

MONITORAÇÃO DA SUBCRITICALIDADE EM REATORES NUCLEARES
COM FONTES EXTERNAS DE NÊUTRONS

Adilson Costa da Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Antonio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL
FEVEREIRO DE 2007

DA SILVA, ADILSON COSTA

Monitoração da Subcriticalidade
em Reatores Nucleares com Fontes
Externas de Nêutrons [Rio de Janeiro]
2007

X, 71 p. 29,7 cm(COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Nuclear, 2007)

Dissertação - Universidade Federal
do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método Inverso da Cinética Pontual
2. Fonte Externa de Nêutrons

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedico este trabalho à
minha esposa Michele pela
paciência e dedicação para
a concretização dessa obra
e aos meus Pais pelo apoio e incentivo.

A DEUS pelo entendimento e
clareza no desenvolvimento
desse trabalho.

E aos meus orientadores
Aquilino Senra Martinez e
Fernando Carvalho da Silva,
não só pela orientação, mas
também pela amizade que fizemos
ao longo desse trabalho e ao
CNPq por financiar este estudo.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MONITORAÇÃO DA SUBCRITICALIDADE EM REATORES NUCLEARES
COM FONTES EXTERNAS DE NÊUTRONS

Adilson Costa da Silva

Fevereiro/2007

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

O principal objetivo desta dissertação é o desenvolvimento de uma metodologia que permita monitorar a subcriticalidade. Utilizamos a equação inversa da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons, para calcular a reatividade. Os dados de entrada das equações da cinética pontual foram ajustados para que utilizássemos as taxas de contagens de nêutrons que são obtidas a partir das leituras nos detectores externos ao núcleo de um reator tipo PWR. Assumimos que a intensidade da fonte externa de nêutrons é constante e definimos a fonte externa pela condição inicial das equações da cinética pontual. Utilizamos uma contagem de nêutrons modificada para monitorar a subcriticalidade de um reator nuclear. Essas taxas de contagens de nêutrons foram ajustadas por três fatores de correção, que são: fator de correção de extração, fator de correção espacial e o fator de correção de importância. Os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual de reatores, com fonte externa de nêutrons, foram comparados com os resultados obtidos por um método de referência, e eles apresentaram uma boa precisão.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SUBCRITICALITY CALCULATION IN NUCLEAR REACTORS WITH
EXTERNAL NEUTRON SOURCES

Adilson Costa da Silva

February/2007

Advisors: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Department: Nuclear Engineering

The main objective of this dissertation consists on the development of a methodology for subcriticality calculation. We used the inverse point reactor kinetic equation with external neutron source for the calculation of the reactivity. The input data for the point kinetic equations was adjusted, in order to use the neutron counting rates that are obtained from the readings in ex-core neutron detectors of the reactor type PWR. We assume that the external neutron source strength is constant and we define it in terms of a known initial condition of the point kinetic equations. We used a modified of neutrons counting to calculation the subcriticality in a nuclear reactor. The neutron counting rates are adjusted by three correction factors, which are the extraction correction factor, spatial correction factor and importance correction factor. The results obtained from inverse point reactor kinetic equation with external neutron source were compared with the results obtained from a benchmark calculation, and they presented a good accuracy.

Índice

1	Introdução	1
2	Formulação da Cinética de Reatores	4
2.1	Equação de Transporte de Nêutrons	5
2.1.1	Distribuição da Densidade de Nêutrons no Reator	6
2.2	Aproximação da Difusão	11
2.3	Equação da Cinética Pontual de Reatores	17
2.3.1	Aproximação Quase-Estática	21
3	Cinética Pontual com Fonte Externa	24
3.1	Método Inverso da Cinética Pontual com Fonte Externa	24
3.2	Ajuste de Dados de Entrada na Equação Inversa da Cinética Pontual com Fonte Externa	27
3.3	Método Numérico para Calcular a Reatividade	29
3.3.1	Método de Diferenças Finitas	31
3.3.2	Método dos Trapézios	33
3.3.3	Método de Runge-Kutta	35
4	Método das Respostas nos Detectores e Fatores de Correção	37
4.1	Cálculo das Respostas nos Detectores de Nêutrons	38
4.2	Fatores de Correção de Extração, Espacial e Importância	42

5	Análise de Resultados	50
5.1	Validação do Método Direto de Diferenças Finitas	50
5.2	Importância do Termo de Fonte Externa de Nêutrons	52
5.3	Validação do Método Inverso da Cinética Pontual	54
5.4	Aquisição de Taxas de Contagens	55
5.5	Apresentação dos Resultados	58
5.5.1	Resposta da Reatividade devido a Fonte Externa	58
5.5.2	Obtenção dos Fatores de Correção	60
6	Conclusões	62
	Apêndice A	65
	Referências Bibliográficas	69

Lista de Figuras

2.1	Seção de choque microscópica de fissão do U^{235}	8
2.2	Densidade de nêutrons $N(\mathbf{r},t)$	9
2.3	Representação dos grupos de energia.	14
3.1	Aproximação da derivada em um ponto.	32
3.2	Área do trapézio.	34
4.1	Localização dos detectores em relação ao centro do núcleo de um reator PWR.	37
4.2	Simetria de 1/4 do núcleo de um reator PWR.	41
4.3	Função peso calculada em cada elemento combustível usando a equação adjunta de transporte de nêutrons.	41
5.1	Densidade de nêutrons $n(t)$ sem fonte externa.	52
5.2	Densidade de nêutrons $n(t)$ com fonte externa.	53
5.3	Curva $1/M$ em função da retirada dos bancos de barras de controle.	56
5.4	$M^{fonte}(t)$ ajustada pela função polinomial.	57
5.5	Reatividade subcrítica.	58
5.6	Fatores de correção em função das retiradas dos bancos de barras de controle.	61
A1:	Configurações dos bancos de barras de controle e de segurança do núcleo de um reator PWR.	65
A2:	Plano bidimensional para 1/4 do núcleo de Angra I.	65

Lista de Tabelas

5.1	Densidade de nêutrons $n(t)$ para step de reatividade $\rho = 0.003$	51
5.2	Densidade de nêutrons $n(t)$ para step de reatividade $\rho = 0.007$	51
5.3	Densidade de nêutrons $n(t)$ para rampa de reatividade $\rho(t) = 0.1\beta t$. . .	51
5.4	Cálculo da reatividade $\rho = 0.003$ com $\Delta t = 0.01s$	55
5.5	Cálculo da reatividade $\rho = 0.007$ com $\Delta t = 0.01s$	55
5.6	Resultados do problema de fonte fixa.	56
5.7	Taxas de contagens subcrítica $M(t)$	57
5.8	Comparação de resultados do problema de fonte fixa com $\Delta t = 0.01s$. .	59
5.9	Fatores de ajuste de taxas de contagens de nêutrons.	60
A1:	Parâmetros nucleares multigrupos.	68

Capítulo 1

Introdução

Na operação de uma usina nuclear, especialmente após a recarga do núcleo, é necessário o acompanhamento da multiplicação de nêutrons no núcleo do reator. O acompanhamento e a previsão da condição de criticalidade podem ser feitos em função da retirada dos bancos de barras de controle do núcleo do reator para uma dada inserção de reatividade no núcleo. A monitoração da multiplicação de nêutrons no sistema pode ser realizada através da multiplicação subcrítica $1/M$ ^[1], em função das posições dos bancos de barras de controle durante a partida do reator.

Com relação a segurança do núcleo do reator, a monitoração da subcriticalidade deve ser realizada de forma bem precisa para nos prevenirmos de certos acidentes inesperados, principalmente, de inserção de reatividade positiva no núcleo do reator. Desta forma, utilizaremos a equação inversa da cinética pontual, com fonte externa^[3] de nêutrons, para acompanharmos a multiplicação de nêutrons no reator através do cálculo da reatividade. Os dados de entrada desta equação foram ajustados para que utilizássemos as taxas de contagens de nêutrons que são obtidas a partir das leituras nos detectores externos ao núcleo de um reator tipo PWR.

O principal objetivo desse trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que permita monitorar a reatividade usando o método inverso da equação da cinética pontual para seis grupos de precursores e com fonte externa de nêutrons. Para isso, implementamos o método de Diferenças Finitas para aproximar a derivada da densidade de nêutrons no reator e os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta para aproximar numericamente a integral do histórico de potência. O método de Runge-Kutta é usado para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias definidas por

um problema de valor inicial. Para implementar o método de Runge-Kutta, tornou-se necessário transformar a equação integral do histórico de potência em uma equação diferencial. Para isso, usamos a regra da integral de Leibniz^[19] que é uma fórmula para diferenciação de uma integral definida cujos limites de integração são funções diferenciáveis.

A aplicação direta do método inverso da cinética pontual com fonte externa na monitoração da subcriticalidade pode apresentar algumas dificuldades. Esta equação assume que a distribuição do fluxo de nêutrons está no modo fundamental da equação da difusão de nêutrons definida por um problema de autovalor e a forma da distribuição do fluxo de nêutrons mantém-se inalterada. No entanto, em uma situação real, a distribuição do fluxo de nêutrons muda com a subcriticalidade.

Para contornar estas dificuldades usamos uma contagem modificada de nêutrons^[10] para avaliar a subcriticalidade de um reator. Neste método definimos três fatores de correção: *fator de correção de extração*, *fator de correção espacial* e o *fator de correção de importância*. Estes fatores de correção serão utilizados para ajustar as taxas de contagens de nêutrons obtidas pelas leituras nos detectores externos de nêutrons.

No capítulo 2 discutiremos detalhadamente os processos de produção e perda de nêutrons no reator. Para obtermos o modelo da cinética pontual de reatores, faremos algumas simplificações na equação de transporte de nêutrons, como por exemplo, a aproximação da difusão e a formulação multigrupo de energia. Usaremos a aproximação quase-estática^[16] para separarmos a dependência espaço-temporal do fluxo escalar de nêutrons.

No capítulo 3, apresentaremos as equações da cinética pontual de reatores^[3] para seis grupos de precursores e com fonte externa de nêutrons. Definiremos a intensidade efetiva da fonte de externa de nêutrons pela condição inicial das equações da cinética pontual e assumiremos que esta fonte é constante durante toda multiplicação subcrítica. Ajustaremos os dados de entrada das equações da cinética para utilizarmos as taxas de contagens de nêutrons que são obtidas a partir das leituras nos detectores externos ao núcleo de um reator e apresentaremos algumas correções necessárias para minimizar os efeitos da subcriticalidade. Neste capítulo, são apresentados também os métodos numéricos implementados no desenvolvimento desta dissertação para o

cálculo da reatividade.

As respostas nos detectores de nêutrons, externos^[6,7,8] ao núcleo do reator, serão apresentadas no capítulo 4. Estas respostas poderão ser obtidas a partir da solução da equação de transporte de nêutrons. Neste capítulo, será descrito o cálculo para obtenção dos fatores peso^[7,9] em cada elemento combustível. Apresentaremos também o cálculo dos fatores de correção^[10] cujos resultados são mostrados no capítulo 5. Neste capítulo, verificaremos a importância do termo da fonte externa de nêutrons no monitoramento da subcriticalidade e validaremos o método numérico implementado neste trabalho. Os resultados obtidos pelo método inverso da equação da cinética pontual, com fonte externa, poderá ser comparado com alguns resultados disponíveis na literatura.

No capítulo 6, apresentaremos as conclusões e sugestões referentes a este trabalho.

Capítulo 2

Formulação da Cinética de Reatores

As equações da cinética pontual de reatores constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, onde o único parâmetro cinético dependente do tempo é a reatividade $\rho(t)$. Através desse conjunto de equações podemos investigar o comportamento da população neutrônica no reator a partir de uma pequena perturbação causada ao núcleo do reator, devido a uma inserção de reatividade adicional. Esta inserção de reatividade pode estar relacionada com a movimentação dos bancos de barras de controle durante a operação do reator nuclear ou com a variação da concentração de boro no refrigerante do circuito primário, entre outros.

Devido as equações da cinética pontual dependerem unicamente do tempo, elas descrevem o efeito global sentido pelo núcleo do reator devido, por exemplo, à queda de uma barra de controle no núcleo do reator, ao contrário da equação da difusão, que devido a sua dependência espacial, percebe o efeito local devido à queda dessa barra de controle.

Uma das hipóteses para obtenção do modelo da cinética pontual de reatores está relacionado com a fraca dependência temporal do fluxo de nêutrons $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Em algumas análises experimentais observou-se que a razão entre os fluxos de nêutrons para diferentes intervalos de tempos $\phi(\mathbf{r}, E, t_1)/\phi(\mathbf{r}, E, t_2)$ é aproximadamente a mesma para todo o espaço de fase (\mathbf{r}, E) , ou seja, a forma espacial do fluxo de nêutrons permanecia constante. Desta forma, é possível reescrever o fluxo de nêutrons $\phi(\mathbf{r}, E, t) \propto \psi(\mathbf{r}, E)T(t)$. Se pudermos estimar uma função forma para $\psi(\mathbf{r}, E)$, o problema se reduz a encontrar uma equação para a função amplitude $T(t)$.

2.1 Equação de Transporte de Nêutrons

Todo o desenvolvimento da teoria de reatores está relacionado com a produção de nêutrons no reator. Esta produção é obtida a partir de uma reação induzida por nêutrons conhecida como fissão nuclear, que por sua vez, inicia um processo de reação em cadeia originando dois novos núclídeos chamados de produtos de fissão, alguns nêutrons, além de radiação γ e a liberação de uma grande quantidade de energia em torno de 200MeV. O processo da reação em cadeia é sustentado pelas novas reações induzidas pelos nêutrons que nasceram da fissão nuclear e pelos decaimentos dos produtos de fissão, que contribuem com a produção de nêutrons no reator. Mais adiante veremos que a contribuição dos nêutrons que nascem dos decaimentos dos produtos de fissão, chamados de *nêutrons retardados*, são importantes no controle operacional do núcleo do reator.

Os projetos desenvolvidos para reatores nucleares tem por finalidade sustentar e estabilizar as reações de fissão nuclear. Este balanço de nêutrons no reator é obtido em função da quantidade de nêutrons que é produzida e perdida no reator.

Os reatores PWR utilizam como combustível nuclear o U^{235} enriquecido. Estes reatores são conhecidos como *reatores térmicos*, pois a energia dos nêutrons que causam a fissão nuclear é da ordem de 1eV. Sabemos que os nêutrons que nascem da fissão têm, em média, energia em torno de 2MeV; com isso, os projetos desenvolvidos para reatores térmicos precisam utilizar um refrigerante com alto potencial de moderação até que estes nêutrons atinjam a faixa de energia dos nêutrons térmicos, ou seja, a faixa de energia necessária para causar a fissão. Os reatores Angra I e Angra II utilizam água leve (H_2O) como refrigerante. Nesse processo de moderação de nêutrons pode ocorrer fuga espacial de nêutrons no reator. Para minimizar estas fugas, os reatores PWR utilizam um revestimento em torno do núcleo do reator conhecido como refletor, cuja função é fazer os nêutrons retornarem ao núcleo do reator evitando que uma grande quantidade de nêutrons escape do núcleo e colida com o vaso do reator. É importante destacar que o tempo de vida útil do vaso do reator está relacionado com o número de nêutrons que escapa do núcleo do reator; com isso, podemos observar a importância dos refletores no processo de desenvolvimento de um reator nuclear.

Nós podemos definir que a variação temporal da quantidade de nêutrons num volume arbitrário V , em uma posição \mathbf{r} do núcleo do reator, para nêutrons viajando em uma direção $\hat{\Omega}$, dentro de uma faixa $d\hat{\Omega}$, e com uma certa energia E , em dE , pode ser representada pela seguinte relação de balanço:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega} = \text{Ganhos em } V - \text{Perdas em } V, \quad (2.1)$$

onde $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ é a *densidade angular de nêutrons*.

Os mecanismos de ganhos e perdas de nêutrons dentro de um volume arbitrário, podem ser separados da seguinte maneira:

Mecanismos de ganho:

- i) fontes de nêutrons (fontes de fissões e fontes externas).
- ii) nêutrons que sofrem colisões de espalhamento passando a ter energia e direção de interesse.

Mecanismos de perdas:

- iii) nêutrons que escapam do volume através de uma superfície S (fuga espacial).
- iv) nêutrons que sofrem vários tipos de reações no volume (captura).

2.1.1 Distribuição da Densidade de Nêutrons no Reator

A equação que expressa a variação do balanço da produção de nêutrons no reator em um ponto no espaço de fases $(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ é representada pela Equação de Transporte de Nêutrons (*Equação Linearizada de Boltzmann*):

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + v(E) \hat{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + v(E) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) - \int_0^\infty \int_{4\pi} v(E') \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' dE' - S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \right] dE d\hat{\Omega} = 0,$$

onde $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ é a densidade angular de nêutrons. Usando o fato que o volume

V não varia com o tempo, temos que a única maneira da integral sobre o volume arbitrário ser nula é se o integrando for identicamente nulo, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + v(E)\hat{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} v(E')\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t)d\hat{\Omega}'dE' + S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (2.2)$$

Esta equação descreve a variação dos processos de produção e perda de nêutrons no reator, conseqüentemente, cada termo da equação possui uma interpretação física, da qual destacaremos:

\Rightarrow Variação temporal da densidade angular de nêutrons no reator. Sob a condição de estado estacionário (sistema crítico) esta variação é nula.

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t).$$

\Rightarrow Taxa de fuga líquida no reator. São os nêutrons que entram e saem de um pequeno elemento de volume arbitrário do reator que não interagem (fuga espacial).

$$v(E)\hat{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

onde $v(E)$ é a velocidade dos nêutrons com energia E , e $\hat{\Omega}$ é um vetor unitário na direção de movimento do nêutron.

\Rightarrow Taxa de perda devido a vários tipos de reações, que é também conhecida como taxa de interação,

$$v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

onde $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ representa a seção de choque macroscópica total.

\Rightarrow Termo de transferência de energia e direção por espalhamento,

$$\int_0^\infty \int_{4\pi} v(E')\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t)d\hat{\Omega}'dE',$$

onde $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ é a seção de choque macroscópica diferencial de

espalhamento, que representa a taxa na qual os nêutrons ao sofrerem espalhamento, passam de uma direção $\hat{\Omega}'$ e de uma energia E' para $\hat{\Omega}$ e E .

⇒ Fontes de nêutrons no reator,

$$S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = S_f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + S_{ext}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

da qual temos, $S_{ext}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ uma fonte externa e

$$S_f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') n(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' dE',$$

onde $S_f(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ é a fonte de fissão, $\nu(E')$ é o número médio de nêutrons emitidos na fissão, $\chi(E)$ é o espectro de nêutrons de fissão e $\Sigma_f(\mathbf{r}, E')$ representa a seção de choque macroscópica de fissão. A figura 2.1 ilustra a seção de choque microscópica de fissão^[1] do U^{235} em função da energia.

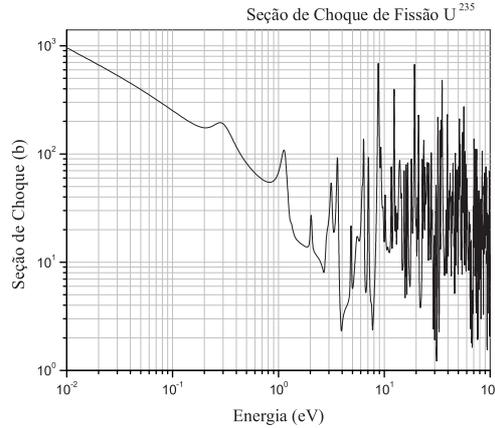


Figura 2.1: Seção de choque microscópica de fissão do U^{235} .

Analisando a equação de transporte de nêutrons, dada pela Eq.(2.2), observamos que ela apresenta as seguintes características:

i) A densidade angular de nêutrons $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ é uma função de 7 variáveis independentes, ou seja, $[\mathbf{r}=(x, y, z); E; \hat{\Omega}=(\theta, \phi); t]$.

ii) É uma equação integro-diferencial.

A densidade angular de nêutrons $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ é a função que melhor representa a população de nêutrons no reator. Pois, se quisermos calcular o número total de nêutrons no reator em um volume arbitrário V , no espaço de fases $(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ num instante qualquer t , basta integrarmos a densidade angular de nêutrons sobre todo volume, energia e direção da seguinte maneira:

$$\int_V N(\mathbf{r}, t) d^3r \equiv \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} dE d^3r, \quad (2.3)$$

onde $N(\mathbf{r}, t) d^3r$ é o número esperado de nêutrons no elemento de volume d^3r , que se encontra na posição \mathbf{r} , num instante t .

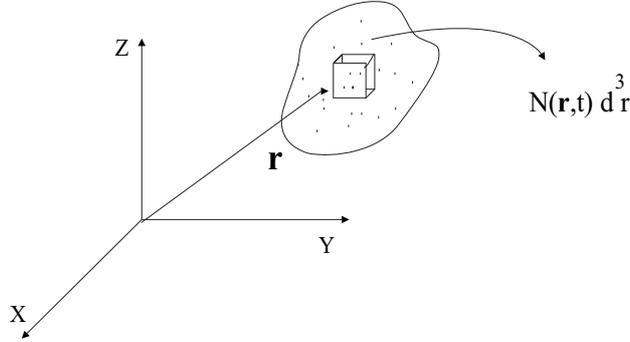


Figura 2.2: Densidade de nêutrons $N(\mathbf{r}, t)$.

A equação de transporte pode ser expressa em termos de outras quantidades, por exemplo, em termos do *fluxo angular de nêutrons* que é definido da seguinte forma:

$$\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \equiv v(E)n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (2.4)$$

Se quisermos escrever a equação de transporte de nêutrons em termos do fluxo angular basta utilizarmos a definição da Eq.(2.4) e substituirmos na Eq.(2.2), chegando a seguinte expressão:

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' dE' + S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (2.5)$$

Um outro conceito importante a ser destacado é a definição da *densidade angular de corrente*, representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \equiv v(E)\hat{\Omega}n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \hat{\Omega}\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t). \quad (2.6)$$

Podemos obter uma nova quantidade que não dependa mais de $\hat{\Omega}$, simplesmente integrando nas variáveis angulares da seguinte forma:

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)d\hat{\Omega}, \quad (2.7)$$

onde $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ é o *fluxo escalar de nêutrons*. Seguindo o mesmo raciocínio, nós podemos obter uma expressão para a densidade de corrente escalar:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \hat{\Omega}\varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)d\hat{\Omega}, \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ é a *densidade de corrente de nêutrons*.

O fluxo escalar de nêutrons é definido de forma análoga ao fluxo angular de nêutrons representado pela Eq.(2.4), ou seja,

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)d\hat{\Omega} = v(E) \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)d\hat{\Omega} = v(E)N(\mathbf{r}, E, t). \quad (2.9)$$

Desta forma, podemos reescrever a equação de transporte de nêutrons em termos do fluxo escalar. Para isso, basta integrarmos a Eq.(2.5) sobre todas as direções. Nesta ordem, analisaremos separadamente os resultados de cada integral, como segue:

- 1) $\int_{4\pi} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi d\hat{\Omega} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} \varphi d\hat{\Omega} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi,$
- 2) $\int_{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi d\hat{\Omega} = \nabla \cdot \int_{4\pi} \varphi \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t),$

$$3) \quad \int_{4\pi} \Sigma_t \varphi d\hat{\Omega} = \Sigma_t \int_{4\pi} \varphi d\hat{\Omega} = \Sigma_t \phi,$$

$$4) \quad \int_0^\infty \int_{4\pi} \left[\int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \right] \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' dE' = \\ \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) dE' \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE',$$

$$5) \quad \int_{4\pi} S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} = s(\mathbf{r}, E, t).$$

A partir desses resultados, se introduzirmos os termos de fissões definidos anteriormente, a Eq.(2.5) integrada em $\hat{\Omega}$, torna-se:

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, E, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + \\ \chi(E) \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + S_{ext}(\mathbf{r}, E, t). \quad (2.10)$$

A equação de transporte de nêutrons não tem solução analítica e o método numérico a ser empregado é bastante difícil, devido à dependência espacial, angular e a todos os valores possíveis de energia. Com isso, para obtermos uma medida do fluxo de nêutrons no reator precisamos fazer algumas aproximações na equação de transporte.

2.2 Aproximação da Difusão

Embora saibamos que não existe nenhuma relação direta entre o fluxo escalar e a densidade de corrente, precisamos estabelecer alguma relação que nos permita reescrever a Eq.(2.10) em termos de uma única incógnita, ou seja, em termos do fluxo escalar de nêutrons $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Para isso, recorreremos a alguma expressão que nos permita relacionar uma quantidade vetorial $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ com uma quantidade escalar $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Utilizaremos a aproximação da difusão, conhecida como *Lei de Fick*, que estabelece uma relação aproximada entre a densidade de corrente e o gradiente espacial do fluxo escalar de nêutrons. Matematicamente, esta relação pode ser expressa da seguinte forma^[1]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \cong -D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t), \quad (2.11)$$

onde a constante de proporcionalidade $D(\mathbf{r}, E)$ é conhecida como *coeficiente de difusão* representada pela seguinte relação:

$$D(\mathbf{r}, E) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E)}, \quad (2.12)$$

onde $\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, E)$ é a seção de choque macroscópica de transporte. Desta forma, substituindo a definição proposta para o vetor densidade de corrente na Eq.(2.10), chegamos a *Equação da Difusão de Nêutrons*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, E, t) - \nabla \cdot \left(D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t) \right) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E, t) = \\ \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + \chi(E) \int_0^\infty \nu(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E')\phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + \\ S_{ext}(\mathbf{r}, E, t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Uma forma simplificadora de escrever a equação da difusão é discretizar a variável energia. Para isso, utilizaremos a formulação multigrupo de energia. Esta formulação permite escrever a equação da difusão para cada grupo de energia. Geralmente, utilizam-se em cálculos globais de reatores nucleares 2 grupos de energia, um para representar os nêutrons térmicos e outro para os nêutrons rápidos.

No formalismo multigrupo, as seções de choque de espalhamento, fissão e total são expressas em termos de valores médios em energia do nêutron, para cada grupo.

A equação da difusão multigrupo pode ser obtida integrando cada termo da Eq.(2.13) sobre um grupo g de energia, compreendido no intervalo de energia $E_g < E < E_{g-1}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{1}{v(E)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, E, t)dE - \nabla \cdot \int_{E_g}^{E_{g-1}} D(\mathbf{r}, E)\nabla\phi(\mathbf{r}, E, t)dE + \\ \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E, t)dE = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)\phi(\mathbf{r}, E', t)dE'dE + \end{aligned}$$

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) \int_0^\infty \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} S_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE. \quad (2.14)$$

Note-se que os limites de integração das seções de choque de espalhamento e fissão que estão compreendidos nos intervalos de energia $0 < E < \infty$ mudarão para os seguintes intervalos de integração, $E_{g'} < E < E_{g'-1}$, somados do grupo 1 até o grupo G.

Primeiramente, definiremos o fluxo de nêutrons para o g-ésimo grupo de energia da seguinte forma:

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE. \quad (2.15)$$

Desta forma, nós definiremos a seção de choque macroscópica total para o grupo g , da seguinte forma:

$$\Sigma_{tg}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}. \quad (2.16)$$

O termo de fissão para o grupo g fica:

$$\nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', t) dE'}{\int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \phi(\mathbf{r}, E', t) dE'}, \quad (2.17)$$

de forma semelhante o termo de espalhamento que envolve transferência de energia de E' para E é dado por:

$$\Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' dE}{\int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \phi(\mathbf{r}, E', t) dE'}. \quad (2.18)$$

Note-se que a seção de choque de espalhamento está expressa em termos de mais de um grupo de energia com espalhamento do grupo g' para o grupo g . Este espalhamento envolve ganho de energia (*up-scattering*) e perda de energia (*down-scattering*).

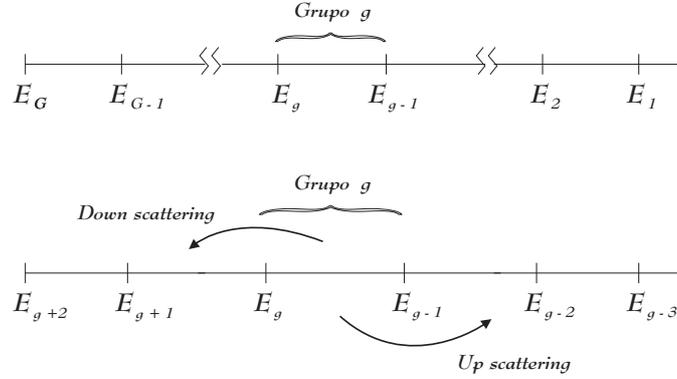


Figura 2.3: Representação dos grupos de energia.

Em relação ao coeficiente de difusão multigrupo, devemos lembrar da Lei de Fick, ou seja,

$$D_g(\mathbf{r}) \equiv \frac{\left| \int_{E_g}^{E_{g-1}} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) dE \right|}{\left| \int_{E_g}^{E_{g-1}} \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) dE \right|}, \quad (2.19)$$

e a velocidade do nêutron caracterizada para o mesmo grupo é:

$$\frac{1}{v_g} \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{1}{v(E)} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}. \quad (2.20)$$

O termo de fonte externa para o grupo g de energia é:

$$S_{ext,g}(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} S_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE, \quad (2.21)$$

e o número médio de nêutrons que nascem da fissão com energia E dentro do grupo g de energia, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\chi_g \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) dE, \quad (2.22)$$

onde χ_g é conhecido como *espectro de fissão* do grupo g .

Usando as Eqs.(2.15) a (2.22) na Eq.(2.14), vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot (D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t)) + \Sigma_{tg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}, t) &= \sum_{g'=1}^G \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \\ + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_{ext,g}(\mathbf{r}, t), \quad g = 1, \dots, G. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A Teoria da Difusão multigrupo é usada em cálculos de reatores nucleares onde são feitas simulações utilizando dados específicos de um reator, para o acompanhamento da operação do reator e para previsão da condição de criticalidade. Estes cálculos são obtidos resolvendo a equação da difusão para o problema de autovalor ou de fonte fixa^[11].

Como podemos observar, a equação da difusão multigrupo apresenta dependência temporal e espacial, logo, necessita de condições iniciais e de contorno apropriadas no tempo e no espaço para a sua solução.

Condição Inicial:

A condição no tempo é o valor inicial do fluxo de nêutrons para o grupo g :

$$\phi_g(\mathbf{r}, 0) = \phi_{o,g}(\mathbf{r}) \quad ; \quad \forall \mathbf{r}. \quad (2.24)$$

Condição Contorno:

Por ser o fluxo de nêutrons uma quantidade escalar, a teoria da difusão não é capaz de representar uma condição de contorno que corresponda ao fato que nenhum nêutron possa entrar no núcleo do reator, através de uma superfície S . Uma hipótese mais próxima é utilizar as definições de correntes parciais de nêutrons e impor que a corrente dirigida para dentro da superfície J^μ seja nula no contorno, ou seja:

$$J^\mu(\mathbf{r}_s, t) = \frac{1}{4}\phi(\mathbf{r}_s, t) + \frac{1}{2}D(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} = 0, \quad (2.25)$$

onde $\mu = \pm$, $\hat{\mathbf{e}}_s$ é um vetor unitário normal a superfície de contorno e \mathbf{r}_s a posição de contorno do sistema. Alguns estudos mais detalhados da Teoria de Transporte^[1] mostram que a condição de contorno mais apropriada para o fluxo de nêutrons, solução da equação da difusão, é que este fluxo vá a zero a uma distância, além do contorno real \mathbf{r}_s , chamado de *contorno extrapolado* e dado por:

$$z_o = 0.7104\lambda_{tr},$$

onde λ_{tr} é o livre caminho médio de transporte. Na prática o valor de z_o é muito pequeno quando comparado com o tamanho do núcleo do reator. Logo, faz apenas:

$$\phi(\mathbf{r}_s, t) = 0 \quad ; \quad \forall \mathbf{r}_s. \quad (2.26)$$

Existem outras condições que devem ser imposta ao fluxo de nêutrons. Por exemplo, sabemos que o núcleo de um reator nuclear é heterogêneo, ou seja, contém regiões como combustível, material estrutural, barras de controle, refrigerante e outros. Desta forma, ao resolver a equação da difusão dependente do tempo precisamos impor a condição de continuidade tanto do fluxo de nêutrons quanto da corrente na interface entre duas regiões distintas.

Sabemos que o nível de potência nuclear medido pelos detectores de nêutrons pode ser obtido a partir do fluxo de nêutrons usando a seguinte relação:

$$P(t) = \int_V \sum_{g=1}^2 \gamma_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.27)$$

onde γ_g é a energia revertida por fissão do grupo g ; com isso, uma outra condição que devemos impor ao fluxo de nêutrons é tal que $\phi_g(\mathbf{r}, t)$ seja uma função real, finita e não negativa.

2.3 Equação da Cinética Pontual de Reatores

A equação da difusão multigrupo para o fluxo escalar de nêutrons dependente da posição e do tempo é bastante difícil de ser resolvida analiticamente e numericamente. Por esta razão, faremos algumas aproximações visando simplificar o método numérico a ser empregado para investigarmos o comportamento da população neutrônica no reator em função do tempo. O modelo da cinética pontual de reatores permite escrever a potência nuclear em função da reatividade do sistema, com isso, para uma dada inserção de reatividade no núcleo do reator podemos prever a população de nêutrons no sistema.

Os primeiros modelos propostos para equação de transporte de nêutrons não incluíam a contribuição dos nêutrons retardados para a geração de nêutrons no reator; com isso, os primeiros projetos desenvolvidos para reatores nucleares não previam o surgimento desses nêutrons. Mesmo sabendo que eles representam menos que 1% da população total de nêutrons no reator, eles desempenham um papel importante no controle operacional do núcleo do reator, devido ao fato que o tempo médio de vida dos nêutrons retardados é da ordem de 10^{-1} s.

Obteremos as equações da cinética pontual a partir da Eq.(2.23). Primeiramente, faremos uma análise sobre a variação da concentração de nêutrons retardados no reator, e em seguida, incluiremos no termo de fissão a contribuição destes nêutrons na equação da difusão multigrupo.

A variação da concentração dos precursores $c_i(\mathbf{r}, t)$ em uma posição \mathbf{r} do reator, num instante t está relacionada com:

i) A fração do número de núcleos precursores que são produzidos no reator

$$\beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t),$$

ii) O número de núcleos precursores que decaem no reator $\lambda_i c_i(\mathbf{r}, t)$,

onde $\nu_{g'}$, λ_i e β_i são, respectivamente, o número médio de nêutrons emitidos na fissão causado por nêutrons do grupo g' de energia, a constante de decaimento do i -ésimo grupo de precursores e a fração de nêutrons retardados neste i -ésimo grupo.

A equação que expressa a variação da concentração dos precursores no reator, para 6 grupos de precursores, pode ser representada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(\mathbf{r}, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.28)$$

No termo de fissão para o grupo g , acrescentaremos a contribuição dos nêutrons retardados, ou seja:

i) O número de precursores que decaem no reator $\sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t)$ que irão contribuir com a fissão.

ii) O número de nêutrons que são produzidos através da fissão, subtraindo a contribuição dos nêutrons que surgem no reator através dos decaimentos dos produtos de fissão $(1 - \beta) \chi_g^p \sum_{i=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t)$.

Desta forma, a equação da difusão multigrupo dependente do espaço e do tempo, acrescentando a contribuição dos nêutrons retardados e tomando $S_{ext,g}(\mathbf{r}, t) = 0$, será representada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot (D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t)) + \Sigma_{tg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}, t) = \sum_{g'=1}^2 \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \\ (1 - \beta) \chi_g^p \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t), \quad g = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(\mathbf{r}, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.30)$$

onde χ_g^p e $\chi_{i,g}^d$ são, respectivamente, o espectro de fissão dos nêutrons instantâneos e retardados do grupo g e β a fração total de nêutrons retardados.

Obteremos as equações da cinética pontual a partir das Eqs.(2.29) e (2.30). Para isso, multiplicaremos a Eq.(2.30) pelo i -ésimo termo do espectro de fissão dos nêutrons retardados do grupo g , e em seguida somaremos e subtrairemos da Eq.(2.29) a seguinte quantidade:

$$\sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \beta_i \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t).$$

Definindo o espectro de fissão total do grupo g ,

$$\chi_g \equiv (1 - \beta)\chi_g^p + \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \beta_i, \quad (2.31)$$

e um operador A_g expresso em função do grupo g que contabiliza fuga, absorção e espalhamento, qual seja,

$$A_g \phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \left(-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla + \Sigma_{tg}(\mathbf{r}) \right) \phi_g(\mathbf{r}, t) - \sum_{g'=1}^2 \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t), \quad (2.32)$$

além dos operadores F_g e $F_{i,g}$ que contabilizam, respectivamente, a produção de nêutrons total e atrasados no reator,

$$F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t), \quad (2.33)$$

e

$$F_{i,g} \phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \chi_{i,g}^d \sum_{g'=1}^2 \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t), \quad (2.34)$$

chegamos às seguintes equações:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\mathbf{r}, t) = -A_g \phi_g(\mathbf{r}, t) + F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^6 \beta_i F_{i,g} \phi_g(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t), \quad (2.35)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_{i,g}^d c_i(\mathbf{r}, t) = \beta_i F_{i,g} \phi_g(\mathbf{r}, t) - \lambda_i \chi_{i,g}^d c_i(\mathbf{r}, t). \quad (2.36)$$

Se multiplicarmos a Eq.(2.35) pelo fluxo adjunto de nêutrons $\phi_g^\dagger(\mathbf{r})$, que é obtida resolvendo a seguinte equação de um problema crítico:

$$A_g^\dagger \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) = F_g^\dagger \phi_g^\dagger(\mathbf{r}), \quad (2.37)$$

onde,

$$A_g^\dagger \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \left(-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla + \Sigma_{tg}(\mathbf{r}) \right) \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) - \sum_{g'=1}^2 \Sigma_s^{g \rightarrow g'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^\dagger(\mathbf{r}), \quad (2.38)$$

e

$$F_g^\dagger \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \nu_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r}) \sum_{g'=1}^2 \chi_{g'} \phi_{g'}^\dagger(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

e integrarmos sobre o volume do reator, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dV &= - \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) A_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV + \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV - \\ &\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \beta_i F_{i,g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dV + \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) dV. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Definindo a reatividade da seguinte forma:

$$\rho(t) \equiv \frac{- \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) A_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV + \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV}, \quad (2.41)$$

a Eq.(2.40), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dV &= \rho(t) \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \phi_g(\mathbf{r}, t) dV - \\ &\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \beta_i F_{i,g} \phi_g(\mathbf{r}, t) dV + \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) dV. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Devido a forma do fluxo de nêutrons não variar significativamente com o tempo, utilizaremos a *Aproximação Quase-Estática*^[16] para separarmos a dependência espaço-temporal do fluxo de nêutrons para obtenção das equações da cinética pontual de reatores.

2.3.1 Aproximação Quase-Estática

A partir da aproximação quase-estática nós podemos escrever o fluxo de nêutrons em termos do produto de uma função amplitude $T(t)$, dependente do tempo, por uma função forma $\psi_g(\mathbf{r}, t)$, tal que:

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) = T(t)\psi_g(\mathbf{r}, t). \quad (2.43)$$

Uma das razões para usarmos o fluxo adjunto $\phi_g^\dagger(\mathbf{r})$ como função peso na equação da difusão dependente do tempo e espaço, é que esta função tem por finalidade reduzir o erro associado a reatividade $\rho(t)$ quando usamos uma função $\psi_g(\mathbf{r}, t)$ aproximada, dada pelo método quase-estático. Substituindo a Eq.(2.43) na (2.42), e lembrando que a função forma depende fracamente do tempo, podemos assumir que sua derivada em relação ao tempo é quase nula, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_g(\mathbf{r}, t) \simeq 0,$$

logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV &= \rho(t)T(t) \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) dV - \\ T(t) \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \beta_i F_{i,g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV &+ \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \chi_{i,g}^d \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) dV. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dividindo toda equação acima por $\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV$ e fazendo algumas simplificações, temos:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t), \quad (2.45)$$

onde:

$$c_i(t) \equiv \frac{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \chi_{i,g}^d c_i(\mathbf{r}, t) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}, \quad (2.46)$$

é o i -ésimo termo da concentração de precursores dependente do tempo. E os parâmetros cinéticos são assim definidos:

O i -ésimo termo da fração de nêutrons retardados:

$$\beta_i(t) \equiv \frac{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \beta_i F_{i,g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}, \quad (2.47)$$

onde a fração total é representada por

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^6 \beta_i(t) = \frac{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^6 \beta_i F_{i,g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}. \quad (2.48)$$

O tempo médio de geração:

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}. \quad (2.49)$$

A reatividade do sistema, dada pela Eq.(2.41):

$$\rho(t) \equiv \frac{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \left(-A_g \psi_g(\mathbf{r}, t) + F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) \right) dV}{\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) F_g \psi_g(\mathbf{r}, t) dV}. \quad (2.50)$$

Para obter a equação da concentração de precursores basta multiplicarmos a Eq.(2.36) pelo fluxo adjunto $\phi_g^\dagger(\mathbf{r})$ e integrarmos sobre o volume do reator. Nesta ordem, utilizando a aproximação quase-estática, vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \chi_{i,g}^d c_i(\mathbf{r}, t) dV = T(t) \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \beta_i F_{i,g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV - \lambda_i \int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \chi_{i,g}^d c_i(\mathbf{r}, t) dV.$$

Dividindo a relação anterior por $\int_V \sum_g \phi_g^\dagger(\mathbf{r}) \frac{1}{v_g} \psi_g(\mathbf{r}, t) dV$ e usando as definições dos parâmetros cinéticos, temos:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i(t)}{\Lambda(t)} T(t) - \lambda_i c_i(t). \quad (2.51)$$

As Eqs.(2.45) e (2.51) constituem um conjunto de 7 equações diferenciais ordinárias conhecidas como *Equações da Cinética Pontual de Reatores*. Em algumas análises experimentais observou-se que os parâmetros cinéticos, exceto a reatividade, não mudam significativamente com o tempo, logo assumiremos estes parâmetros como sendo constantes, o que implica em

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} T(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t), \quad (2.52)$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} T(t) - \lambda_i c_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.53)$$

É importante destacar que existe uma relação direta entre a potência nuclear do reator e a função amplitude. Aplicando a aproximação quase-estática na definição da potência, dada pela Eq.(2.27), temos:

$$P(t) = \left(\int_V \sum_{g=1}^2 \gamma_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r}) \psi_g(\mathbf{r}, t) dV \right) T(t).$$

Para que a função amplitude $T(t)$ seja igual a potência $P(t)$, basta que a integral sobre o volume do reator seja normalizada a 1, ou melhor,

$$\int_V \sum_{g=1}^2 \gamma_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r}) \psi_g(\mathbf{r}, t) dV = 1; \quad \forall t. \quad (2.54)$$

Capítulo 3

Cinética Pontual com Fonte Externa

3.1 Método Inverso da Cinética Pontual com Fonte Externa

Nesta seção investigaremos a possibilidade de utilizarmos a equação inversa da cinética pontual, para seis grupos de precursores e com fonte externa de nêutrons, para monitorar a subcriticalidade do núcleo de um reator nuclear a partir das taxas de contagens de nêutrons que são obtidas pelos detectores de nêutrons externos ao núcleo do reator.

A utilização direta da equação inversa da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons, na monitoração da subcriticalidade pode apresentar algumas dificuldades, pois esta equação assume que a distribuição do fluxo de nêutrons está relacionada com o estado fundamental da equação da difusão, definida por um problema de autovalor, e a forma da distribuição do fluxo de nêutrons mantém-se inalterada. No entanto, em uma situação real, a distribuição do fluxo de nêutrons muda com a subcriticalidade e a distribuição do fluxo de nêutrons não está no estado fundamental, contendo porém outros estados. Nesta ordem, ajustaremos os dados de entrada na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, e definiremos algumas correções necessárias para minimizar os efeitos causados pela subcriticalidade utilizando dados específicos de um reator.

Assumiremos que a intensidade efetiva da fonte externa de nêutrons seja constante desde o ponto de partida do reator, em particular após a recarga do núcleo, até a obtenção da condição de criticalidade. Com a fonte externa de nêutrons, as equações da cinética pontual assumem a seguinte forma:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) + S, \quad (3.1)$$

e

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.2)$$

A concentração inicial de precursores $c_{i,o}$ no reator, pode ser obtida a partir da Eq.(3.2), assumindo que a taxa de variação no tempo da concentração de precursores seja nula em $t = 0$ e que a densidade de nêutrons no reator, nesse instante, seja n_o . Sendo assim, temos:

$$c_{i,o} = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_o, \quad (3.3)$$

onde λ_i é a constante de decaimento do i -ésimo grupo de precursores, Λ é o tempo médio de geração e β_i é a fração de nêutrons retardados do i -ésimo grupo, com

$$\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i. \quad (3.4)$$

Assumindo que a taxa de variação no tempo da densidade de nêutrons no reator seja nula em $t = 0$, temos que a intensidade da fonte externa de nêutrons pode ser expressa, a partir da Eq.(3.1), da seguinte forma:

$$S = \frac{-\rho_o}{\Lambda} n_o, \quad (3.5)$$

onde $\rho_o \equiv \rho(0)$ é a reatividade inicial do sistema.

As fontes externas de nêutrons existentes no núcleo emitem nêutrons isotropicamente a uma taxa S_o nêutrons/cm².seg e ficam localizadas em regiões específicas do reator. Na operação da usina nuclear, especialmente, após a recarga do núcleo do reator, as fontes externas de nêutrons são responsáveis pela correção das flutuações das contagens de nêutrons na partida do reator.

Para que a fonte externa dada pela Eq.(3.5) possa contribuir para a produção de nêutrons no reator, é necessário que o reator esteja no estado subcrítico, pois sob esta condição $\rho_o < 0$ e o termo de fonte externa S é positivo.

Podemos definir uma reatividade $\rho^{sub}(t)$ em função da reatividade medida no sistema da seguinte maneira, ou seja, $\rho^{sub}(t) = -\rho(t)$. Conseqüentemente, a Eq.(3.5) fica:

$$S = \frac{\rho_o^{sub}}{\Lambda} n_o, \quad (3.6)$$

onde $\rho_o^{sub} \equiv \rho^{sub}(0)$ é a reatividade subcrítica inicial do sistema.

O sistema de Eqs.(3.1) e (3.2) pode ser reduzido a uma equação integro-diferencial para $n(t)$, do qual podemos explicitar a reatividade $\rho(t)$. Para isso, basta aplicarmos o método inverso da equação da cinética pontual^[3]. Primeiramente, resolveremos o conjunto de equações diferenciais ordinárias para a concentração de precursores.

Multiplicando a Eq.(3.2) pelo fator integrante $e^{\lambda_i t}$ e integrando no tempo, temos:

$$c_i(t)e^{\lambda_i t} \Big|_0^t = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t n(t')e^{\lambda_i t'} dt'. \quad (3.7)$$

Substituindo a condição inicial, dada pela Eq.(3.3), na equação anterior, a concentração de precursores é expressa pela seguinte equação:

$$c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \left(\frac{n_o}{\lambda_i} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t n(t')e^{-\lambda_i(t-t')} dt' \right). \quad (3.8)$$

Substituindo a Eq.(3.8) na (3.1), vem:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\Lambda} \left[n_o e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t n(t')e^{-\lambda_i(t-t')} dt' \right] + \frac{\rho_o^{sub}}{\Lambda} n_o. \quad (3.9)$$

Através da Eq.(3.9) é possível obter uma equação que permita expressar a reatividade^[3] em função do tempo, em termos da densidade de nêutrons $n(t)$. Lembrando que, $\rho^{sub}(t) = -\rho(t)$, tem-se que:

$$\rho^{sub}(t) = -\beta - \frac{\Lambda}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{n(t)} \left[n_o e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t n(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt' \right] + \frac{n_o}{n(t)} \rho_o^{sub}. \quad (3.10)$$

3.2 Ajuste de Dados de Entrada na Equação Inversa da Cinética Pontual com Fonte Externa

As equações da cinética pontual são expressas somente em termos da dependência temporal. Por este motivo, estas equações apresentam algumas limitações, por exemplo:

A forma espacial da distribuição do fluxo de nêutrons no reator independe do tempo, ou seja, o fluxo de nêutrons é expresso em termos do método quase-estático $\phi_g(\mathbf{r}, t) = \psi_g(\mathbf{r}, t)T(t)$, onde a distribuição espacial do fluxo é obtida a partir da solução da equação da difusão de nêutrons, definida por um problema de autovalor, e a forma da distribuição espacial do fluxo mantém-se inalterada.

Por esta razão, faremos algumas correções necessárias na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, para ajustar as contagens de nêutrons obtidas pelas respostas nos detectores externos.

Dividindo e multiplicando o segundo, o terceiro e o quarto termo do lado direito da Eq.(3.10) pelo valor de referência da densidade de nêutrons n_{ref} , tem-se que:

$$\rho^{sub}(t) = -\beta - \Lambda \frac{\left(\frac{dn(t)/dt}{n_{ref}} \right)}{\left(\frac{n(t)}{n_{ref}} \right)} + \sum_{i=1}^6 \beta_i \left[\frac{\left(\frac{n_o}{n_{ref}} \right) e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t \left(\frac{n(t')}{n_{ref}} \right) e^{-\lambda_i(t-t')} dt'}{\left(\frac{n(t)}{n_{ref}} \right)} \right] + \frac{\left(\frac{n_o}{n_{ref}} \right)}{\left(\frac{n(t)}{n_{ref}} \right)} \rho_o^{sub}, \quad (3.11)$$

onde $n(t)$ e n_{ref} são, respectivamente, as taxas de contagens medida e de referência fornecidas pelos detectores de nêutrons externos ao núcleo do reator. Podemos estimar uma quantidade $Q(t)$, que é a razão das contagens de nêutrons, da seguinte forma:

$$Q(t) = \frac{n(t)}{n_{ref}}. \quad (3.12)$$

Podemos definir uma quantidade M como sendo o fator de multiplicação subcrítico^[2]. Desde que o fator de multiplicação subcrítico M seja conhecido, pode ser determinado pela seguinte equação:

$$M = \frac{n}{n_{ref}} = \frac{1}{1 - k_{eff}}, \quad (3.13)$$

onde o valor de k_{eff} pode ser obtido resolvendo a equação de difusão definida por um problema de autovalor.

Se quisermos monitorar a subcriticalidade usando as contagens fornecidas pelos detectores externos, dada pela Eq.(3.12), devemos corrigir os efeitos causados na distribuição do fluxo de nêutrons, que serão induzidos por uma reatividade adicional. Esta reatividade é inserida no núcleo do reator, devido a movimentação de retirada dos bancos de barras de controle durante a monitoração da subcriticalidade. Para corrigir estes efeitos, a contagem multiplicativa de nêutrons é modificada por três fatores de correção:

$$Q^{mod}(t) = \frac{Q(t)}{C_l^{ext} C_l^{esp} C_l^{imp}}, \quad (3.14)$$

onde C_l^{ext} , C_l^{esp} e C_l^{imp} são, respectivamente, os fatores de correção de extração, espacial e de importância do l -ésimo termo do estado subcrítico da curva $1/M$, e $Q^{mod}(t)$ a razão de contagem de nêutrons modificada.

O fator de correção de extração é responsável pela extração do modo fundamental, o fator de correção espacial corrige o efeito espacial na distribuição do fluxo de nêutrons, induzido por uma reatividade adicional devido a movimentação

dos bancos de barras de controle durante a monitoração da subcriticalidade, e o fator de correção de importância corrige o efeito induzido pela perturbação da importância dos nêutrons.

Estes fatores de correção podem ser obtidos resolvendo-se a equação da difusão de nêutrons tanto para um problema de autovalor quanto para um problema de fonte fixa^[11]. Esses cálculos serão detalhados no capítulo 4, assim como os métodos utilizados para calcular as taxas de contagens de nêutrons fornecidas pelas leituras nos detectores externos.

A partir dessas definições, podemos reescrever a reatividade de um sistema subcrítico em termos dessas quantidades, ou seja:

$$\rho^{sub}(t) = -\beta - \frac{\Lambda}{Q^{mod}(t)} \frac{dQ^{mod}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^6 \beta_i \left[\frac{Q_o^{mod} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t Q^{mod}(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'}{Q^{mod}(t)} \right] + \frac{Q_o^{mod}}{Q^{mod}(t)} \rho_o^{sub}. \quad (3.15)$$

onde $Q_o^{mod} \equiv Q^{mod}(0)$ é a razão de contagem modificada de nêutrons inicial no reator.

3.3 Método Numérico para Calcular a Reatividade

As equações da cinética pontual de reatores tem se apresentado como um bom modelo para descrever o comportamento temporal da população de nêutrons em um reator nuclear. Elas constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas.

O método proposto para discretizar este sistema de equações é conhecido como método de *Diferenças Finitas*, no qual o intervalo de tempo proposto para a solução numérica implica em um Δt na ordem da meia-vida dos nêutrons prontos (10^{-6} à 10^{-4} s).

A concentração de precursores é expressa por uma integral definida no tempo. Utilizaremos um método numérico de integração, conhecido como método dos *Trapézios*, visando aproximar numericamente esta integral pela soma das áreas de trapézios e

usaremos também um método diferencial conhecido como método de *Runge-Kutta*. Para aplicarmos o método de Runge-Kutta precisamos transformar a equação integral da concentração de precursores, dada pela Eq.(3.8), em uma equação diferencial ordinária. Para isso, usaremos a *Regra da integral de Leibniz*^[19] que é uma fórmula para diferenciação de uma integral definida. Primeiramente, analisaremos o comportamento da concentração de precursores no reator, ou seja:

$$c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t n(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'. \quad (3.16)$$

Note-se que a condição inicial para a concentração de precursores $c_{i,o}$ está incluída nos limites de integração da equação anterior. Admitindo que a densidade de nêutrons seja constante no intervalo $-\infty \leq t' \leq 0$, ou seja,

$$n(t') = n_o, \quad (3.17)$$

temos que a condição inicial da Eq.(3.16) pode ser obtida da seguinte forma:

$$c_{i,o} = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^0 n_o e^{\lambda_i t'} dt' = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_o. \quad (3.18)$$

Utilizaremos a definição de *Histórico de Potência* como segue:

$$H_i(t) \equiv \int_{-\infty}^t n(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt', \quad (3.19)$$

cuja definição será de grande utilidade no desenvolvimento do método numérico, pois através do histórico de potência poderemos calcular e atualizar a concentração dos precursores de forma recursiva.

Usando as Eqs.(3.19) e (3.16) na Eq.(3.10), obtemos uma equação para a reatividade em função da definição do histórico de potência, ou seja:

$$\rho^{sub}(t) = -\beta - \frac{\Lambda}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{n(t)} H_i(t) + \frac{n_o}{n(t)} \rho_o^{sub}. \quad (3.20)$$

Para simplificar as notações, não utilizaremos a definição das taxas de contagens em função dos fatores de correção, ou seja, as taxas modificadas $Q^{mod}(t)$. Note que as Eqs.(3.15) e (3.20) são iguais. Isso pode ser verificado substituindo a definição do histórico de potência na Eq.(3.15) e fazendo $Q^{mod}(t) = n(t)$.

O método numérico a ser implementado nesta dissertação de mestrado será baseado na Eq.(3.20). Nesta ordem, definiremos um operador de diferenças avançadas Δ de primeira ordem, que visa aproximar a derivada da densidade de nêutrons no reator, a partir de dois pontos consecutivos. Em seguida, apresentaremos uma formulação numérica para escrevermos o histórico de potência de uma forma recursiva e em função do intervalo Δt da ordem da meia-vida dos nêutrons prontos. A Eq.(3.20) é uma equação integro-diferencial. Portanto, apresentaremos algumas técnicas de integração e diferenciação numéricas para aproximar a integral do histórico de potência.

3.3.1 Método de Diferenças Finitas

Através do método de Diferenças Finitas^[4] podemos calcular aproximadamente a derivada de uma certa função $f(t)$ em um certo ponto t_i da seguinte maneira:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_i} \cong \frac{f(t_i + \Delta t) - f(t_i)}{\Delta t}. \quad (3.21)$$

Este método consiste em aproximar a curva dada pela função $f(t)$ que passa pelos instantes t_i e $t_i + \Delta t$, conforme mostra a figura 3.1.

Portanto, podemos utilizar uma relação desse tipo para obter aproximações, em determinados pontos, de uma certa função conhecida $f(t)$, no intervalo $[t_i, t_i + \Delta t]$. É importante destacar que quanto maior for o número de pontos (menor Δt), menor será a área representada pelo retângulos de base compreendidos entre os intervalos t_i e $t_i + \Delta t$, conseqüentemente, o erro será menor possível, fazendo com que a solução numérica tenda a se aproximar consideravelmente da solução analítica.

Façamos uma análise numérica do histórico de potência. Para isso, utilizaremos a

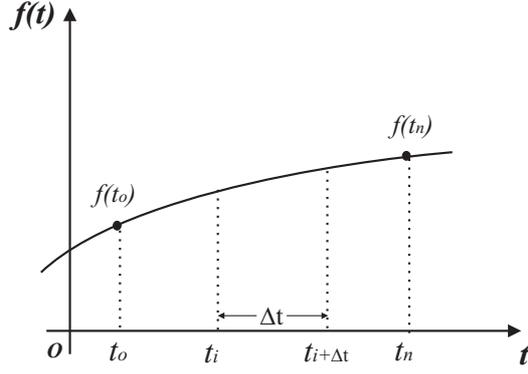


Figura 3.1: Aproximação da derivada em um ponto.

Eq.(3.19) que pode ser expressa da seguinte forma:

$$H_i(t) = e^{-\lambda_i t} \left[\int_{-\infty}^0 n(t') e^{\lambda_i t'} dt' + \int_0^t n(t') e^{\lambda_i t'} dt' \right].$$

Reescrevendo o histórico de potência em um instante posterior $t + \Delta t$, tem-se que:

$$H_i(t + \Delta t) = e^{-\lambda_i(t+\Delta t)} \left[\int_{-\infty}^0 n(t') e^{\lambda_i t'} dt' + \int_0^{t+\Delta t} n(t') e^{\lambda_i t'} dt' \right].$$

Os limites de integração do segundo termo a direita da equação anterior podem ser reescritos de tal forma que:

$$H_i(t+\Delta t) = e^{-\lambda_i \Delta t} \left(e^{-\lambda_i t} \left[\int_{-\infty}^0 n(t') e^{\lambda_i t'} dt' + \int_0^t n(t') e^{\lambda_i t'} dt' \right] + e^{-\lambda_i t} \int_t^{t+\Delta t} n(t') e^{\lambda_i t'} dt' \right).$$

Substituindo a definição de histórico de potência na equação acima, temos:

$$H_i(t + \Delta t) = e^{-\lambda_i \Delta t} \left[H_i(t) + e^{-\lambda_i t} \int_t^{t+\Delta t} n(t') e^{\lambda_i t'} dt' \right], \quad (3.22)$$

como podemos observar, a Eq.(3.22) nos permite calcular de forma recursiva o histórico de potência. No entanto, precisamos conhecer pelo menos a condição inicial para o histórico de potência $H_i(0)$ que pode ser obtido a partir da condição inicial da

concentração de precursores $c_i(0)$, dada pela Eq.(3.3). Se combinarmos as Eqs.(3.16) e (3.19), temos:

$$c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} H_i(t), \quad (3.23)$$

conseqüentemente, a condição inicial para o histórico de potência será expresso em termos da condição inicial da concentração de precursores, como segue:

$$H_i(0) = \frac{n_o}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.24)$$

3.3.2 Método dos Trapézios

O método dos Trapézios^[5] consiste em aproximar a integral de uma certa função pela soma de áreas de trapézios. Quanto menor for o intervalo Δt , conseqüentemente, menor será a área do trapézio. Com isso, teremos um resultado bem próximo do valor exato da integral.

Considere a integral de uma certa função dentro de um intervalo $[t_o, t_n]$ com n sub-intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de comprimento $h > 0$, ou seja,

$$I = \int_{t_o}^{t_n} f(t)dt,$$

onde $h = (t_n - t_o)/n$ e $t_i = t_o + i\Delta t$, com $i=0, \dots, n$.

Podemos calcular o valor da integral em cada intervalo da seguinte maneira:

$$I_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt,$$

de onde tiramos que o resultado da integral será dado pela soma das integrais em cada sub-intervalo, ou seja,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} I_i, \quad (3.25)$$

com I_i conforme mostra a figura abaixo.

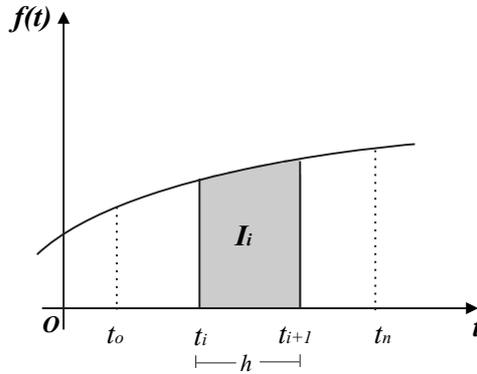


Figura 3.2: Área do trapézio.

Define-se a fórmula do trapézio para o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ como:

$$I_i^T = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}), \quad (3.26)$$

onde $h = \Delta t = t_{i+1} - t_i$.

A partir dessas definições, podemos aproximar numericamente a integral do histórico de potência dada pela Eq.(3.22) da seguinte maneira:

$$I \cong \int_t^{t+\Delta t} n(t') e^{\lambda_i t'} dt' = \frac{\Delta t}{2} [n(t) e^{\lambda_i t} + n(t + \Delta t) e^{\lambda_i (t + \Delta t)}],$$

substituindo este resultado na Eq.(3.22) temos:

$$H_i^T(t + \Delta t) \cong H_i(t) e^{-\lambda_i \Delta t} + \frac{\Delta t}{2} [n(t) e^{-\lambda_i \Delta t} + n(t + \Delta t)]. \quad (3.27)$$

Este resultado nos permite calcular de forma recursiva o histórico de potência utilizando o método dos Trapézios.

3.3.3 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta^[5] consiste em resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias, definidos por um problema de valor inicial. Usaremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem devido ao seu alto grau de precisão, ou seja, pelo fato do erro de truncamento ser suficientemente pequeno. Este método é conhecido como *RK4* e envolve médias ponderadas dos valores de uma certa função $f(t)$ em diferentes pontos dos intervalos $[t_i, t_i + \Delta t]$. Primeiramente, para aplicarmos o método de Runge-Kutta precisamos transformar o histórico de potência, dado pela Eq.(3.22), em uma equação diferencial de primeira ordem. Para isso, utilizaremos a *Regra de Leibniz*^[19]. A regra da integral de Leibniz é uma fórmula para diferenciação de uma integral definida, cujo os limites de integração são funções diferenciáveis, que pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t') dt' = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t') dt' + f(x, b) \frac{db(t)}{dt} - f(x, a) \frac{da(t)}{dt}. \quad (3.28)$$

Se aplicarmos a regra de Leibniz sobre o histórico de potência, dado pela Eq.(3.22), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dH_i(t)}{dt} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} [n(t')e^{-\lambda_i(t-t')}] dt' + \lim_{t' \rightarrow t} n(t')e^{-\lambda_i(t-t')} \frac{dt'}{dt} - \\ \lim_{t' \rightarrow -\infty} n(t')e^{-\lambda_i(t-t')} \frac{dt'}{dt}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Analisando a Eq.(3.29) e substituindo os limites, chegamos na seguinte equação:

$$\frac{dH_i(t)}{dt} = n(t) - \lambda_i H_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.30)$$

As Eqs.(3.30) constituem um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para o histórico de potência. Sobre estas equações, aplicaremos o método de Runge-Kutta cujo o algoritmo de *RK4* é dado por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= n(t) - \lambda_i H_i(t) \\
k_2 &= n(t) - \lambda_i \left(H_i(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1 \right) \\
k_3 &= n(t) - \lambda_i \left(H_i(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2 \right) \\
k_4 &= n(t) - \lambda_i \left(H_i(t) + \Delta t k_3 \right)
\end{aligned}$$

onde,

$$H_i^{RK4}(t + \Delta t) = H_i(t) + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.31)$$

onde a relação anterior nos permite calcular de forma recursiva o histórico de potência utilizando o método de Runge-Kutta.

Desta forma, os métodos numéricos implementados nesta dissertação têm por finalidade resolver numericamente a integral do histórico de potência usando os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta e aproximar numericamente a derivada da densidade de nêutrons no reator pelo método de Diferenças Finitas. Com isso, podemos calcular a reatividade subcrítica usando a Eq.(3.20), em qualquer instante, desde de que conheçamos o valor da potência nuclear nestes instantes.

Capítulo 4

Método das Respostas nos Detectores e Fatores de Correção

Os detectores de nêutrons, externos ao núcleo de um reator tipo PWR, ficam localizados em quatro posições ortogonais entre si, estando situados a 45° , 135° , 225° e 315° em relação ao centro do núcleo do reator, e fornecem o nível de potência nuclear através da medição do fluxo de nêutrons. Esses detectores são cobertos com boro B^{10} , em câmaras de ionização que são sensíveis a nêutrons térmicos, devido a sua elevada seção de choque de absorção e ficam localizados na proteção de concreto que envolve o vaso do reator. A figura 4.1 ilustra a distribuição dos detectores de nêutrons em relação ao centro do núcleo de um reator PWR do tipo Angra I:

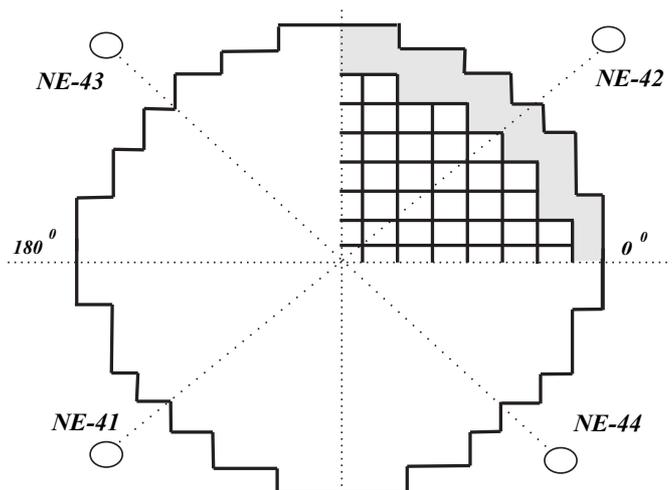


Figura 4.1: Localização dos detectores em relação ao centro do núcleo de um reator PWR.

As respostas nos detectores externos ao núcleo de um reator PWR não depende unicamente do nível de potência nuclear, mas também da distribuição de potência^[9] no núcleo.

4.1 Cálculo das Respostas nos Detectores de Nêutrons

Seja $G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ a função de *Green* associada à uma fonte pontual, localizada na posição do elemento combustível (\mathbf{r}_i), isotrópica e que emite nêutrons com energia distribuídas segundo $\chi(E)$. A equação que governa tal função é da seguinte forma:

$$LG(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\chi(E)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (4.1)$$

onde $\chi(E)$ é o espectro de fissão do U^{235} , $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ sendo a função *Delta de Dirac* tridimensional, \mathbf{r}_i é a posição do elemento combustível e L é um operador que contabiliza fuga, absorção e espalhamento de nêutrons, o qual é assim definido:

$$L \equiv \hat{\Omega} \cdot \nabla(\cdot) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)(\cdot) - \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})(\cdot) d\hat{\Omega}' dE', \quad (4.2)$$

sendo $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ a seção de choque macroscópica total e $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})$ a seção de choque macroscópica diferencial de espalhamento.

Podemos obter a resposta no detector ex-core, posicionado em \mathbf{r}_k , devido a uma fonte, dada pela Eq.(4.1), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}_k) &= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_D(E)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega})d\hat{\Omega}dEd^3r = \\ &= \int_0^\infty \Sigma_D(E) \left(\int_{4\pi} G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_k, E, \hat{\Omega})d\hat{\Omega} \right) dE. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando a relação de reciprocidade de fonte da GPT^[18] (Teoria da Perturbação Generalizada), a quantidade integral definida para o cálculo da resposta no detector pode ser re-escrita da seguinte forma, ou seja:

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}_k) &= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} \chi(E) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} dE d^3r = \\
&= \int_0^\infty \chi(E) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}_i, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \right) dE, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

com $G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ sendo a *função importância* que obedece à seguinte relação:

$$L^\dagger G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = \Sigma_D(E) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \tag{4.5}$$

onde L^\dagger é o operador adjunto do operador L , definido da seguinte forma:

$$L^\dagger \equiv -\hat{\Omega} \cdot \nabla(\cdot) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)(\cdot) - \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}')(\cdot) d\hat{\Omega}' dE', \tag{4.6}$$

sendo $\Sigma_D(E)$ a seção de choque macroscópica de absorção do material que compõe o detector, e \mathbf{r}_k é a posição do detector externo ao núcleo.

Mas a resposta no detector ex-core posicionado na posição do detector (\mathbf{r}_k), devido aos nêutrons gerado pela fonte da Eq.(4.1), pode ainda ser assim calculada:

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_k) &= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} \chi(E) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) w_k(\mathbf{r}) d\hat{\Omega} dE d^3r = \\
&= \underbrace{\left(\int_0^\infty \chi(E) dE \right)}_{=1} \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \right)}_{=1} \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) w_k(\mathbf{r}) d^3r = w_k(\mathbf{r}_i), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

onde $w_k(\mathbf{r}_i)$ é a função peso para resposta no detector, na posição \mathbf{r}_i que fornece o quanto cada elemento combustível irá contribuir para o cálculo da resposta no detector. Note que a resposta no detector é a própria função peso.

Usando, então, a idéia de função peso $w_k(\mathbf{r}_i)$, podemos expressar a resposta no detector, para uma fonte qualquer de nêutrons sendo:

$$\bar{R}(\mathbf{r}_k) = \int_V S(\mathbf{r}_i) w_k(\mathbf{r}_i) d^3r_i. \tag{4.8}$$

Combinando as Eqs.(4.7) e (4.3), e usando a função peso $w_k(\mathbf{r}_i)$ na Eq.(4.8), a resposta no detector pode ser calculada em termos da função de Green da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{R}(\mathbf{r}_k) &= \int_V S(\mathbf{r}_i) \left(\int_0^\infty \Sigma_D(E) \left[\int_{4\pi} G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_k, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \right] dE \right) d^3r_i = \\ &= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_D(E) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \left(\int_V S(\mathbf{r}_i) G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d^3r_i \right) d\hat{\Omega} dE d^3r,\end{aligned}$$

definindo:

$$\psi_i(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \equiv \int_V S(\mathbf{r}_i) G(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d^3r_i, \quad (4.9)$$

onde $\psi_i(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$ é o fluxo angular de nêutrons. Usando a Eq.(4.9), a resposta no detector fica:

$$\bar{R}(\mathbf{r}_k) = \int_0^\infty \Sigma_D(E) \left(\int_{4\pi} \psi_i(\mathbf{r}_k, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \right) dE = \int_0^\infty \Sigma_D(E) \phi_i(\mathbf{r}_k, E) dE, \quad (4.10)$$

onde $\phi_i(\mathbf{r}_k, E)$ é o fluxo escalar de nêutrons na posição do detector (\mathbf{r}_k), devido a uma fonte pontual isotrópica localizada no elemento combustível i na posição (\mathbf{r}_i), e k indica o detector, conforme mostra a figura 4.2.

Note-se que a resposta do detector pode ainda ser expressa em termos da função importância. Para isso, basta combinarmos a Eq.(4.4) com a (4.7) e substituirmos na Eq.(4.8), como segue:

$$\begin{aligned}\bar{R}(\mathbf{r}_k) &= \int_V S(\mathbf{r}_i) \left(\int_0^\infty \chi(E) \left[\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}_i, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \right] dE \right) d^3r_i = \\ &= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{1}{4\pi} \chi(E) S(\mathbf{r}) G^\dagger(\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} dE d^3r.\end{aligned}$$

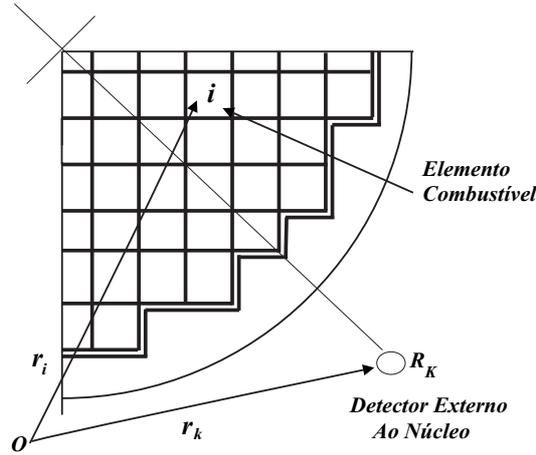


Figura 4.2: Simetria de 1/4 do núcleo de um reator PWR.

Recentemente, foi utilizado o código computacional *DOT3P5* para calcular os fatores pesos usando a equação de transporte de nêutrons^[6], que pode ser obtida multiplicando a Eq.(4.1) por uma fonte $S(\mathbf{r}_i)$ e integrando no volume do nodo i . Este método computacional consiste em calcular o fluxo de nêutrons em cada elemento combustível. Podemos observar que a Eq.(4.7) fornece uma medida da função peso em cada elemento combustível. Para calcularmos esta função peso sobre todo o núcleo do reator, seria necessário resolver a Eq.(4.1) para cada elemento combustível de interesse. Para 1/4 de núcleo de um reator tipo Angra I, seria necessário resolver a Eq.(4.1) 37 vezes.

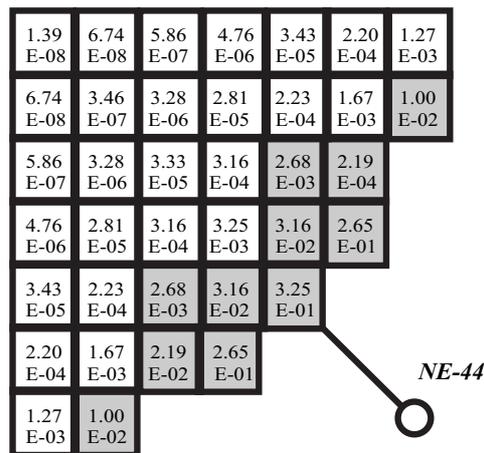


Figura 4.3: Função peso calculada em cada elemento combustível usando a equação adjunta de transporte de nêutrons.

No entanto, é possível obter os fatores pesos para cada elemento combustível do núcleo de um reator utilizando a equação adjunta de transporte de nêutrons^[7]. Para resolver esta equação, adotou-se o método numérico nodal determinístico convencional *CCN* (*Constant-Constant Nodal*)^[7]. A figura 4.3 mostra os valores da função peso em cada elemento combustível do núcleo do reator de Angra I usando o método CCN. Os nodos destacados em cinza representam os combustíveis que irão contribuir significativamente no cálculo das respostas nos detectores.

4.2 Fatores de Correção de Extração, Espacial e Importância

Nesta seção, apresentaremos os três fatores de correção que serão utilizados no ajuste das taxas de contagens de nêutrons obtidas pelos detectores externos. Essas contagens de nêutrons foram modificadas para serem usadas na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, durante a monitoração da subcriticalidade.

A multiplicação subcrítica^[1] de nêutrons no reator, ou seja, para $k < 1$, pode ser expressa quantitativamente usando a seguinte relação:

$$M = (S_o + kS_o + k^2S_o + \dots) = \frac{S_o}{1 - k}, \quad (4.11)$$

onde M representa a multiplicação subcrítica de nêutrons, S_o é a fonte externa de nêutrons e k o fator de multiplicação de um sistema subcrítico. Se o valor de k da Eq.(4.11) for igual ao valor de k_{eff} , a criticalidade pode ser determinada através da construção da curva $1/M$. No entanto, nem sempre este procedimento pode ser aplicado, principalmente, em uma situação onde a forma do fluxo muda com a subcriticalidade e o termo de fonte externa contribui significativamente para a produção de nêutrons no reator. Para tentar contornar este problema, podemos re-escrever a Eq.(4.11), da seguinte maneira:

$$M = S_o + \left(\frac{k}{1 - k}\right)S_o, \quad (4.12)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação anterior representa a contribuição

direta da fonte de nêutrons e o segundo termo expressa justamente o ganho de nêutrons ao sistema através do processo de reprodução de nêutrons. A Eq.(4.11) implica assumir que a distribuição do fluxo de nêutrons está no modo fundamental da equação da difusão de nêutrons, definida por um problema de autovalor, e sua forma mantém-se inalterada em qualquer condição de subcriticalidade. No entanto, sob a condição de subcriticalidade, o termo da fonte contribui significativamente na produção de nêutrons no reator. Em acréscimo, a distribuição espacial do fluxo de nêutrons muda com a subcriticalidade.

A equação da difusão de nêutrons na condição de regime estacionário, para dois grupos de energia, em um sistema subcrítico com fonte externa de nêutrons pode ser representada da seguinte forma:

$$-\nabla \cdot (D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g^s(\mathbf{r})) + \Sigma_{Rg}(\mathbf{r}) \phi_g^s(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^s(\mathbf{r}) + \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^s(\mathbf{r}) + S_g(\mathbf{r}).$$

Esta equação pode ser escrita na seguinte forma de operadores:

$$A\phi^s(\mathbf{r}) = F\phi^s(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}), \quad (4.13)$$

onde:

$$A \equiv \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (D_1(\mathbf{r}) \nabla) + \Sigma_{R1}(\mathbf{r}) & -\Sigma_s^{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}) \\ -\Sigma_s^{2 \rightarrow 1}(\mathbf{r}) & -\nabla \cdot (D_2(\mathbf{r}) \nabla) + \Sigma_{R2}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

e

$$F \equiv \begin{pmatrix} \chi_1 \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r}) & \chi_2 \nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A distribuição do fluxo de nêutrons no reator $\phi^s(\mathbf{r})$ e a fonte externa $S(\mathbf{r})$ são expressas por vetores colunas da seguinte forma:

$$\phi^s(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1^s(\mathbf{r}) \\ \phi_2^s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad e \quad S(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} S_1(\mathbf{r}) \\ S_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}.$$

Especificando a intensidade da fonte externa de nêutrons, o fluxo de nêutrons de sistema subcrítico pode ser obtido a partir da solução da Eq.(4.13). Este cálculo é geralmente conhecido como "Problema de Fonte Fixa ".

A subcriticalidade pode também ser analisada usando a equação da difusão de nêutrons definida por um problema de autovalor:

$$A\phi_i^c(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_i}F\phi_i^c(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.14)$$

onde k_i é o i -ésimo termo dos autovalores e $\phi_i^c(\mathbf{r})$ corresponde ao fluxo de nêutrons associado ao autovalor k_i . Adotaremos k_1 como sendo o maior autovalor obtido pela solução da Eq.(4.14).

A equação adjunta da difusão de nêutrons, para um problema de criticalidade pode ser expressa da seguinte forma:

$$A^\dagger\phi_i^{c\dagger}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_i}F^\dagger\phi_i^{c\dagger}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.15)$$

onde A^\dagger e F^\dagger são, respectivamente, os operadores adjuntos dos operadores A e F , e $\phi_i^{c\dagger}(\mathbf{r})$ é o fluxo adjunto de nêutrons associado ao autovalor k_i . Note-se que os autovalores das Eqs.(4.14) e (4.15) são iguais. Este fato pode ser verificado devido o autovalor ser uma grandeza real. Os fluxos de nêutrons das Eqs.(4.14) e (4.15) satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_V \phi_j^{c\dagger T}(\mathbf{r})F\phi_i^c(\mathbf{r})d^3r \begin{cases} = 0, & \text{se } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Para simplificar as notações, faremos uso da definição de "Produto Interno ", qual seja:

$$\langle \phi_j^{c\dagger}, F\phi_i^c \rangle = \int_V \phi_j^{c\dagger T}(\mathbf{r})F\phi_i^c(\mathbf{r})d^3r,$$

onde o $\phi_j^{c\dagger T}(\mathbf{r})$ é o fluxo adjunto transposto de nêutrons.

A solução geral do problema de fonte fixa, dado pela Eq.(4.13), pode ser expressa por uma combinação das soluções homogênea e particular da seguinte forma:

$$\phi^s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i^c(\mathbf{r}). \quad (4.16)$$

A solução homogênea pode ser obtida a partir da Eq.(4.14) para $k_1 = 1$, com o fluxo de nêutrons no estado fundamental $\phi_1^c(\mathbf{r})$. Os coeficientes c_i 's podem ser determinados multiplicando a Eq.(4.16), pela esquerda, pelo operador de fissão, seguido do produto do fluxo adjunto transposto e integrando sobre todo o volume do reator, ou seja,

$$\int_V \phi_j^{c\dagger T}(\mathbf{r}) F \phi^s(\mathbf{r}) d^3r = \sum_{i=1}^{\infty} \int_V \phi_j^{c\dagger T}(\mathbf{r}) F c_i \phi_i^c(\mathbf{r}) d^3r,$$

de onde tiramos que os coeficientes de expansão são expressos pela seguinte equação:

$$c_i = \frac{\langle \phi_i^{c\dagger}, F \phi^s \rangle}{\langle \phi_i^{c\dagger}, F \phi_i^c \rangle}. \quad (4.17)$$

Note-se que próximo da criticalidade a contribuição da fonte externa de nêutrons passa a ser desprezível quando comparada com o termo de fissão. Neste momento, podemos aproximar a distribuição espacial do fluxo de nêutrons $\phi^s(\mathbf{r}) \simeq \phi^c(\mathbf{r})$, satisfazendo, assim, a condição dada pela Eq.(4.16).

Substituindo a Eq.(4.16) na (4.13) e usando as Eqs.(4.14), (4.15) e a relação de ortogonalidade, vem:

$$c_i = \left(\frac{k_i}{1 - k_i} \right) \frac{\langle \phi_i^{c\dagger}, S \rangle}{\langle \phi_i^{c\dagger}, F \phi_i^c \rangle}, \quad (4.18)$$

substituindo este resultado na distribuição do fluxo de nêutrons para um sistema subcrítico, temos:

$$\phi^s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{k_i}{1 - k_i} \right) \langle \phi_i^{c\dagger}, S \rangle \left[\frac{\phi_i^c(\mathbf{r})}{\langle \phi_i^{c\dagger}, F\phi_i^c \rangle} \right], \quad (4.19)$$

usando então a definição de reatividade, a Eq.(4.19), torna-se:

$$\phi^s(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\rho_1^s} \right) \langle \phi_1^{c\dagger}, S \rangle \left[\frac{\phi_1^c(\mathbf{r})}{\langle \phi_1^{c\dagger}, F\phi_1^c \rangle} \right] + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_i^s} \right) \langle \phi_i^{c\dagger}, S \rangle \left[\frac{\phi_i^c(\mathbf{r})}{\langle \phi_i^{c\dagger}, F\phi_i^c \rangle} \right], \quad (4.20)$$

onde ρ_1^s e ρ_i^s são, respectivamente, a reatividade do estado fundamental e a reatividade do i -ésimo estado subcrítico.

A resposta^[10] nos detectores externos de nêutrons pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$R = \int_V w(\mathbf{r}) \phi^s(\mathbf{r}) d^3r, \quad (4.21)$$

onde $w(\mathbf{r})$ é o fator peso que fornece o quanto cada elemento combustível irá contribuir para o cálculo das respostas nos detectores de nêutrons. Os valores dos fatores peso para um reator PWR tipo de Angra I encontra-se disponível na figura 4.3. A componente do modo fundamental das taxas de contagens de nêutrons R pode ser obtida fazendo uso do primeiro termo da Eq.(4.16), ou seja:

$$R_1 = c_1 \int_V w(\mathbf{r}) \phi_1^c(\mathbf{r}) d^3r, \quad (4.22)$$

onde o coeficiente c_1 pode ser obtido pela Eq.(4.17), para $i = 1$.

A partir dessas definições, podemos definir um coeficiente de extração sendo a razão entre as taxas de contagens da componente do modo fundamental e total do sistema da seguinte maneira:

$$C_1 = \frac{R_1}{R} = \frac{c_1 \int_V w(\mathbf{r}) \phi_1^c(\mathbf{r}) d^3r}{\int_V w(\mathbf{r}) \phi^s(\mathbf{r}) d^3r}, \quad (4.23)$$

usando o coeficiente c_1 dado pela Eq.(4.17), vem:

$$C_1 = \frac{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_1^c(\mathbf{r}) d^3r}{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_1^s(\mathbf{r}) d^3r}, \quad (4.24)$$

onde $\bar{\phi}_1^c(\mathbf{r})$ e $\bar{\phi}_1^s(\mathbf{r})$ são os fluxos de nêutrons normalizados pelo número total de fissões nucleares, dadas por:

$$\bar{\phi}_1^c(\mathbf{r}) = \frac{\phi_1^c(\mathbf{r})}{\langle \phi_1^{c\dagger}, F \phi_1^c \rangle} \quad (4.25)$$

e

$$\bar{\phi}_1^s(\mathbf{r}) = \frac{\phi_1^s(\mathbf{r})}{\langle \phi_1^{c\dagger}, F \phi_1^s \rangle}. \quad (4.26)$$

O fator de correção de extração do l-ésimo estado subcrítico é obtido pela seguinte equação:

$$C_l^{ext} = \frac{C_{1,ref}}{C_{1,l}}, \quad (4.27)$$

onde $C_{1,l}$ e $C_{1,ref}$ são, respectivamente, as componentes de extração do l-ésimo termo dos estados subcrítico e de referência. Estes coeficientes podem ser obtidos aplicando os estados subcrítico e de referência no fluxo de nêutrons da Eq.(4.24).

Podemos estimar uma quantidade Q_l , equivalente as razões das respostas nos detectores externos de nêutrons medidas no reator durante o monitoramento da subcriticalidade da seguinte forma:

$$Q_l = \frac{R_l^{exp}}{R_{ref}^{exp}} = \frac{R_{1,l}^{exp}/C_{1,l}}{R_{1,ref}^{exp}/C_{1,ref}}, \quad (4.28)$$

onde $R_{1,l}^{exp}$ é a componente fundamental do l-ésimo estado subcrítico das respostas nos detectores medidas experimentalmente no reator. Usando a Eq.(4.22) para os estados subcrítico e de referência, a razão de contagens de nêutrons fica:

$$Q_l = \frac{\rho_{ref}^s}{\rho_l^s} \frac{\langle \phi_{1,l}^{c\dagger}, S \rangle \int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_{1,l}^c(\mathbf{r}) d^3r}{\langle \phi_{1,ref}^{c\dagger}, S \rangle \int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_{1,ref}^c(\mathbf{r}) d^3r} \frac{C_{1,ref}}{C_{1,l}}, \quad (4.29)$$

onde definimos:

i) *Fator de Correção de Importância*: corrige o efeito induzido pela perturbação da importância dos nêutrons, ou seja, o efeito induzido pelo termo de fonte externa de nêutrons dado por:

$$C_l^{imp} = \frac{\langle \phi_{1,l}^{c\dagger}, S \rangle}{\langle \phi_{1,ref}^{c\dagger}, S \rangle}. \quad (4.30)$$

ii) *Fator de Correção Espacial*: corrige o efeito espacial devido a mudança na distribuição do fluxo de nêutrons induzida por uma reatividade adicional inserida no núcleo do reator devida a movimentação dos bancos de barras de controle durante a monitoração da subcriticalidade.

$$C_l^{esp} = \frac{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_{1,l}^c(\mathbf{r}) d^3r}{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_{1,ref}^c(\mathbf{r}) d^3r}. \quad (4.31)$$

iii) *Fator de Correção de Extração*: é responsável pela extração do modo fundamental dado por:

$$C_l^{ext} = \frac{1}{C_l^{esp}} \frac{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_l^s(\mathbf{r}) d^3r}{\int_V w(\mathbf{r}) \bar{\phi}_{ref}^s(\mathbf{r}) d^3r}, \quad (4.32)$$

onde,

$$\bar{\phi}_l^s(\mathbf{r}) \equiv \frac{\phi_l^s}{\langle \phi_{1,l}^{c\dagger}, F \phi_l^s \rangle}, \quad (4.33)$$

e

$$\bar{\phi}_{ref}^s(\mathbf{r}) \equiv \frac{\phi_{ref}^s}{\langle \phi_{1,ref}^{c\dagger}, F \phi_{ref}^s \rangle}, \quad (4.34)$$

são os fluxos de nêutrons normalizados pelo número total de fissões nucleares. Note-se que o fluxo de nêutrons do problema de fonte fixa está expresso também para diferentes estados subcríticos.

Desde que os fatores de correção sejam previamente calculados para um sistema subcrítico, podemos estimar a reatividade subcrítica ρ_l^s a partir da razão de contagens de nêutrons Q_l medidas pelos detectores externos de um reator, usando a Eq.(4.29):

$$\rho_l^s = C_l^{ext} C_l^{esp} C_l^{imp} \left(\frac{1}{Q_l} \right) \rho_{ref}^s, \quad (4.35)$$

onde ρ_{ref}^s pode ser determinado fixando o estado de referência. Note-se que para estimarmos a reatividade subcrítica é necessário que o estado de referência seja diferente do estado crítico, pois sob esta condição $\rho_{ref}^s = 0$. Para usarmos a definição de contagens de nêutrons modificada Q_l^{mod} na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, assumimos que:

$$Q_l^{mod} = \frac{\rho_{ref}^s}{\rho_l^s} = \frac{Q_l}{C_l^{ext} C_l^{esp} C_l^{imp}}, \quad (4.36)$$

onde esta relação é bastante satisfatória, pois os fatores de correção foram definidos por razões de quantidades integrais, ou seja, um número real. Para que se conserve a igualdade da equação acima é necessário que a razão entre as reatividades ρ_{ref}^s e ρ_l^s seja uma taxa de contagem de nêutrons.

Capítulo 5

Análise de Resultados

5.1 Validação do Método Direto de Diferenças Finitas

Nesta seção faremos algumas aplicações utilizando as equações da cinética pontual. Para isso, discretizaremos as equações da cinética pontual pelo Método de Diferenças Finitas (MDF), definido no capítulo 3, e compararemos os resultados obtidos com alguns resultados que se encontram disponíveis na literatura. Para essa análise de resultados, inicialmente, consideraremos o termo da fonte externa nula e investigaremos o comportamento da população neutrônica no reator para alguns valores de reatividade.

As equações da cinética pontual, dadas pelas Eqs.(3.1) e (3.2), para seis grupos de precursores e sem fonte externa são assim representadas:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t), \quad (5.1)$$

e

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i c_i(t), i = 1, \dots, 6. \quad (5.2)$$

Para validarmos o método numérico, comparamos os resultados obtidos pelo Método de Diferenças Finitas (MDF) com os resultados obtidos usando os seguintes métodos: PCA (Piecewise Constant Approximation Method)^[12], SCM (Stiffness Confinement Method)^[13] e a Solução Analítica da Equação da Cinética Pontual^[14,15].

No desenvolvimento do método numérico, consideramos os seguintes parâmetros

cinéticos: $\Lambda = 0.00002s$, $\beta = 0.007$, $\beta_i = (0.000266, 0.001491, 0.001316, 0.002849, 0.000896, 0.000182)$, e $\lambda_i(s^{-1}) = (0.0127, 0.0317, 0.115, 0.311, 1.4, 3.87)$ para 6 grupos de precursores. O intervalo de tempo considerado foi da ordem da meia-vida dos nêutrons prontos $\Delta t = 10^{-6}s$ e $n_o = 1$. Estes parâmetros foram inseridos no algoritmo computacional para investigarmos o comportamento da densidade de nêutrons no reator.

Nas tabelas abaixo são apresentados os valores da densidade de nêutrons usando o método de Diferenças Finitas nas Eqs.(5.1) e (5.2) para alguns valores de reatividade inseridas no núcleo do reator:

Tabela 5.1: Densidade de nêutrons $n(t)$ para step de reatividade $\rho = 0.003$.

Tempo(s)	SCM	PCA	MDF	Analítico ^[12]
1	2.2254	2.2098	2.2098	2.2098
10	8.0324	8.0192	8.0192	8.0192
20	2.8351×10^1	2.8297×10^1	2.8297×10^1	2.8297×10^1

Tabela 5.2: Densidade de nêutrons $n(t)$ para step de reatividade $\rho = 0.007$.

Tempo(s)	SCM	PCA	MDF	Analítico ^[12]
0.01	4.5001	4.5088	4.5088	4.5088
0.5	5.3530×10^3	5.3459×10^3	5.3457×10^3	5.3459×10^3
2	2.0627×10^{11}	2.0591×10^{11}	2.0589×10^{11}	2.0591×10^{11}

Tabela 5.3: Densidade de nêutrons $n(t)$ para rampa de reatividade $\rho(t) = 0.1\beta t$.

Tempo(s)	PCA	MDF	Analítico ^[12]
2	1.3382	1.3382	1.3379
4	2.2278	2.2284	2.2283
6	5.5802	5.5820	5.5815
8	4.2772×10^1	4.2786×10^1	4.2781×10^1
9	4.8735×10^2	4.8752×10^2	4.8745×10^2

Como podemos observar nas tabelas anteriores, os resultados obtidos pelo método de Diferenças Finitas aplicado nas equações da cinética pontual é bem satisfatório,

podendo ser utilizado para analisar o comportamento da densidade de nêutrons $n(t)$ no reator, para uma dada inserção de reatividade no núcleo. Note-se que população neutrônica no reator aumenta consideravelmente no tempo de acordo com a inserção de reatividade positiva no núcleo. Por esse motivo, é importante calcular a reatividade de forma bem precisa para prevenir certos acidentes inesperados de reatividade.

5.2 Importância do Termo de Fonte Externa de Nêutrons

Fizemos alguns testes usando o método direto de Diferenças Finitas nas Eqs.(5.1) e (5.2) para verificarmos o comportamento da densidade de nêutrons $n(t)$ no reator para uma inserção de reatividade negativa $\rho = -0.003$ (sub-crítica) e uma reatividade nula $\rho = 0.0$ (crítica). A figura 5.1 ilustra os resultados para esses valores de reatividade:

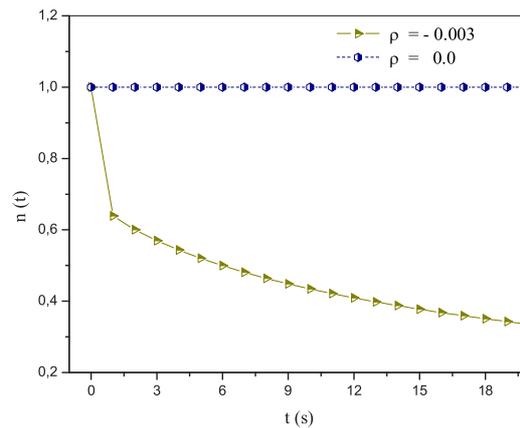


Figura 5.1: Densidade de nêutrons $n(t)$ sem fonte externa.

Os resultados ilustrados pela figura 5.1 mostram que para uma reatividade nula a potência do reator não varia com o tempo, ou seja, permanece constante. Este resultado já era esperado, visto que a reatividade é dada pela razão da taxa líquida de nêutrons, ou seja, a diferença da quantidade de nêutrons que é produzida (fontes de fissões + fontes externas) e perdida (captura) no reator pela taxa de produção total de nêutrons no reator (fontes de fissões + fontes externas), podendo ser representada pela seguinte equação:

$$\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}, \quad (5.3)$$

onde o autovalor k_{eff} representa a razão da quantidade de nêutrons que é produzida e perdida no reator. Sob a condição de estado estacionário $k_{eff} = 1$.

Para uma reatividade negativa verificamos que a potência do reator decai exponencialmente no tempo. Este resultado mostra que sob a condição de subcriticalidade torna-se necessário acrescentar algum termo nas equações da cinética pontual que contribua significativamente com a produção de nêutrons no reator. Este termo nós definimos como fonte externa S , dada pela Eq.(3.5).

Então um dos nossos objetivos é verificar a impotância da fonte externa de nêutrons na monitoração da subcriticalidade. A figura 5.2 mostra os resultados obtidos usando o método de Diferenças Finitas nas equações da cinética pontual, quando acrescentado o termo da fonte externa de nêutrons conforme mostram as Eqs.(3.1) e (3.2).

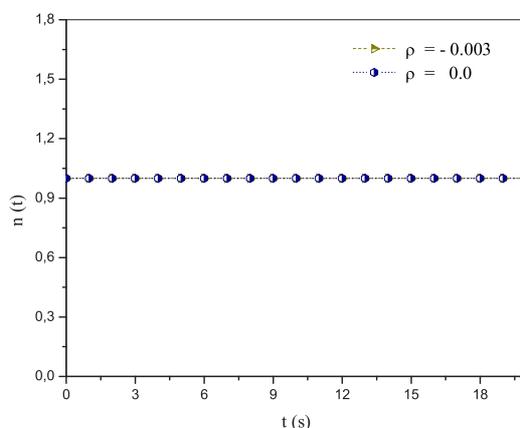


Figura 5.2: Densidade de nêutrons $n(t)$ com fonte externa.

Como podemos observar, para uma reatividade nula não há contribuição do termo da fonte externa, pois neste caso $S = 0$.

Para uma reatividade negativa, a condição de criticalidade é obtida, visto que para $\rho < 0$ o termo da fonte externa de nêutrons contribui positivamente com a produção de nêutrons no reator.

Na figura 5.1, observamos que a densidade de nêutrons decai significativamente no tempo para o valor de reatividade subcrítica $\rho = -0.003$. Isto ocorre devido a quantidade de nêutrons que escapam ou que são capturados no reator é maior do que a quantidade de nêutrons que é produzida. Na figura 5.2, para este mesmo valor de reatividade subcrítica, $\rho = -0.003$, podemos observar a importância do termo de fonte externa na produção de nêutrons no reator. Pois, acrescentando o termo de fonte externa nas equações da cinética pontual a densidade de nêutrons no reator fica estável, ou seja, a quantidade de nêutrons que é produzida no reator é justamente igual a quantidade de nêutrons que é perdida no reator, para qualquer intervalo de tempo.

5.3 Validação do Método Inverso da Cinética Pontual

Podemos validar o método inverso da equação da cinética pontual a partir do método direto de Diferenças Finitas. Podemos explicitar a reatividade $\rho(t)$ por uma equação integro-diferencial combinando as Eqs.(5.1) e (5.2), sem o termo de fonte externa, da qual temos:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} - \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{n(t)} H_i(t). \quad (5.4)$$

Os valores da densidade de nêutrons $n(t)$ que serão usados na Eq.(5.4) foram fornecidos pelo método direto de Diferenças Finitas ilustrados pelas tabelas 5.1 e 5.2.

As tabelas abaixo mostram os valores da reatividade calculada pela Eq.(5.4) utilizando os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta. O intervalo Δt indicados nessas tabelas referem-se ao passo utilizado no cálculo da reatividade.

Através dos resultados apresentados nas tabelas 5.4 e 5.5, podemos observar que o método dos Trapézios e de Runge-Kutta são bastante eficientes no cálculo da reatividade para o intervalo de tempo $\Delta t = 0.01s$. Note-se que estes métodos se tornam mais eficientes quanto menor for os intervalos de tempo considerados. A partir desses resultados, investigaremos a possibilidade de usarmos a equação inversa da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons, para monitorar a

Tabela 5.4: Cálculo da reatividade $\rho = 0.003$ com $\Delta t = 0.01s$.

Tempo(s)	Reatividade	
	ρ_T	ρ_{RK4}
1	0.00300	0.00300
10	0.00300	0.00300
20	0.00300	0.00300

Tabela 5.5: Cálculo da reatividade $\rho = 0.007$ com $\Delta t = 0.01s$.

Tempo(s)	Reatividade	
	ρ_T	ρ_{RK4}
0.01	0.00699	0.00700
0.5	0.00699	0.00700
2	0.00699	0.00700

subcriticalidade de um reator nuclear. Esta equação baseia-se na Eq.(3.20) usando, respectivamente, os métodos do Trapézio e de Runge-Kutta para aproximar a integral do histórico de potência. Note que se fizermos $\rho^{sub}(t) = -\rho(t)$ e $S = 0$ na Eq.(3.20), obtemos a Eq.(5.4).

5.4 Aquisição de Taxas de Contagens

Para a validação do método numérico utilizamos as taxas de contagens de nêutrons obtidas pela solução da equação da difusão de nêutrons com fonte externa^[11]. A condição de criticalidade pode ser prevista pelo procedimento da curva $1/M$ conforme mostra a figura 5.3.

A obtenção das taxas de contagens foram feitas utilizando a Eq.(3.13), onde os valores de k foram obtidos a partir do cálculo da reatividade^[11] para diferentes configurações de barras de controle. Foram selecionadas seis configurações de barras de controle, extraídos do problema de fonte fixa, conforme ilustra a tabela 5.6. Nesta tabela, as letras A , B , C e D representam os bancos de barras de controle seguidos dos números de passos retirados do núcleo do reator.

Para que as contagens de nêutrons M pudessem ser inseridas na equação inversa

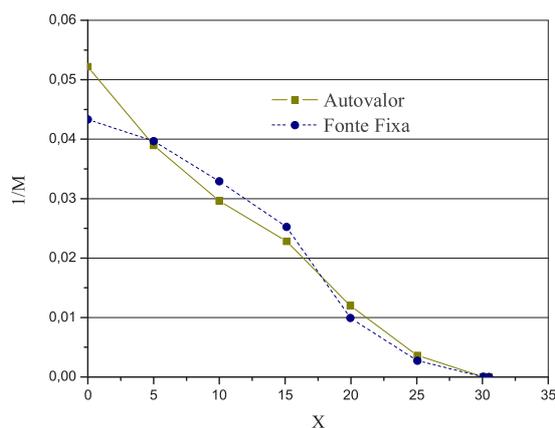


Figura 5.3: Curva $1/M$ em função da retirada dos bancos de barras de controle.

Tabela 5.6: Resultados do problema de fonte fixa.

Configurações dos bancos de barras de controle	Abscissa x	Resultados		
		$\rho(pcm)$	$k^{[11]}$	$1 - k$
A000B000C000D000	0.00	-4530.00	0.9566631	0.0433369
A100B000C000D000	5.00	-4131.45	0.9603247	0.0396753
A200B072C000D000	10.00	-3405.25	0.9670689	0.0329311
A225B172C044D000	15.10	-2587.80	0.9747747	0.0252253
A225B225C144D016	19.95	-1002.70	0.9900727	0.0099273
A225B225C225D116	25.05	- 273.84	0.9972690	0.0027310

da cinética pontual, com fonte externa, tornou-se necessário fazer uma transformação de variável, escrevendo as taxas de contagens $M(x)$ em função do tempo, ou seja, $M(t)$. Para isso, assumimos que o intervalo de tempo gasto para que 100 passos dos bancos de barras de controle sejam retirados do núcleo do reator seja de 10 minutos.

A tabela 5.7 mostra os valores das contagens de nêutrons em função do tempo, onde $M^{fonte}(t)$ é a contagem de nêutrons referente ao problema de fonte fixa.

Utilizamos uma função polinomial para interpolar os seis valores de taxas de contagens da tabela 5.7, usando o software Origin 7, ou seja,

$$M^{pol}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4, \quad (5.5)$$

Tabela 5.7: Taxas de contagens subcrítica $M(t)$.

Tempo(s)	$M^{fonte}(t)$
0	23.07502383
600	25.20459833
1200	30.36643173
1800	39.64273963
2400	100.7323240
3000	366.1662395

onde os A_i 's são constantes de ajuste da função polinomial $M^{pol}(t)$.

Os métodos numéricos implementados no cálculo da reatividade subcrítica são bastante eficientes para intervalos de tempo bem pequenos. Logo, tornou-se necessário desenvolver um programa numérico para gerar as taxas de contagens de nêutrons, dada pela tabela 5.7. Essas contagens de nêutrons foram geradas usando a função $M^{pol}(t)$, para um passo $\Delta t = 0.01s$, para que pudessem ser usadas na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, conforme mostra a figura 5.4.

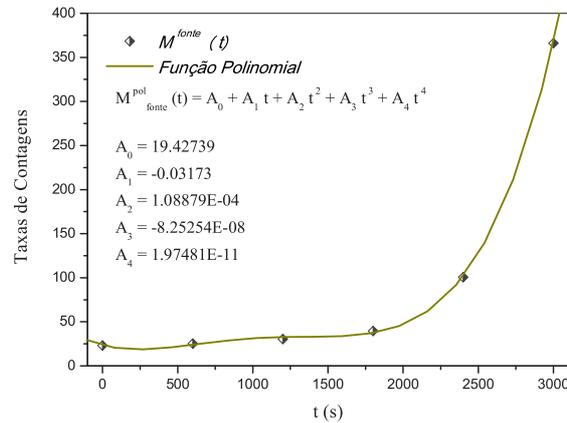


Figura 5.4: $M^{fonte}(t)$ ajustada pela função polinomial.

5.5 Apresentação dos Resultados

5.5.1 Resposta da Reatividade devido a Fonte Externa

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos pelo método inverso da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons, durante a monitoração da subcriticalidade usando as contagens de nêutrons indicadas na tabela 5.7. Essas contagens de nêutrons foram geradas usando uma função polinomial para um passo de tempo $\Delta t = 0.01s$, conforme ilustrado na figura 5.4.

Os parâmetros cinéticos utilizados na equação inversa da cinética pontual foram apresentados na seção 5.1, quando do cálculo da densidade de nêutrons.

A figura 5.5 mostra os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons, usando os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios comparando com os valores de reatividade indicados na tabela 5.6. Nesses cálculos utilizamos uma função polinomial para gerar as taxas de contagens de nêutrons.

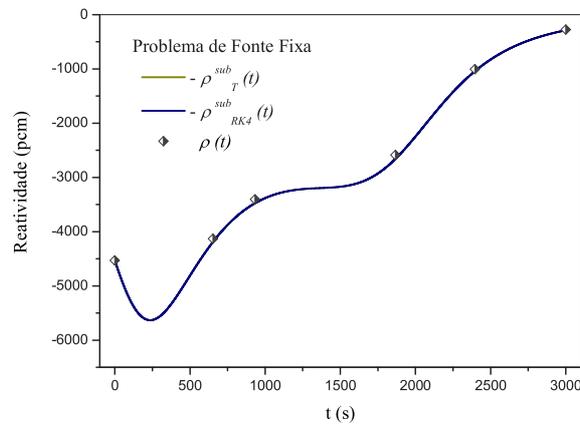


Figura 5.5: Reatividade subcrítica.

Como podemos observar, na figura 5.5, os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, são bastante satisfatórios comparados com os valores de reatividade, obtidos pela solução da equação da difusão para o problema de fonte fixa, indicados na tabela 5.6.

Na tabela 5.8 são apresentados também os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, usando uma função polinomial para gerar as

taxas de contagens de nêutrons. Os valores da reatividade $\rho(t)$ referem-se aos valores de reatividade indicados na tabela 5.6. Nessa tabela são apresentados também os erros relativos para os métodos de Runge-Kutta e dos Trapézios.

Tabela 5.8: Comparação de resultados do problema de fonte fixa com $\Delta t = 0.01s$.

Tempo(s)	$\rho(t)$ (pcm)	$-\rho_T^{Sub}(t)$ (pcm)	Erro%	$-\rho_{RK4}^{Sub}(t)$ (pcm)	Erro%
0	-4530.00	-4530.00	0.00	-4530.00	0.00
600	-4131.45	-4180.11	1.18	-4180.10	1.18
1200	-3405.25	-3471.34	1.94	-3471.33	1.94
1800	-2587.80	-2651.26	2.45	-2651.25	2.45
2400	-1002.70	-1025.35	2.26	-1025.34	2.26
3000	-273.84	-270.38	1.26	-270.37	1.26

Nesses cálculos, utilizamos as taxas de contagens de nêutrons como critério de comparação entre os valores de reatividade obtidos pelo método inverso da equação da cinética pontual, com fonte externa, em relação aos valores de reatividade $\rho(t)$ para estimarmos os erros relativos. Pois, por mais precisa que seja a função utilizada para interpolar as taxas de contagens, essa função não consegue reproduzir os valores das contagens de nêutrons para os instantes de tempo indicados na tabela 5.7. Nesta ordem, investigamos qual intervalo de tempo corresponde aos valores das contagens de nêutrons indicadas na tabela 5.7 usando a função polinomial. Os valores de reatividade obtidos pela equação inversa da cinética pontual indicados na tabela 5.8 foram extraídos para esses instantes de tempo.

Os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, indicados na figura 5.5 e na tabela 5.8 reproduzem perfeitamente os valores de reatividade obtidos pela solução da equação da difusão para o problema de fonte fixa^[11]. Os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta, implementados no cálculo do histórico de potência, apresentaram resultados bastante satisfatórios. A partir desses resultados, podemos verificar a eficiência e a precisão da equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, na monitoração da subcriticalidade de um reator nuclear. Sugerimos que futuramente se implemente este método em um reator experimental ou em uma usina nuclear.

5.5.2 Obtenção dos Fatores de Correção

Nesta seção são apresentados os resultados dos cálculos dos fatores de correção para diferentes estados subcríticos.

A tabela 5.9 mostra os valores dos fatores de correção para diferentes configurações de barras de controle. Nesta tabela, as letras *A*, *B*, *C* e *D* representam os bancos de barras de controle seguidos dos números de passos retirados do núcleo do reator. Os valores dos fatores de correção estão representados graficamente na figura 5.6.

Tabela 5.9: Fatores de ajuste de taxas de contagens de nêutrons.

Configurações dos bancos de barras de controle	Fatores de correção		
	C_l^{imp}	C_l^{esp}	C_l^{ext}
A000B000C000D000	0.6055	1.7424	0.2491
A100B000C000D000	1.2827	0.5937	0.9340
A200B072C000D000	1.1881	1.0005	0.6148
A225B172C044D000	0.9920	1.0061	0.7141
A225B225C144D016	0.8984	0.9817	0.8524
A225B225C225D116	1.1796	0.9145	0.9674
A225B225C225D216	1.0026	0.9988	1.0002
A225B225C225D225	1.0000	1.0000	1.0000

Para o cálculo dos fatores de correção adotamos o estado de referência como sendo o estado estacionário em que $k_{eff} = 1$, sistema crítico. Sabemos que a Eq.(4.13) não tem solução numérica próximo da criticalidade, pois neste caso $A \simeq F$; logo a solução numérica para o fluxo seria $\phi^s = [A - F]^{-1}S$. Como podemos observar, para obtermos uma medida do fluxo de nêutrons para esta condição seria necessário um número elevado de interações, para que este sistema tenha solução numérica. No entanto, este procedimento é inviável, pois isso acarretaria em uma série de erros numéricos de arredondamento. Para contornar este problema, próximo da condição de criticalidade, usaremos o fluxo de nêutrons do problema de autovalor.

Os fatores de correção foram obtidos resolvendo a equação da difusão de nêutrons tanto para um problema de autovalor quanto para um problema de fonte fixa. Os

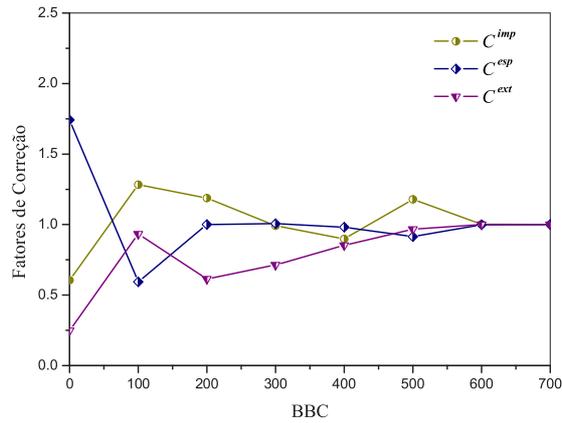


Figura 5.6: Fatores de correção em função das retiradas dos bancos de barras de controle.

fluxos de nêutrons dos problemas de autovalor $\phi_{1,l}^c(\mathbf{r})$ e de fonte fixa $\phi_l^s(\mathbf{r})$, para um estado subcrítico, foram obtidos utilizando o *Método de Expansão Nodal* (NEM)^[11]. No cálculo do fluxo adjunto $\phi_{1,l}^{c\dagger}(\mathbf{r})$ usamos o *Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa* (DFMG)^[11,17], onde os fluxos de nêutrons e as correntes parciais, usadas no cálculo dos coeficientes de correção no método DFMG^[17], vem do resultado do cálculo do fluxo de nêutrons do método NEM, para o problema de autovalor.

A configuração do núcleo do reator, os critérios de tolerância para o autovalor e para o fluxo escalar de nêutrons e os dados nucleares (homogenizados) usados nos cálculos dos fatores de correção serão apresentados no apêndice A.

Os fatores de correção apresentados nesta seção seriam utilizados para ajustar as contagens de nêutrons fornecidas pelas leituras nos detectores externos ao núcleo do reator para serem inseridas na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa de nêutrons. No entanto, para que esse método fosse implementado seria necessário possuir essas contagens de nêutrons medidas na usina durante a partida do reator. Como não foi possível obter estes dados, sugerimos futuramente que, de posse destas taxas de contagens, seja implementado o método usado na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, para monitorar a subcriticalidade .

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo desse trabalho foi o desenvolvimento de uma metodologia que permita monitorar a subcriticalidade de um reator, através do cálculo da reatividade, usando a equação inversa da cinética pontual, com fonte externa.

No desenvolvimento desse trabalho, tornou-se necessário implementar algumas soluções numéricas a fim de determinar a reatividade do sistema, usando a equação inversa da cinética pontual, com fonte externa. Para isso, utilizamos o método de Diferenças Finitas para aproximar a derivada da densidade de nêutrons e os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta para aproximar a integral do histórico de potência. Para empregarmos o método de Runge-Kutta, tornou-se necessário transformar a equação integral do histórico de potência em uma equação diferencial, o que foi possível através da regra da integral de Leibniz.

Para validarmos os métodos numéricos implementados nesta dissertação de mestrado, para o cálculo da reatividade, primeiramente foi necessário resolver as equações da cinética pontual para um dado valor de reatividade, podendo assim determinar a densidade de nêutrons no reator. Para resolver este sistema de equações diferenciais usamos o método de Diferenças Finitas, cujos os resultados estão indicados no capítulo 5 para um valor de reatividade conhecido. Para validarmos o método inverso da cinética pontual, sem fonte externa, usamos os resultados obtidos pelo método direto de Diferenças Finitas. A reatividade pode ser determinada, pela Eq.(5.4), usando os valores da densidade de nêutrons calculada pelo método direto, para as reatividade $\rho = 0.003$ e $\rho = 0.007$, conforme mostrado no capítulo 5. O método numérico implementado no cálculo da reatividade da Eq.(5.4)

é o mesmo implementado no método inverso da cinética pontual, com fonte externa, dado pela Eq.(3.20) para os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta. Note que, se acrescentarmos o termo de fonte externa S na Eq.(5.4) e fizermos $\rho^{sut}(t) = -\rho(t)$, obtemos a Eq.(3.20). Desta forma, foi possível validar o método numérico implementado na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa.

Na seção 5.5 foram apresentados os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, e comparados com os valores de reatividade da tabela 5.6, durante a monitoração da subcriticalidade. As taxas de contagens de nêutrons usadas no cálculo da reatividade foram obtidas pela multiplicação subcrítica de nêutrons no núcleo do reator através da construção da curva $1/M$. Como podemos observar, os resultados obtidos pela equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, reproduzem perfeitamente os valores de reatividade obtidos pela solução da equação da difusão de nêutrons para o problema de fonte fixa^[11], para diferentes configurações de barras de controle, onde os métodos dos Trapézios e de Runge-Kutta apresentaram resultados bastante satisfatórios.

Os resultados apresentados no capítulo 5 demonstram a viabilidade de utilizarmos o método inverso da equação da cinética pontual, com fonte externa, para acompanharmos a multiplicação subcrítica de nêutrons no reator, assim como, a previsão da condição de criticalidade através do cálculo da reatividade durante a operação de uma usina nuclear, onde sugerimos futuramente que se construa um reatímetro capaz de monitorar a reatividade usando a metodologia empregada nessa dissertação de mestrado.

As equações da cinética pontual foram desenvolvidas para realizar cálculos referente ao núcleo do reator. Portanto, para utilizarmos as contagens de nêutrons que são obtidas a partir das leituras nos detectores externos^[3] ao núcleo na equação inversa da cinética pontual, com fonte externa, primeiramente, devemos ajustar essas contagens usando os três fatores de correção definidos no capítulo 4. No entanto, este método não foi implementado nesta dissertação, por não termos conseguido essas contagens de nêutrons medidas durante a partida de um reator nuclear. Sugerimos futuramente que, de posse dessas taxas de contagens, por exemplo, obtidas durante a monitoração do reator de Angra I, seja implementado os métodos usados na equação

inversa da cinética pontual, com fonte externa. Essas contagens de nêutrons podem ser ajustadas a partir dos três fatores de correção indicados na tabela 5.9.

para elementos combustíveis heterogêneos com enriquecimentos 2.1%, 2.6% e 3.1% com arranjo de 16×16 .

Tabela A1: Parâmetros nucleares multigrupos.

Tipo	g	Σ_{ag}	$\nu\Sigma_{fg}$	D_g	$\Sigma_{gg'}$
1	1	0.0078315	0.0051868	0.9255495	0.0196158
	2	0.0785496	0.0901467	0.2707000	0.0000000
2	1	0.0082381	0.0058984	0.9266905	0.0193022
	2	0.0864572	0.1076131	0.2712634	0.0000000
3	1	0.0086356	0.0065975	0.9278580	0.0189957
	2	0.0938953	0.1239896	0.2716900	0.0000000
4	1	0.0126436	0.0049695	0.9841024	0.0155280
	2	0.1127930	0.0953024	0.2727041	0.0000000
5	1	0.0129602	0.0056069	0.9851771	0.0152856
	2	0.1215718	0.1138324	0.2731130	0.0000000
6	1	0.0080213	0.0051672	0.9460171	0.0189834
	2	0.0860301	0.0911024	0.2738683	0.0000000
7	1	0.0084229	0.0058745	0.9472606	0.0186769
	2	0.0941114	0.1087756	0.2743613	0.0000000
8	1	0.0085150	0.0058637	0.9579423	0.0183635
	2	0.0982048	0.1094681	0.2760975	0.0000000
9	1	0.0086046	0.0058510	0.9688038	0.0180526
	2	0.1020203	0.1101115	0.2777342	0.0000000
10	1	0.0088154	0.0065690	0.9485292	0.0183774
	2	0.1017154	0.1253522	0.2747196	0.0000000
11	1	0.0015398	0.0000000	0.9970837	0.0331934
	2	0.0414575	0.0000000	0.1999895	0.0000000
12	1	0.0017062	0.0000000	0.9519234	0.0304512
	2	0.0440106	0.0000000	0.2024303	0.0000000
13	1	0.0009823	0.0000000	1.1842756	0.04350093
	2	0.0356204	0.0000000	0.1946245	0.00000000

Os fluxos heterogêneos foram usados nos cálculos dos parâmetros nucleares multigrupos, utilizando técnicas de homogenização e colapso. O método de homogenização de único "assembly" foi empregado nos elementos combustíveis heterogêneos e o método de homogenização de "multi-assembly" foi empregado para as regiões extras, baffle + refletor.

Referências Bibliográficas

- [1] DUDERSTADT, J. J., HAMILTON, L. J., *Nuclear Reactor Analysis*. 1 ed. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1976.
- [2] PEREIRA, V., *Sistema para Previsão e Determinação da Multiplicação Subcrítica*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [3] NAING, W., TSUJI, M., SHIMAZU, Y., "Subcriticality Measurement of Pressurized Water Reactors during Criticality Approach using a Digital Reactivity Meter", *Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 42, pp. 145-152, 2005.
- [4] ALVIM, A. C. M., *Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Nuclear*, COPPE/UFRJ, 2003.
- [5] FREITAS, S. R., *Métodos Numéricos*, Departamento de Computação e Estatística, UFMS, 2000.
- [6] SADDE, L. M., *Determinação da Resposta nos Detectores Externos de um Reator PWR para Diferentes Configurações de Queda de Barras de Controle*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
- [7] GARCIA, V. S., *Determinação da Resposta nos Detectores Externos de um Reator PWR usando a Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.

- [8] CRUMP, M. W., LEE, J. C., "Calculation of Spatial Weighting Functions for Ex-Core Neutron Detectors", *Nuclear Technology*, v. 41, pp. 87-96, 1978.
- [9] TOCHIHARA, H., OCHIAI, E., HASEGAWA, T., "Reevaluation of Spatial Weighting Factors for Ex-Core Neutron Detectors", *Nuclear Technology*, v. 58, pp. 310-317, 1982.
- [10] TSUJI, M., SUZUKI, N., SHIMAZU, Y., "Subcriticality Measurement by Neutron Source Multiplication Method with a Fundamental Mode Extraction", *Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 40, pp. 158-169, 2003.
- [11] PEREIRA, V., MARTINEZ, A. S., DA SILVA, F. C., "Influence of the external neutron sources in the criticality prediction using 1/M curve", *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, pp. 1875-1888, 2005.
- [12] KINARD, M., ALLEN, E. J., "Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics", *Annals of Nuclear Energy*, v. 31, pp. 1039-1051, 2004.
- [13] CHAO, Y., ATTARD, A., "A Resolution of the Stiffness Problem of reactor Kinetics", *Nuclear Science and Engineering*, v. 90, pp. 40-46, 1985.
- [14] SÁNCHEZ, J., "On the Numerical Solution of the Point Reactor Kinetics Equations by Generalized Runge-Kutta Methods", *Nuclear Science and Engineering*, v. 103, pp. 94-99, 1989.
- [15] AKCASU, Z., LELLOUCHE, G. S., SHOTKIN, L. M., *Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics*, 1 ed. Academic Press, New York and London, 1971.

- [16] KOBAYASHI, K., "A rigorous weight function for neutron kinetics equations of the quasi-static method for subcritical Systems", *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, pp. 763-776, 2005.
- [17] DE LIMA, Z. R., DA SILVA, F. C., ALVIM, A. C. M., "Use of pseudo-harmonics method coupled with finite differences coarse mesh in the solution of fixed source problems", *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, pp. 1366-1376, 2005.
- [18] GANDINI, A., "HGPT based sensitivity time-dependent methods for the analysis of subcritical systems", *Annals of Nuclear Energy*, v. 28, pp. 1193-1217, 2001.
- [19] CARO, R., *Fisica de Reactores Nucleares*. 1 ed. Madrid, Seccion de Publicaciones de la J.E.N, 1976.