \left| \frac{\chi_o}{4\pi} F_o \right| \phi_o \right\rangle + \langle G|q_{ext}^{(o)}\rangle = \langle \nu\Sigma_f^{(o)}|\phi_o\rangle \quad (4.4)$$

Uma vez que o número total de nêutrons em estado estacionário possa ser expresso por  $S^{(o)} = \langle u|(\chi/4\pi)F|\phi_o\rangle$ , a equação (4.4) pode ser convenientemente manipulada como se segue:

$$\frac{\left\langle G \left| \frac{\chi_o}{4\pi} F_o \right| \phi_o \right\rangle}{\underbrace{\langle u|\frac{\chi}{4\pi}F|\phi_o\rangle}_{:=k_f}} + \frac{\langle G|q_{ext}^{(o)}\rangle}{\underbrace{\langle u|\frac{\chi}{4\pi}F|\phi_o\rangle}_{:=k_q}} = \frac{\langle \nu\Sigma_f^{(o)}|\phi_o\rangle}{\underbrace{\langle u|\frac{\chi}{4\pi}F|\phi_o\rangle}_{=1}} \quad (4.5)$$

$$k_f + k_q = 1 \quad (4.6)$$

A equação(4.5) mostra claramente o significado de  $k_f$  e  $k_q$ , que representam, respectivamente, o número de nêutrons de fissão produzidos por nêutrons de fissão e o número de nêutrons de fissão produzidos por nêutrons de fonte.

Usando  $k_f$  e  $k_q$ ,  $k_{sub}$  pode ser definido como a média destas duas taxas de multiplicação:

$$k_{sub} := \frac{k_f S + k_q Q}{S + Q} \quad (4.7)$$

Algumas alternâncias na equação (4.7) são notadas como se segue:

$$k_{sub} = \frac{k_f S}{S + Q} + \underbrace{\frac{k_q Q}{S + Q}}_{\rightarrow 0}$$

$$k_{sub} = \frac{k_f S}{S + Q} \approx \frac{S}{S + Q} \quad (4.8)$$

Observa-se desta alternância que  $k_{sub}$  pode ser obtido sem o cálculo de  $G(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$  se os valores de  $S$  e  $Q$  são conhecidos .

### 4.3 Sistema em um estado dinâmico

Em seguida, novas equações pontuais para o estado dinâmico de um sistema subcrítico são obtidas.

Em um estado dinâmico, os nêutrons de fissão são divididos em dois tipos: nêutrons prontos e nêutrons retardados.

Uma vez que o espectro de energia é diferente para nêutrons prontos e nêutrons retardados,  $\chi_p$  e  $\chi_{d,i}$ , os números de nêutrons de fissão produzidos por estes dois tipos de nêutrons são diferentes.

Duas taxas de multiplicação,  $k_p$  e  $k_{d,i}$ , que correspondem aos dois tipos de nêutrons também devem ser obtidas.

Consideremos então, mais uma vez, a equação (2.16), que governa o fluxo neutrônico não estacionário. Pesando-a com a função importância, ou função peso, em questão, isto é,  $G$ , temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle G \left| V^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle &= \\
&= - \underbrace{\langle G | A | \Psi \rangle}_{:=S} + \left\langle G \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| \Psi \right\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle G \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle + \langle G | q_{ext} \rangle
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle G \left| V^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle \cdot \frac{\partial S / \partial t}{\partial S / \partial t} &= \\
&= -S + \left\langle G \left| (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F \right| \Psi \right\rangle \cdot \frac{\langle u | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \Psi \rangle}{\langle u | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \Psi \rangle} \cdot \frac{\langle u | \frac{\chi}{4\pi} F | \Psi \rangle}{\langle u | \frac{\chi}{4\pi} F | \Psi \rangle} \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle G \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle \cdot \frac{\langle u | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}{\langle u | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle} + \langle G | q \rangle \cdot \frac{\langle u | q \rangle}{\langle u | q \rangle}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\langle G | V^{-1} (\partial / \partial t) | \Psi \rangle}{\partial S / \partial t}}_{:=l} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} &= \\
&= -S + \underbrace{\frac{\langle u | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \Psi \rangle}{\langle u | \frac{\chi}{4\pi} F | \Psi \rangle}}_{:= (1 - \bar{\beta})} \cdot \underbrace{\frac{\langle G | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \Psi \rangle}{\langle u | (1 - \beta) \frac{\chi_p}{4\pi} F | \Psi \rangle}}_{:=k_p} \cdot \underbrace{\left\langle u \left| \frac{\chi}{4\pi} F \right| \Psi \right\rangle}_{:=S} \\
&+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \underbrace{\frac{\langle G | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}{\langle u | \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} | c_i \rangle}}_{:=k_{d,i}} \cdot \underbrace{\left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle}_{:=C_i} + \underbrace{\frac{\langle G | q \rangle}{\langle u | q \rangle}}_{:=k_q} \cdot \underbrace{\langle u | q \rangle}_{:=Q}
\end{aligned}$$

$$l \frac{\partial S}{\partial t} = -S + k_p (1 - \bar{\beta}) S + \sum_{i=1}^I \lambda_i k_{d,i} C_i + k_q Q$$

Rearranjando a última equação acima, temos:

$$l \frac{\partial S}{\partial t} = [-1 + k_p (1 - \bar{\beta})] S + \sum_{i=1}^I \lambda_i k_{d,i} C_i + k_q Q \tag{4.10}$$

Para a eq.(12), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} |c_i\rangle = \beta_i F |f\rangle - \lambda_i |c_i\rangle$$

Multiplicamos então por  $\langle u | (\chi_{d,i}/4\pi) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right| c_i \right\rangle &= \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| f \right\rangle - \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \lambda_i \right| c_i \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle &= \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \beta_i F \right| f \right\rangle \cdot \frac{S}{S} - \lambda_i \left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle}_{:=C_i} &= \underbrace{\frac{\langle u | (\chi_{d,i}/4\pi) \beta_i F | f \rangle}{\langle u | (\chi/4\pi) F | f \rangle}}_{:=\bar{\beta}_i} S - \lambda_i \underbrace{\left\langle u \left| \frac{\chi_{d,i}}{4\pi} \right| c_i \right\rangle}_{:=C_i} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, finalmente chegamos a equação para a concentração de precursores:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i = \bar{\beta}_i S - \lambda_i C_i \quad (4.12)$$

No sistema de equações acoplado (4.10) e (4.12), as taxas de multiplicação presentes são  $k_p$ , referente aos nêutrons prontos, e  $k_{d,i}$ , referente aos nêutrons retardados. No entanto  $k_f$ , a taxa de multiplicação dos nêutrons de fissão, pode ser definida como o valor médio de  $k_p$  e  $k_{d,i}$ :

$$k_f = (1 - \bar{\beta})k_p + \sum_i \bar{\beta}_i k_{d,i} \quad (4.13)$$

#### 4.4 Cálculo de $G(x)$ e dos Parâmetros Integrais para uma Placa plana

Esta seção descreve soluções analíticas para uma placa plana unidimensional, de espessura  $a$ , com uma fonte pontual em uma posição  $x^0$ , de modo a ajudar na compreensão da presente equação.

Baseando-se na teoria de difusão a um grupo de energia, a equação (4.1) para a função importância  $G(x)$ , escreve-se como se segue:

$$\left( -D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a \right) G(x) = \nu \Sigma_f \quad (4.14)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$G(\pm a/2) = 0 \quad (4.15)$$

Podemos rearranjar (4.14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -D \frac{d^2}{dx^2} G(x) + \Sigma_a G(x) &= \nu \Sigma_f \\ \frac{d^2}{dx^2} G(x) - \frac{\Sigma_a}{D} G(x) &= -\frac{\nu \Sigma_f}{D} \\ \frac{d^2}{dx^2} G(x) - \frac{\Sigma_a}{D} G(x) &= -\frac{\nu \Sigma_f}{D} \cdot \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a} \\ \frac{d^2}{dx^2} G(x) - \underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{=1/L^2} G(x) &= -\underbrace{\frac{\Sigma_a}{D}}_{=1/L^2} \cdot \underbrace{\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}}_{=k_\infty} \\ \frac{d^2}{dx^2} G(x) - \underbrace{\frac{1}{L^2}}_{=a_1} G(x) &= -\underbrace{\frac{1}{L^2}}_{=a_1} \cdot \underbrace{k_\infty}_{=a_2} \\ \frac{d^2}{dx^2} G(x) - a_1 G(x) + a_1 a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

com a seguinte solução:

$$G(x) = a_2 \left[ 1 - \frac{\cosh(\sqrt{a_1} \cdot x)}{\cosh(\sqrt{a_1} \cdot \frac{a}{2})} \right]$$

Lembrado que  $a_2 = k_\infty$  e  $a_1 = 1/L^2$ :

$$G(x) = k_\infty \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{L^2}} \cdot x\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{1}{L^2}} \cdot \frac{a}{2}\right)} \right]$$

A expressão procurada será então:

$$G(x) = k_{\infty} \left[ 1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/2L)} \right] \quad (4.17)$$

As taxas de multiplicação e parâmetros integrais são como se segue:

$$\begin{aligned} S &= \left\langle u \left| \frac{\chi}{4\pi} F \right| \phi_o \right\rangle = \iiint \frac{\chi}{4\pi} \nu \Sigma_f \phi_o dE d\Omega dx = \\ &= \iint \frac{1}{4\pi} \nu \Sigma_f \phi_o d\Omega dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \nu \Sigma_f \phi_o dx \end{aligned}$$

$$S = \frac{Q}{D} \frac{\nu \Sigma_f}{\mu^2} \left[ \frac{\cos(\mu x)}{\cos(\mu \frac{a}{2})} - 1 \right] \quad (4.18)$$

$$k_{sub} = \frac{S}{S + Q} \quad (4.19)$$

$$k_f = 1 - (1 - k_{\infty}) \frac{1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/2L)}}{1 - \frac{\cos(\mu x)}{\cos(\mu \frac{a}{2})}} \quad (4.20)$$

$$k_q = k_{\infty} \left[ 1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/2L)} \right] \quad (4.21)$$

$$k_p = k_{d,i} = k_f \quad (4.22)$$

$$\bar{\beta} = \beta \quad ; \quad \bar{\beta}_i = \beta_i \quad (4.23)$$

$$l = \frac{1}{v} \frac{1}{\nu \Sigma_f} \left[ 1 - (1 - k_{\infty}) \frac{1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/2L)}}{1 - \frac{\cos(\mu x)}{\cos(\mu \frac{a}{2})}} \right] \quad (4.24)$$

# Capítulo 5

## Resultados e Análise

Este capítulo apresenta os resultados dos cálculos para os diferentes métodos, sistemas de equações da cinética pontual e parâmetros integrais vistos ao longo do texto. Um núcleo contendo actínídeos menores como parte combústível e um alvo de spallation líquido de chumbo e bismuto ( $Pb-Bi$ ) é adotado aqui como o sistema a ser calculado, de acordo com NISHIHARA, IWASAKI & UDAGAU [11]. Como mostrado na Tabela 1, constantes de 1 grupo de energia foram obtidas das constantes de 73 grupos por colapsoção.

**Tabela 1.** Constantes do Placa plana.

$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$D(cm)$	$v(cm/seg)$	$x'(cm)$	$L(cm)$	$k_\infty$	$\mu$
0.00437	0.00502	1.18	3.36E8	0	16.4	1.15	0.0235

A Tabela 2 mostra as constantes de decaimento e frações de nêutrons retardados para os 6 diferentes grupos de precursores.

**Tabela 2.** Constantes de decaimento e frações de nêutrons retardados.

Grupo	1	2	3	4	5	6	Total
$\lambda[s^{-1}]$	0.0127	0.0317	0.115	0.311	1.4	3.87	
$\beta$	9.2661E-05	7.7736E-04	5.9745E-04	9.8477E-04	3.4550E-04	8.9481E-05	2.8872E-03

A largura  $a$  da placa plana é ajustada na equação (1.33), para  $n = 1$ , de modo a obtermos um determinado  $k_{eff,1} = k_{eff}$  a ser investigado. Para efeitos de uma boa comparação, 4 diferentes níveis de subcriticalidade, correspondentes a  $k_{eff} = 0.900$ ,  $k_{eff} = 0.950$ ,  $k_{eff} = 0.997$  e  $k_{eff} = 0.999$  serão analisados. A Tabela 3 mostra os diferentes  $k_{eff}$ 's, os tamanhos de placa plana correspondentes, o valor da fonte externa utilizada e a população de nêutrons estacionária para cada situação de subcriticalidade.

**Tabela 3.** Características das diferentes placas planas analisadas.

$a[cm]$	$k_{eff}$	$Q[nêutrons/s]$	população $[nêutrons/s]$
98.00	0.900	0.9805	11.00
113.00	0.950	0.9853	23.94
132.33	0.977	1.0000	474.75
133.34	0.999	1.0000	1893.62

Os pares de figuras (1, 2), (3, 4), (5, 6) e (7, 8) abaixo mostram, respectivamente, o fluxo estacionário  $\phi_o(x)$  dado pela equação (1.38) e o fluxo  $\Psi(x, t)$  dado pela equação (1.28).

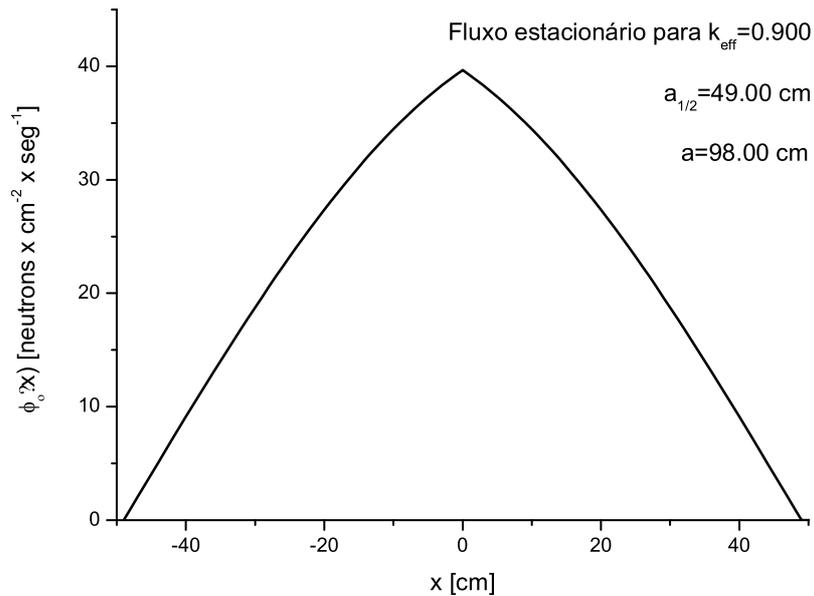


Fig 1. Fluxo estacionário para  $k_{eff} = 0.900$ .

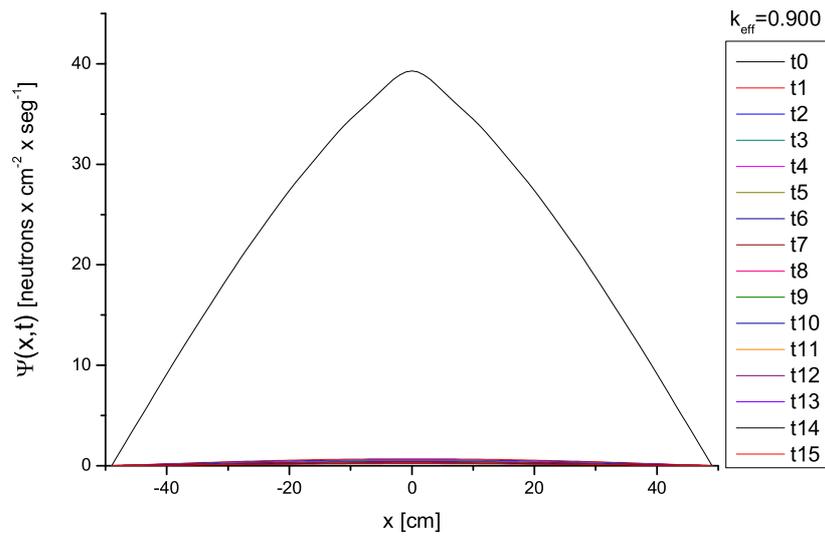


Fig 2.  $\Psi(x,t)$  para  $k_{\text{eff}} = 0.900$ .

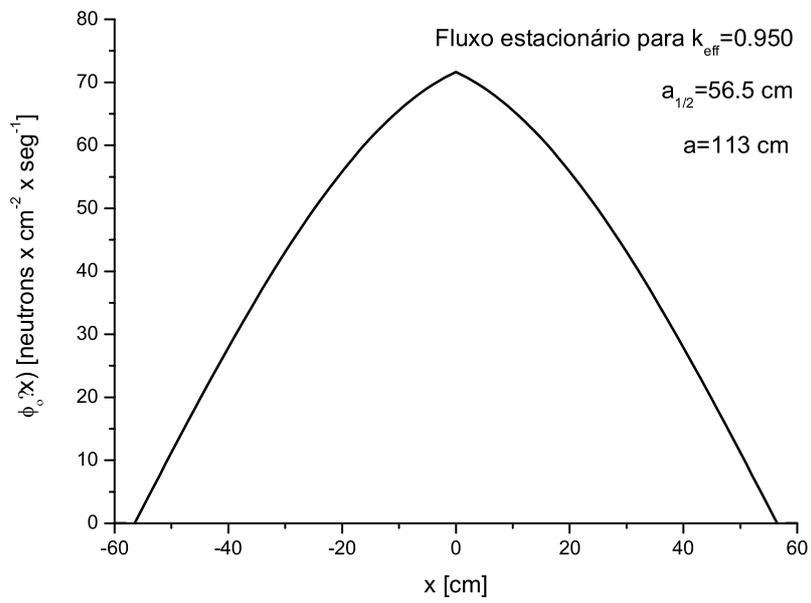


Fig 3. Fluxo estacionário para  $k_{\text{eff}} = 0.950$ .

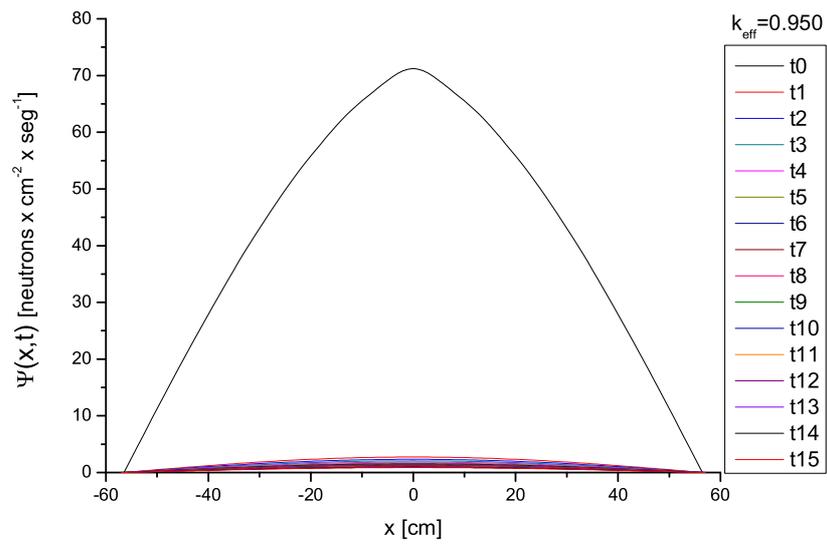


Fig 4.  $\Psi(x, t)$  para  $k_{\text{eff}} = 0.950$ .

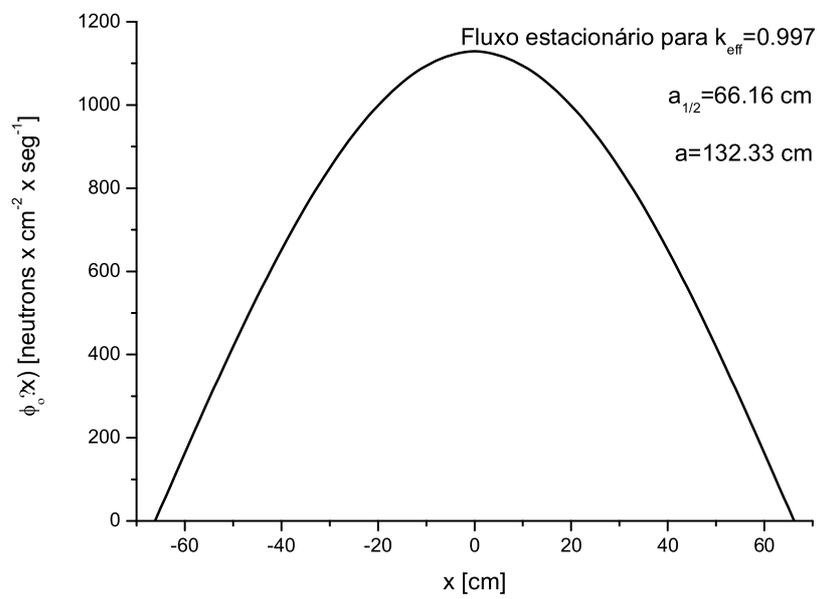


Fig 5. Fluxo estacionário para  $k_{\text{eff}} = 0.997$ .

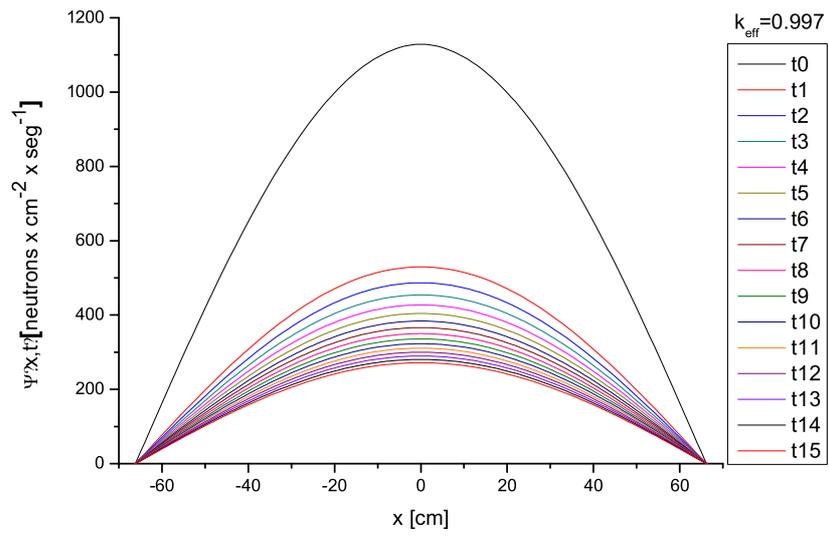


Fig 6.  $\Psi(x, t)$  para  $k_{eff} = 0.997$ .

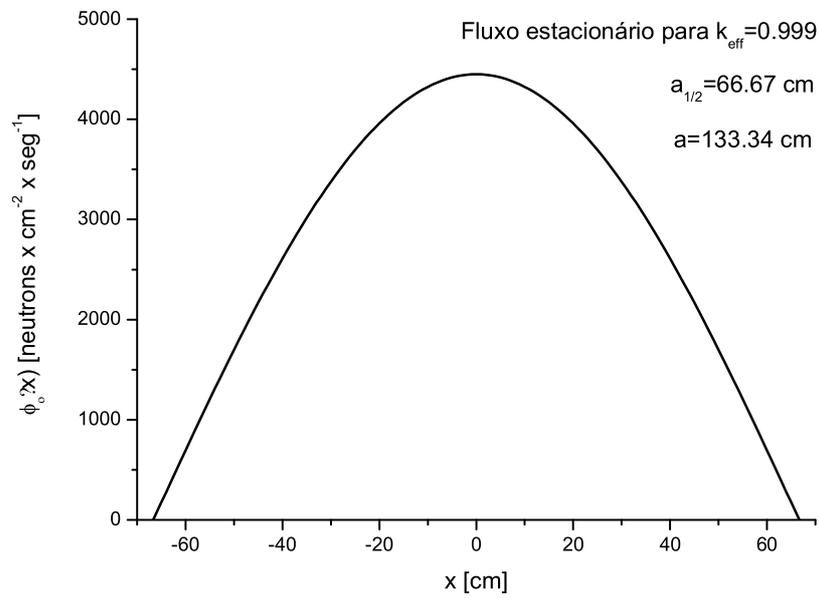


Fig 7. Fluxo estacionário para  $k_{eff} = 0.999$ .

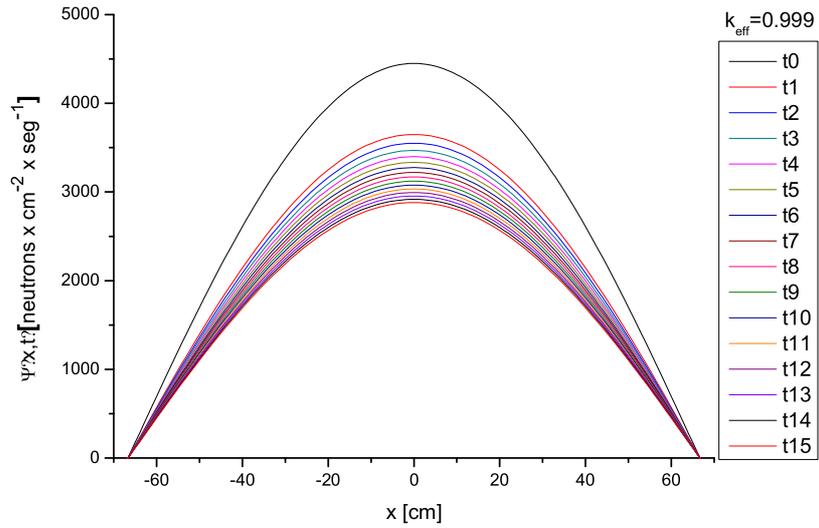


Fig 8.  $\Psi(x, t)$  para  $k_{eff} = 0.999$ .

Conforme mostrado na equação (1.3), esperamos que  $\phi_o(x)$  e  $\Psi(x, 0)$  sejam iguais. De modo a verificarmos este fato, a Tabela 4 é exibida, onde vemos as populações de nêutrons correspondentes a  $\phi_o(x)$  e a  $\Psi(x, 0)$ , e o erro relativo entre elas. Como podemos perceber, o erro relativo é desprezível, o que confirma a veracidade da equação (1.3).

**Tabela 4.** Erro relativo entre as populações de nêutrons para  $\phi_o$  e  $\Psi(x, 0)$ .

	$k_{eff}$	0.900	0.950	0.997	0.999
$\phi_o(x)$	população [ <i>nêutrons/s</i> ]	11.00	23.94	474.75	1893.62
$\Psi(x, 0)$	população [ <i>nêutrons/s</i> ]	11.00	23.95	474.87	1893.77
	ERRO RELATIVO	0	$4.2E - 4$	$2.5E - 4$	$7.9E - 5$

As figuras 9, 10, 11 e 12 mostram as razões assintótica e de dominância, respectivamente definidas pelas equações (1.46) e (1.47).

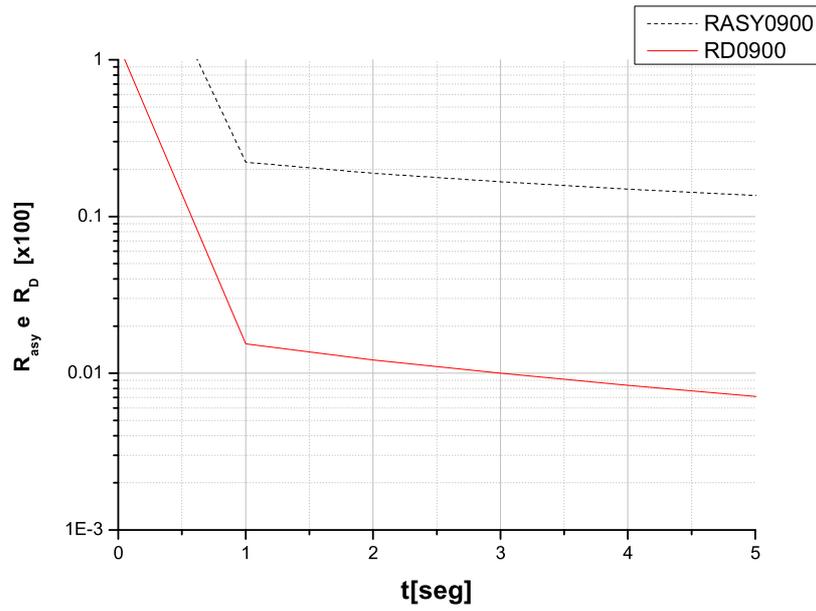


Fig 9. Razões assintótica e de dominância da fonte para  $k_{eff} = 0.900$ .

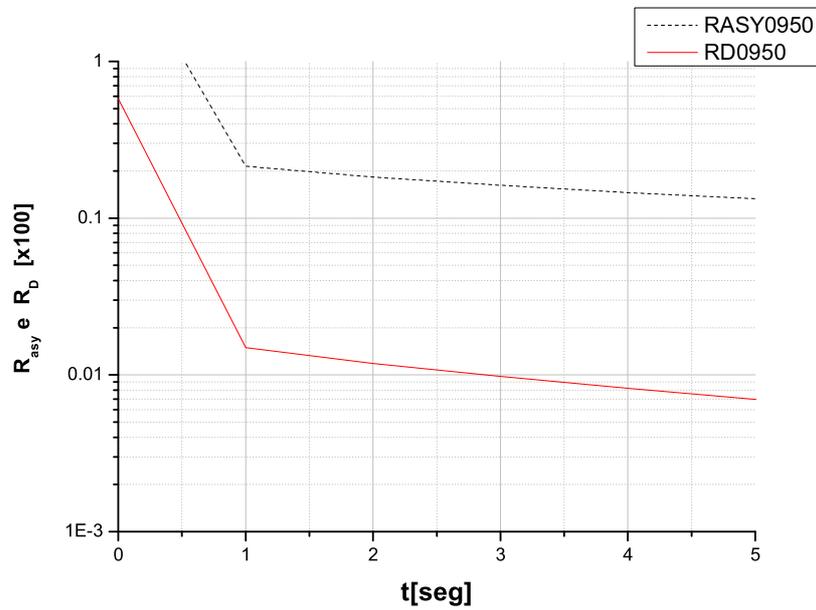


Fig 10. Razões assintótica e de dominância da fonte para  $k_{eff} = 0.950$ .

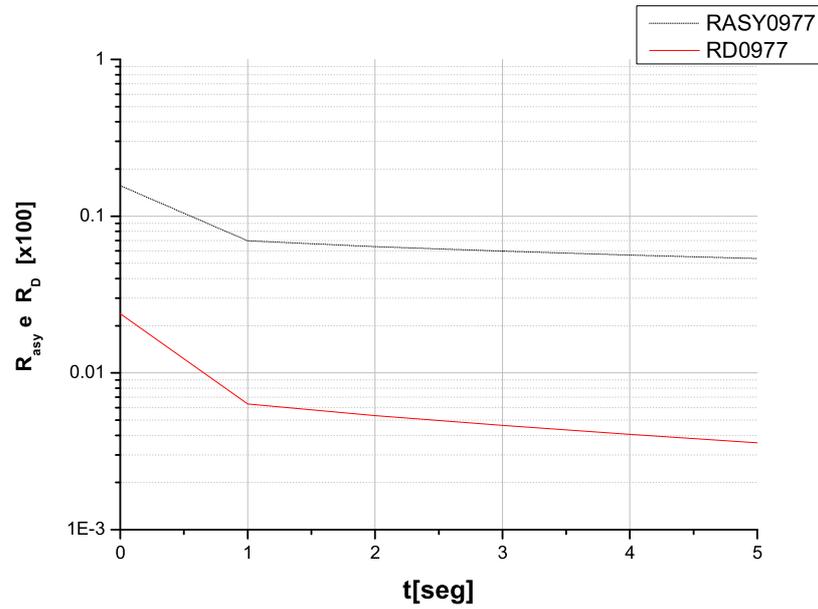


Fig 11. Razões assintótica e de dominância da fonte para  $k_{eff} = 0.977$ .

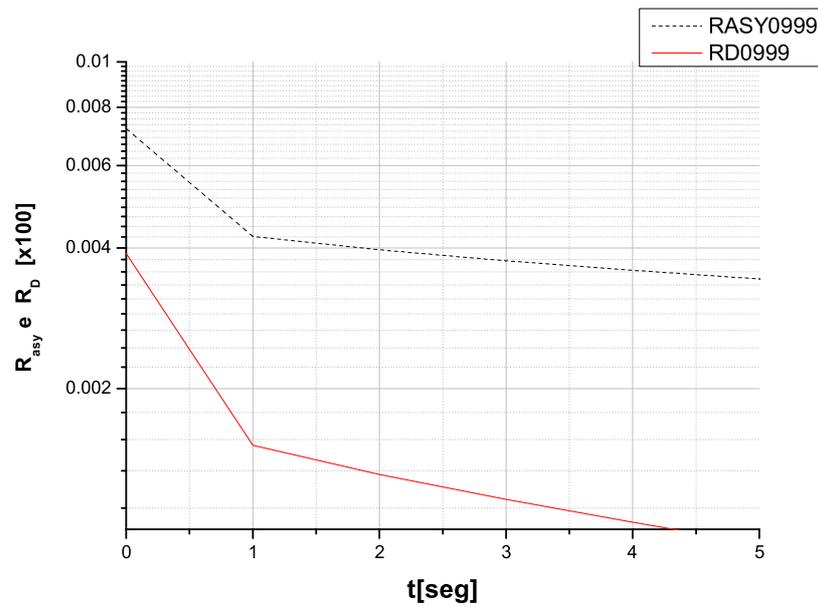


Fig 12. Razões assintótica e de dominância da fonte para  $k_{eff} = 0.999$ .

Vemos pelas figuras 9, 10, 11 e 12 que a resposta à uma perturbação em um reator é espacialmente mais significativa em sistemas menores, isto é,  $\mathcal{R}_{as}$  é maior e leva um tempo mais longo para ir a zero, e então a contribuição dos harmônicos de alta ordem é mais persistente. A evolução de  $\mathcal{R}_{as}$  e  $\mathcal{R}_{\mathcal{DF}}$  para sistemas subcríticos mostra que a importância dos harmônicos de ordem elevada incrementa com o aumento da subcriticalidade, conforme o sistema torna-se mais dominado (ou dependente) pela fonte.

A figura 13 mostra uma comparação entre  $k_{eff}$ ,  $k_f$ ,  $k_q$  e  $k_{sub}$ , dadas respectivamente pelas equações (1.33), com  $n = 1$ , (4.20), (4.21) e (4.19). Para estes cálculos estacionários, uma fonte  $Q = 1.027$  nêutrons/seg foi utilizada, de modo a obtermos um  $S = 23.95$  nêutrons na equação (4.18) quando  $k_{eff} = 0.950$ . As três taxas de multiplicação  $k_f$ ,  $k_q$  e  $k_{sub}$  aumentam conforme nos aproximamos da criticalidade, de acordo com o incremento na largura do placa plana.

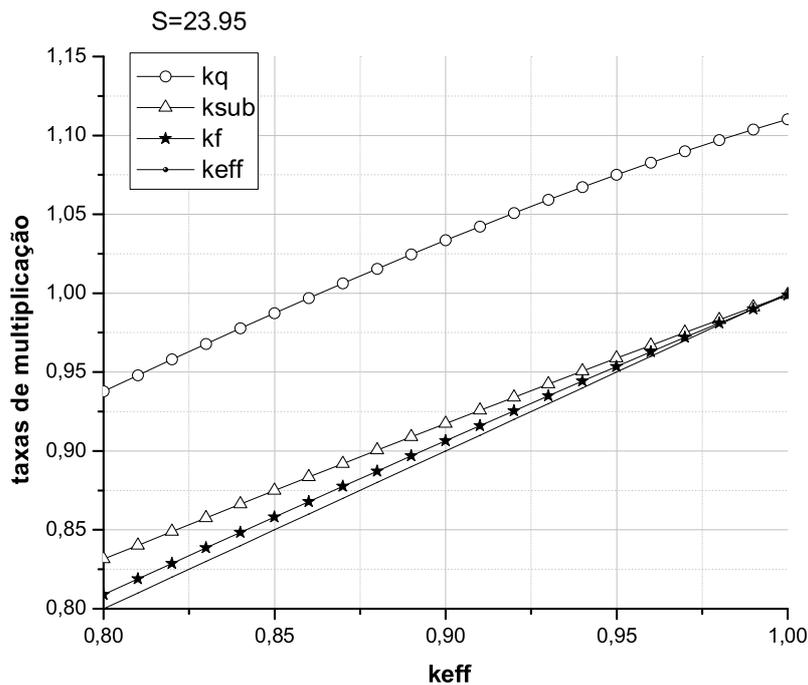


Fig 13. Comparação entre  $k_{eff}$  e diferentes taxas de multiplicação.

As figuras de 14 a 17 mostram a evolução temporal das taxas de multiplicação de nêutrons prontos,  $k_p$ , e de nêutrons retardados,  $k_{d,i}$ , para os quatro diferentes

níveis de subcriticalidade mencionados anteriormente.

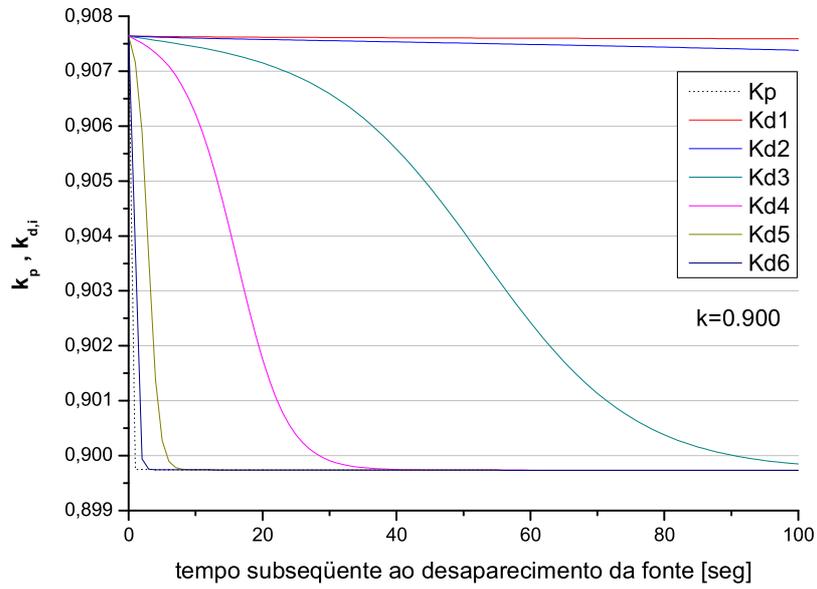


Fig 14. Mudança temporal das taxas de multiplicação  $k_p$  e  $k_{d,i}$  para  $k_{eff} = 0.900$ .

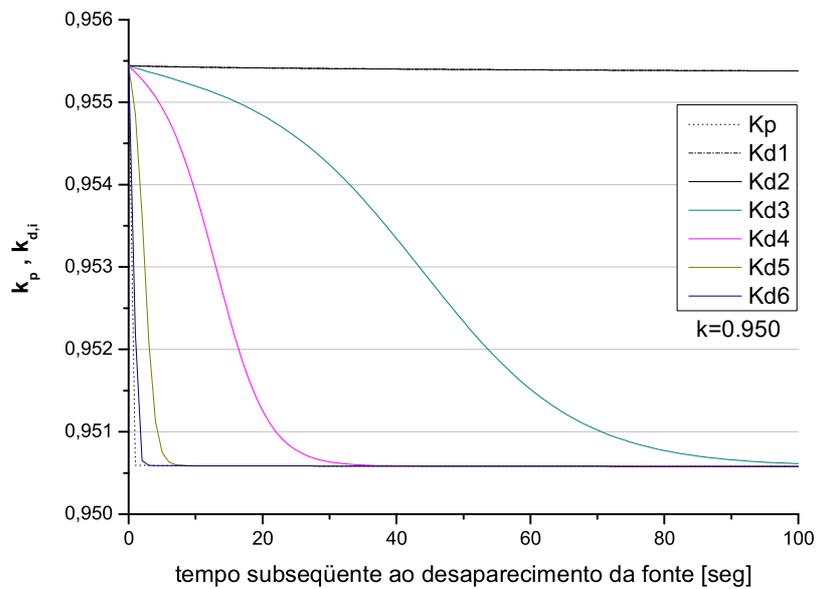


Fig 15. Mudança temporal das taxas de multiplicação  $k_p$  e  $k_{d,i}$  para  $k_{eff} = 0.950$ .

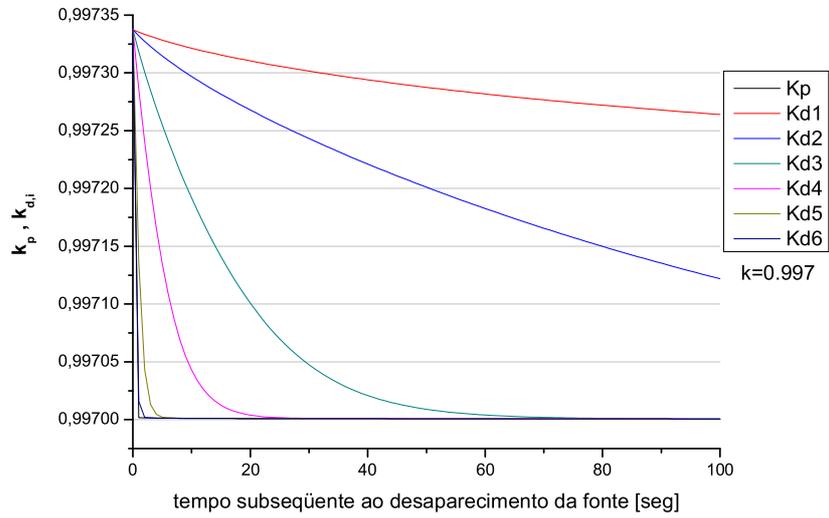


Fig 16. Mudança temporal das taxas de multiplicação  $k_p$  e  $k_{d,i}$  para  $k_{eff} = 0.997$ .

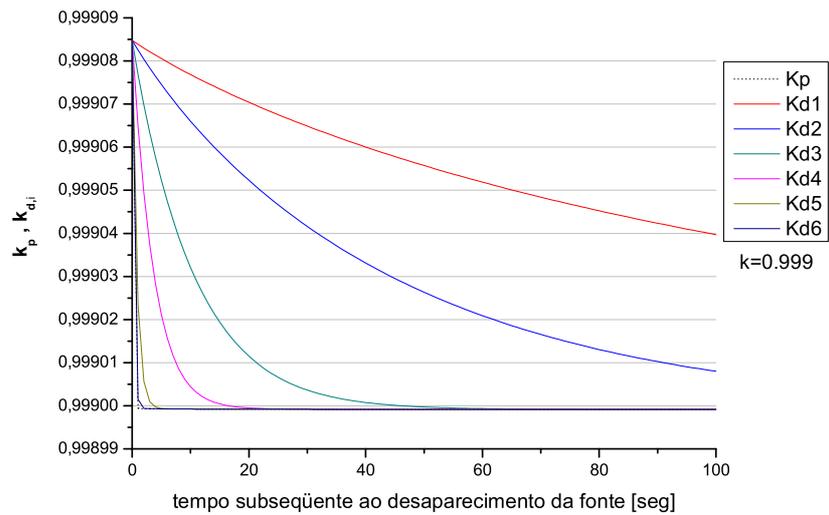


Fig 17. Mudança temporal das taxas de multiplicação  $k_p$  e  $k_{d,i}$  para  $k_{eff} = 0.999$ .

Agora, para uma mesma placa plana com as propriedades mostradas na Tabela 1, o estado dinâmico é calculado por 4 métodos: o método direto, tema do capítulo 1, as equações pontuais convencionais, do capítulo 2, as equações pontuais do capítulo 3 e as equações pontuais do capítulo 4.

O estado dinâmico aqui analisado ocorre pelo desaparecimento abrupto da fonte, conhecido como source jerk method. A evolução no tempo para a população de nêutrons é obtida pelos diferentes métodos mencionados e mostradas nas figuras 18, 19, 20 e 21. É feita uma integração abaixo das diferentes curvas obtidas, comparando-se os resultados.

Como vimos, o método direto consiste em expandir o fluxo dependente do tempo em modos, que em nosso caso vão de  $n=1$  (modo 1, ou primeiro modo) até  $n=21$  (modo 21, ou vigésimo primeiro modo). Devido a simetria do sistema, os modos considerados serão somente os ímpares, no caso, funções coseno.

A equação dinâmica dependente do tempo (mas não dependente do espaço) de cada modo é resolvida com cada autovalor. A condição inicial de cada equação é obtida expandindo-se em modos uma delta de Dirac  $\delta(x)$  no centro do placa plana, onde encontra-se a fonte (neste caso particular, em que  $x^0 = 0$ ).

O método direto será tomado como a referência para as comparações. Isto se justifica pelo fato do método direto ser baseado em uma solução analítica, e não em métodos de aproximação numérica, tais como o método de diferenças finitas, ALVIM [13], que será usado para solucionar os três pares acoplados de equações da cinética pontual discutidas no texto.

No método da equação convencional, apenas variamos o valor de  $k_{eff}$ , de modo a obter o nível de subcriticalidade desejado.

No método do sistema de equações da cinética pontual obtidas pela HGPT, fornecemos o valor da fonte, da população assintótica desejada e, uma vez encontrada a reatividade generalizada mediante uma análise do comportamento assintótico descrito na seção 3.2.2, equação (3.23), podemos analisar o comportamento dinâmico da população de nêutrons.

No método da equação pontual associada aos nêutrons de fissão,  $k_p$  e  $k_{d,i}$  mudam após o desaparecimento da fonte. Por hora,  $k_p$  muda instantaneamente e permanece constante após o desaparecimento da fonte. As mudanças de  $k_{d,i}$  após

o desaparecimento foram ignoradas e os valores de  $k_{d,i}$  antes do desaparecimento da fonte foram utilizados (exceto para  $k_{eff} = 0.999$ , em que  $k_{d,6} = k_p$  após o desaparecimento da fonte).

As figuras 18, 19, 20 e 21 mostram a variação temporal do número de nêutrons de fissão no núcleo.

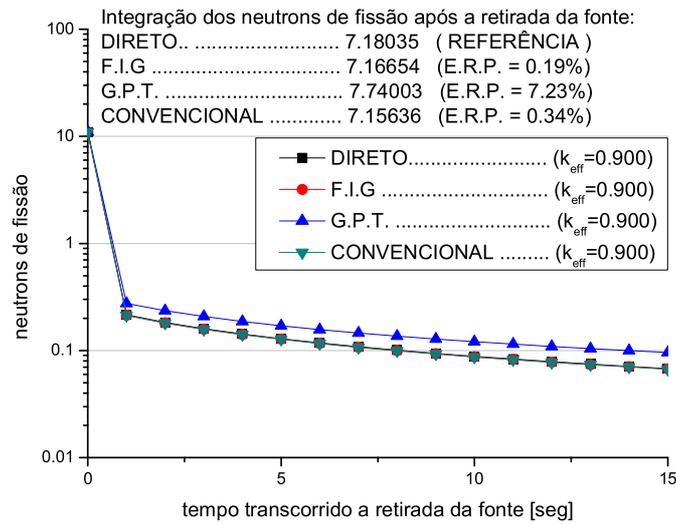


Fig 18. Atenuação da população de nêutrons após a retirada da fonte para  $k_{eff} = 0.900$ .

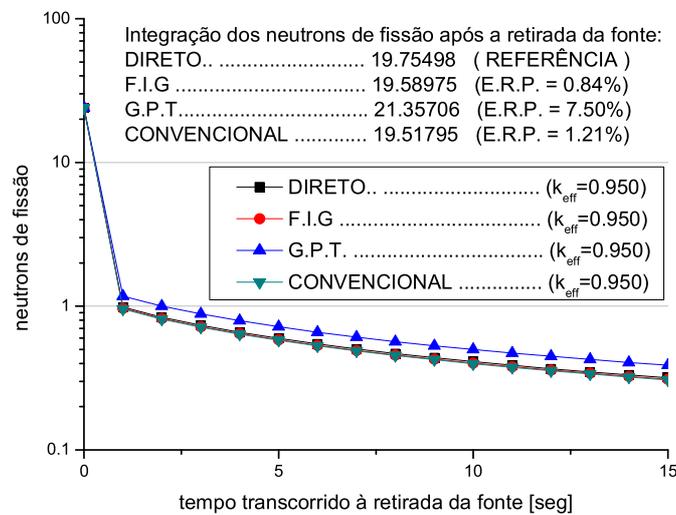


Fig 19. Atenuação da população de nêutrons após a retirada da fonte  
para  $k_{eff} = 0.950$ .

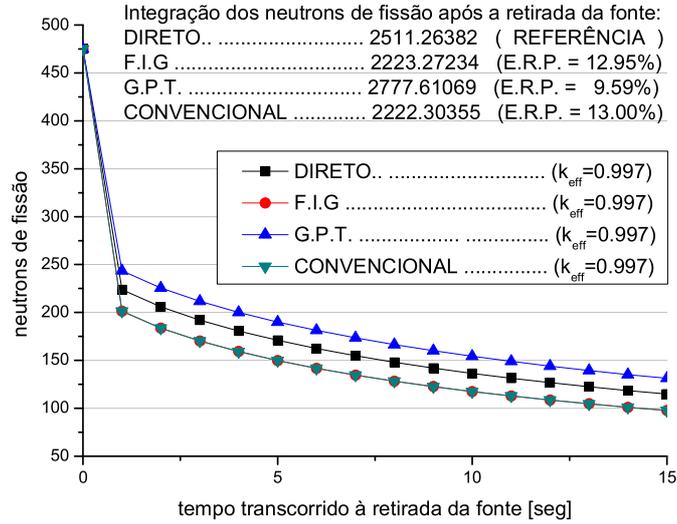


Fig 20. Atenuação da população de nêutrons após a retirada da fonte  
para  $k_{eff} = 0.997$ .

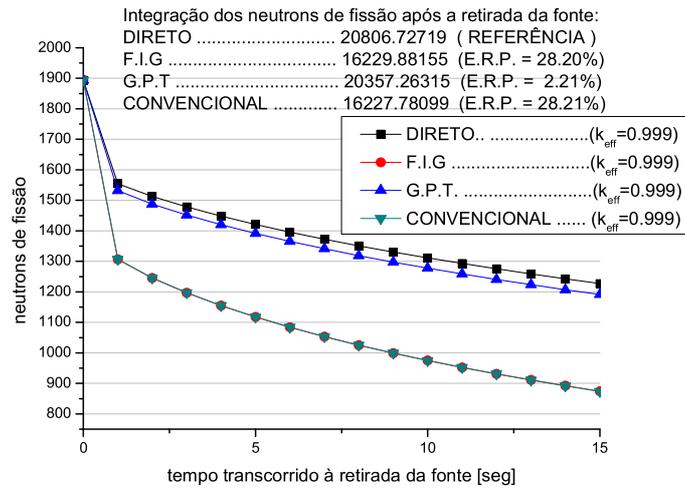


Fig 21. Atenuação da população de nêutrons após a retirada da fonte  
para  $k_{eff} = 0.999$ .

No sistema de equações convencionais da cinética pontual,  $k_{eff}$  não muda após o desaparecimento da fonte e a razão  $S^e/S$  muda devido a mudança no formato do fluxo. A equação convencional não pode descrever precisamente o número de nêutrons de fissão em um núcleo subcrítico porque a razão  $S^e/S$  depende do formato do fluxo e  $S^e$  não é proporcional a  $S$ . Por outro lado, na equação associada à produção de nêutrons de fissão, as taxas de multiplicação mudam de acordo a mudança do formato do fluxo de nêutrons, e as taxas e variáveis ( $S$  e  $Q$ ) mantêm o status de quantidades reais, e não médias. Esta é precisamente a vantagem das novas equações da cinética pontual baseadas em uma função importância associada aos nêutrons de fissão sobre as equações da cinética pontual convencionais.

Podemos observar pelos resultados numéricos mostrados nos gráficos anteriores que, conforme nos aproximamos da criticalidade, o erro relativo percentual, abreviado por ERP, das equações da cinética pontual desenvolvidas pela HGPT diminui. Isto se deve ao fato deste novo sistema de equações ser desenvolvido considerando-se apenas pequenas perturbações em relação ao estado crítico. Sua vantagem sobre as equações convencionais consiste no aparecimento de um termo de correção, o termo de subcriticalidade, que compensa a existência de parâmetros integrais que não acompanham a mudança no formato do fluxo devido a retirada da fonte.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste estudo novas equações da cinética pontual foram avaliadas. Vimos que a mais cuidadosa escolha de uma função importância (ou função peso) para sistemas subcríticos é um problema ainda aberto à discussões. Uma resposta única não pode ser fornecida. A "melhor" escolha pode depender fortemente do problema físico considerado.

Na equação convencional, o fator de multiplicação  $k_{eff}$  é incontestavelmente o termo mais importante.

Na equação desenvolvida pela HGPT, o termo de subcriticalidade inserido pela teoria é crucial na acurácia dos resultados para sistemas não muito distantes da criticalidade. E isso se deve à escolha da equação diferencial que rege  $n_{F,o}^+$ , equação (3.10), que leva em conta nêutrons instantâneos e retardados que, em níveis próximos da criticalidade são incomparavelmente mais relevantes que os nêutrons provenientes de fonte externa.

Por sua vez, as variáveis que aparecem na equação pontual obtida pela função importância  $G(x)$ , equação (4.1), são quantidades físicas reais, isto é, o número de nêutrons de fissão e precursores de nêutrons retardados não são pesados por uma função importância. Os coeficientes na equação são as taxas de multiplicação de nêutrons prontos, de nêutrons retardados e de nêutrons de fonte.

As variáveis  $k_f$  e  $k_q$ , equação (4.5) representam as taxas de multiplicação de nêutrons advindos de fissões e de nêutrons advindos da fonte, respectivamente, e elas são úteis para a compreensão de um ADS no estado estacionário. Em contrapartida,  $k_p$  e  $k_{d,i}$  podem expressar multiplicações de nêutrons prontos e retardados, que são necessários nas considerações acerca de um estado dinâmico.

O parâmetro mais importante de um ADS é  $k_{sub}$ , que representa a taxa média de multiplicação de nêutrons de fissão e de nêutrons de fonte e é um índice relevante à multiplicação efetiva de energia. Logo, a utilidade da equação reside no fato de que o balanço entre os nêutrons de várias origens em um ADS pode ser investigado intuitivamente. Ela descreve melhor sistemas em baixos níveis de subcriticalidade devido a equação diferencial que rege a função importância  $G(x)$ . Ela está diretamente relacionada aos nêutrons de fonte, que são de maior relevância em níveis não tão próximos da criticalidade.

Comparada com a equação convencional e com a equação obtida pela HGPT, a equação associada aos nêutrons de fissão tem um significado físico estrito. Na equação convencional, as variáveis são pesadas pelo fluxo adjunto, significando que os valores são ajustados ao estado crítico. Na equação da HGPT, as considerações são feitas para níveis bem próximos da criticalidade, e as quantidades são pesadas pela função  $n_{F,o}^+$ . Por outro lado, as variáveis da equação associada a  $G(x)$  correspondem a quantidades efetivas mesmo em um profundo estado de subcriticalidade, e o significado físico de cada termo é claro.

As figuras 9, 10, 11 e 12 nos permitem afirmar que quanto mais subcrítico for um dado sistema, maior será sua dependência em relação à uma fonte externa, bem como a dependência do fluxo em relação a harmônicos de ordens maiores que 1.

Por sua vez, as figuras 18, 19, 20 e 21 mostram que as equações da cinética pontual convencionais são válidas para descrever o comportamento no tempo da população de nêutrons em um reator subcrítico, embora não tenha uma acurácia muito boa. Isso se deve ao fato de a equação para o fluxo adjunto (equação (2.5)) não possuir informação sobre uma fonte externa, tal como a equação (3.10). No entanto, as equações da cinética pontual obtidas mediante a equação (3.10) são apenas acuradas para sistemas não muito distantes da criticalidade, pois o tratamento dado pela HGPT considera apenas pequenas perturbações no sistema.

# Bibliografia

- [1] BOLDEMAN, J. W. 1997, *Accelerator Driven Nuclear Energy Systems*, AATSE Symposium Energy For Ever.
- [2] DULLA, S., RAVETTO, P., ROSTAGNO, M.M., *Methods in accelerator-driven system dynamics*, Torino, Politecnico di Torino, 2003.
- [3] DUDERSTADT, James J. & HAMILTON, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*. New York , John Wiley & Sons , 1987.
- [4] AKCASU, Ziya , LELLOUCHE, Gerald S. & SHOTKIN, Louis M. *Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics*. New York and London , Academic Press , 1971.
- [5] HERTRICK, David L. *Dynamics of Nuclear Reactors* . 1<sup>a</sup> edição. Chicago e Londres, The University of Chicago Press Ltda. 1971.
- [6] LAMARSH, John R., BARATTA, Anthony J., *Introduction to Nuclear Engineering*. 3<sup>a</sup> edição. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 2001.
- [7] GANDINI, A., SALVATORES, M., "The physics of subcritical multiplying systems", *Nuclear Science and Technology*, vol. 39, pp. 673-686, 2002.
- [8] GANDINI, A., "Evolutionary mobile fuel reactors", *Int. Seminar on Advanced Systems towards Zero-Release of Radioactive Wastes*, Susono, Japan, Nov.2000.
- [9] GANDINI, A., "Generalized Perturbation Theory Methods. A Heuristic Approach", *Advances in Nuclear Science and Technology*, vol. 19, J. Lewins and M. Becker Eds., Plenum Press, New York, 1987.

- [10] GANDINI, A., "HGPT Basead Sensitivity Methods for the Analysis of Subcritical Systems", *Annals of Nuclear Energy*, vol. 28, pp. 1193-1216, 2001.
- [11] NISHIHARA, K., IWASAKI, T., UDAGAU, Y., "A new static and dynamic one-point equation and analytic and numerical calculations for subcritical system", *Jornal of Nuclear Science and Technology*, vol. 481, pp. 481-492, 2003.
- [12] KOBAYASHI, K., NISHIHARA, K., "Definition of subcriticality using the importance function for the production of fission neutrons", *Nuclear Science and Engineering*, vol. 136, pp. 272-281, 2000.
- [13] ALVIM, Antônio Carlos Marques, *Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Nuclear*. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 2003.