



SIMPLIFICAÇÃO VIA GPT DE DIAGRAMAS DE TRANSIÇÃO DE ESTADO EM
ANÁLISES MARKOVIANAS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS SOB
ENVELHECIMENTO

Rosemberg Carlos Vicente

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo
Fernando Carvalho da Silva

Rio de Janeiro
Dezembro de 2013

SIMPLIFICAÇÃO VIA GPT DE DIAGRAMAS DE TRANSIÇÃO DE ESTADO EM
ANÁLISES MARKOVIANAS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS SOB
ENVELHECIMENTO

Rosemberg Carlos Vicente

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo, D.Sc

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Antônio Carlos Marques Alvim, Ph.D.

Dr. Pedro Luiz da Cruz Saldanha, D.Sc.

Prof. Enrique Andrés López Droguett, Ph.D.

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2013

Vicente, Rosemberg Carlos

Simplificação Via GPT de Diagramas de Transição de Estado em Análises Markovianas de Confiabilidade de Sistemas Sob Envelhecimento /Rosemberg Carlos Vicente. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XIII, 134 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e
Melo

Fernando Carvalho da Silva

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 53-57.

1. Processo Markoviano e Não-Markoviano. 2. Envelhecimento. 3. Variáveis suplementares. 4. Teoria de Perturbação Generalizada (GPT). 5. Redução de Diagramas de Transição. I. Melo, Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

*“Não percas a tua fé entre sombras do mundo.
Ainda que os teus pés estejam sangrando, segue para a frente, erguendo-a por luz
celeste, acima de ti mesmo.
Crê e trabalha.
Esforça-te no bem e espera com paciência.
Tudo passa e tudo se renova na terra, mas o que vem do céu permanecerá.
De todos os infelizes, os mais desditosos são os que perderam a confiança em Deus e
em si mesmos, porque o maior infortúnio é sofrer a provação da fé e prosseguir
vivendo.
Eleva, pois, o teu olhar e caminha.
Luta e serve. Aprende e adianta-te.
Brilha a alvorada além da noite.
Hoje, é possível que a tempestade te amarfanhe o coração e te atormente o ideal,
aguilhoando-te com aflição ou ameaçando-te com a morte...
Não te esqueças, porém, de que amanhã será outro dia.*

Meimei

(Página recebida por Francisco Cândido Xavier)

AGRADECIMENTOS

A tarefa de produzir a tese de doutorado é extremamente mais simples se comparada à de formular os agradecimentos. Por mais que se esforce, o autor, ou é econômico nos agradecimentos, em alguns casos, ou não consegue encerrar a lista de agradecimentos sem esquecer pessoas importantes para a finalização do trabalho.

Neste caso não poderia ser diferente. Aos que eventualmente não tiverem seus nomes relacionados, minhas desculpas antecipadas, porém tenham a certeza de que sou eternamente grato pelo vosso apoio e ajuda.

Ao Professor Dr. Fernando Carvalho da Silva, que nos momentos de grandes dúvidas soube conduzir e elucidar problemas que pareciam não ter solução, principalmente na parte computacional.

Ao Professor Dr. Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo, pela grande dedicação e paciência em ler e reler as versões preliminares deste trabalho.

A todos os funcionários e Amigos do mestrado que sempre foram comigo solícitos.

Aos funcionários e amigos da Biblioteca Central, pela destreza e atendimentos competentes.

Ao meu pai Noel João Vicente e à minha mãe Maria Carlos Vicente que encontra-se no Senhor Jesus, que sempre me apoiaram e acreditaram em mim e também à minha irmã Ana Paula Carlos Vicente, que sempre me ajudou nos momentos de grande tormenta e minha amada esposa Maria Angélica Freire de Carvalho que sempre chama minha atenção e me auxilia nas dificuldades acadêmicas.

Em especial agradeço ao Deus todo-poderoso por mais essa conquista alcançada em minha vida.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SIMPLIFICAÇÃO VIA GPT DE DIAGRAMAS DE TRANSIÇÃO DE ESTADO EM
ANÁLISES MARKOVIANAS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS SOB
ENVELHECIMENTO

Rosemberg Carlos Vicente

Dezembro/2013

Orientadores: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo
Fernando Carvalho da Silva

Programa: Engenharia Nuclear

Este trabalho apresenta uma proposta para a simplificação de diagrama de transição de estados em análises markovianas de confiabilidade para grandes sistemas e posterior cálculo da sua indisponibilidade média, considerando que pelo menos um dos componentes esteja envelhecendo.

São apresentadas para contornar a perda da propriedade markoviana: o método dos estágios e o método das variáveis suplementares. O método escolhido foi o das variáveis suplementares, pois apresenta a grande vantagem de uma solução padrão, necessitando apenas da atualização das equações do sistema e condição inicial. As taxas de falha serão modeladas pela distribuição de Weibull de dois parâmetros.

Um dos critérios adotado para o estudo de corte é a derivada da quantidade integral em relação aos elementos não nulos da matriz de transição de estados. Para tanto, estas derivadas são obtidas através da teoria de perturbação generalizada (GPT) que faz uso extensivo do princípio da conservação da importância.

O corte proposto usando o formalismo da GPT pode ser considerado uma boa aproximação do diagrama original para cálculo da indisponibilidade média do sistema, pois o resultado da métrica foi equivalente, considerando o erro desprezível.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SIMPLIFICATION OF TRANSITION STATE DIAGRAMS VIA GPT IN THE
RELIABILITY ANALYSIS OF AGING SYSTEMS BY MARKOV PROCESSES

Rosemberg Carlos Vicente

December/2013

Advisor: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo

Fernando Carvalho da Silva

Department: Nuclear Engineering

This work presents a proposal to simplify the state transition diagram in Markovian reliability analyses for large systems and subsequent calculation of their average unavailability, considering that at least one component is aging.

Two proposals are presented to circumvent the loss of the Markovian property: the method of stages and the method of supplementary variables. The method chosen was the latter because it presents the advantage of a standard solution, requiring only the updating of system equations and initial condition for a new case. Failure rates will be modeled by the two parameter Weibull distribution.

One of the criteria used for simplifying state transition diagrams is the derivative of the integral quantity in non-null elements of the state transition matrix. To do so, these derivatives are obtained by the generalized perturbation theory (GPT) that makes extensive use of the principle of conservation importance.

The simplification proposed using the GPT formalism can be considered an good approximation of the original diagram to calculate the mean system unavailability, considering the result negligible.

ÍNDICE DO TEXTO

ÍNDICES DE FIGURAS	X
ÍNDICE DE TABELAS	XI
GLOSSÁRIO	XII
LISTA DE SÍMBOLOS	XIII
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Revisão bibliográfica	4
1.3 Objetivo e motivação	6
1.4 Estrutura da tese	6
2 – TRATAMENTO DE SISTEMAS COM ENVELHECIMENTO DE COMPONENTES	8
2.1 Processos estocásticos	8
2.2 Cadeias de Markov de tempo contínuo	9
2.3 Equações de Chapman-kolmogorov	10
2.4 Perda da propriedade Markoviana	10
2.5 O método dos estágios	14
2.6 O método das variáveis suplementares	17
3 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM AS DENSIDADES DE PROBABILIDADES	23
3.1 Introdução	23
3.1.1 Consistência	24
3.1.2 Estabilidade	24
3.1.3 Convergência	25
3.2 Discretização das equações do sistema	25
3.3 Cálculo das probabilidades	29

4 – APLICAÇÃO DA GPT PARA A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DAS TRANSIÇÕES DE ESTADO	31
4.1 Introdução	31
4.2 Cálculo da indisponibilidade média	31
4.3 Sistema de equações da função importância	33
5 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM AS FUNÇÕES IMPORTÂNCIA	35
5.1 Introdução	35
5.2 Discretização das equações da função importância	35
6 – ANÁLISE PARA SIMPLIFICAÇÃO DO DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS	37
6.1 Introdução	37
6.2 As derivadas do estudo de corte	37
7 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	40
7.1 Introdução	40
7.2 Critério de corte	40
7.3 Estudo de cortes passo a passo	41
7. 4 Diagrama simplificado	47
8 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	50
REFÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
APÊNDICE A	58
APÊNDICE B	63
APÊNDICE C	69
APÊNDICE D	75
APÊNDICE E	84

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1 – Diagrama de bloco	11
Fig. 2 – Diagrama de transição de estados: sistema com quatro (4) componentes e uma (1) equipe de reparo, considerando o componente B com taxa de falha sendo modelada pela Weibull	13
Fig. 3 – Diagrama de transição de estado, utilizando a combinação dos estágios em série para representar os tempos de reparo e a taxa de transição (ρ) constante	15
Fig. 4 – Diagrama de transição de estados para uma combinação de dois estágios em paralelo, onde 1 é o estado operando e E_1 e E_2 os dois estados em série que representam o estado falho	16
Fig. 5 – Diagrama de transição de estado, para combinação de estágios em série e em paralelo, onde a_1 e a_2 são os números de estágios que estão em série	16
Fig. 6 – Diagrama para um equipamento com dois estados	17
Fig. 7 – Região contínua e discretizada	23
Fig. 17 – O corte proposto com base no formalismo da GPT.	47
Fig. 8 – Estudo de corte estado 6.	75
Fig. 9 – Estudo de corte estado 7.	76
Fig. 10 – Estudo de corte estado 8.	77
Fig. 11 – Estudo de corte estado 9.	78
Fig. 12 – Estudo de corte estado 10.	79
Fig. 13 – Estudo de corte estado 11.	80
Fig. 14 – Estudo de corte estado 12.	81
Fig. 15 – Estudo de corte estado 13.	82
Fig. 16 – Estudo de corte estado 14.	83

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Valores das taxas de falha e de reparos típicos e considerando a situação em que o componente B está envelhecendo	11
Tabela 2 – Resultados para o cálculo direto com 25 estados	40
Tabela 3 – Resultados para o cálculo simplificado com 13 estados	49

GLOSSÁRIO

PWR – Pressurized Water Reactor

BWR – Boiling Water Reactor

AIEA – International Atomic Energy Agency

WNA – World Nuclear Association

EBR – Experimental Breeder Reactor

NRC – Nuclear Regulatory Commission

EDP – Equação Diferencial Parcial

EDF – Equação de Diferença Finita

FDP – Função de Densidade de Probabilidade

LISTA DE SÍMBOLOS

N	–	Número de equações diferenciais parciais
I	–	Número de total de equações
x_{\max}	–	Tempo calendário
T	–	Tempo de missão
t		Tempo
x	–	Variável suplementar
β	–	Parâmetro de forma
δ	–	Parâmetro de escala
λ	–	Taxa de fala constante
μ	–	Taxa de reparo constante
$\lambda(x)$	–	Taxa de fala dependente do tempo
$f(x)$	–	Função densidade de probabilidade
Q	–	Quantidade integral
ρ_{ij}	–	Taxa de transição do estado (i) para o estado (j)
S_i	–	Estado do sistema
Δt	–	Intervalo de tempo infinitesimal
$P_i(t)$	–	Probabilidade de estar no estado (i) no instante t
$p_i(x,t)$	–	Densidade de probabilidade do estado (i)
H		Matriz de transição de estados
H^*		Matriz adjunta

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Um estudo recente feito pela Eletrobrás Termonuclear intitulado Panorama da Energia Nuclear no Mundo, edição de novembro de 2013, registrou a existência de 435 reatores comerciais operacionais ou operacionais desligados em 30 países, onde vive 2/3 da população mundial. Entre os maiores parques geradores, destacam-se os Estados Unidos com 100 unidades (67 são PWRs e 33 são BWRs), França com 58 reatores e o Japão com 50. Destes 435 reatores em operação 62% são reatores a água pressurizada (PWR), o mesmo modelo de Angra 1 e 2, e aproximadamente 19% são reatores a água fervente (BWR), outros 19% empregam tecnologias que estão se tornando obsoletas e sumirão da matriz nuclear mundial na medida que estas usinas chegarem ao final da vida útil (ELETRONUCLEAR, 2013).

Até setembro de 2013, segundo a Agência Internacional de Energia Atômica (AIEA), 82,7% dos reatores 359 em operação no mundo tinham mais de 20 anos de atividade; destes, 183 unidades tinham entre 20 e 30 anos e 176 mais de 30 anos de atividade. Os reatores que operaram mais de trinta anos terão que ser substituídos por outros novos ou por outra fonte de geração. Parte da solução é ampliar a vida útil das usinas existentes, evidentemente que a extensão da vida deve atender a critérios muito rigorosos, principalmente com relação a questões de segurança, ambientais e econômicos. Segundo a World Nuclear Association (WNA) até 2030, 143 reatores devem ser fechados por término da vida útil qualificada (ELETRONUCLEAR, 2013).

O modelo de reator PWR é o mais utilizado na indústria nuclear mundial, pois esta tecnologia permite contar com circuitos independentes, gerador de vapor e equipamentos que contêm uma quantidade significativa de água permitindo que o resfriamento do reator ocorra por circulação natural até o restabelecimento de energia, sem a necessidade da utilização de bombas acionadas por eletricidade. Assim, é certo que esses fatores contribuem para o sucesso desse modelo, em contrapartida ao reator

correspondente a uma usina BWR na qual existe um circuito único, sem geradores de vapor (ELETRONUCLEAR, 2013).

O uso experimental dos reatores nucleares para produção de energia elétrica teve início em 1951 com o reator EBR-1 (Experimental Breeder Reactor, refrigerado a NaK), construído pelo Laboratório Nacional de Argonne da Universidade de Chicago e descomissionado em 1963, o qual sempre forneceu energia elétrica para o seu próprio prédio. Em menos de 20 anos muitos avanços e melhorias tecnológicas foram alcançados e, conseqüentemente, seu tamanho e potência foram aumentados. Todos os reatores deste período são chamados de reatores de 1ª geração e no final da década de 1960 e início da década 1970, tem início a 2ª geração de reatores nucleares em escala comercial, pois a viabilidade comercial e dificuldade iniciais já haviam sido superadas.

Muitas usinas nucleares, tanto nos Estados Unidos, quanto em outras partes do mundo, no Brasil com Angra 1, por exemplo, pertencentes à 2ª geração, estão em operação comercial e, principalmente nos Estados Unidos, estão muito próximas de atingirem o período de vida útil ou até mesmo já o atingiram.

A usina nuclear de Angra 1, em 2013, completou 29 anos de operação comercial, com muitas melhorias de projeto, atualizações de procedimentos e troca de equipamentos importantes como, por exemplo, os geradores de vapor. O período de vida útil estipulado para as usinas nucleares americanas é de 40 anos e o pedido de extensão de vida útil por mais 20 anos deve atender a todas as exigências ambientais, das agências reguladoras e econômicas.

A usina nuclear de Angra 2, de projeto alemão, é um avanço em relação ao modelo americano, tanto tecnológico quanto em relação à segurança e seu período de vida útil também é estipulado em 40 anos.

A Comissão Reguladora Nuclear Norte-americana (NRC) emitiu em dezembro de 1991 regras e documentação associadas que descrevem como o licenciado deve estar capacitado a demonstrar que a unidade pode continuar operando por 20 anos adicionais após a expiração dos 40 anos de licença. Essas regras foram estabelecidas no 10CFR51 (1991), requisitos de proteção ambiental, e 10CFR54 (1995), requisitos técnicos, sendo denominada renovação de licença.

Na busca por compreender o fenômeno de envelhecimento a Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA) patrocinou diversos programas e projetos relacionados ao envelhecimento de usinas nucleares, enfocando o gerenciamento do envelhecimento em longo prazo, confiabilidade e aspectos econômicos da extensão da

vida licenciada das usinas nucleares. Os resultados destes programas estão expressos em uma série de documentos técnicos. Destacamos, entre estes, SS-50-P-3 (1992), TRT-Nº338 (1992) e SS-Nº4 (1999) que representam, respectivamente, uma metodologia para o gerenciamento do envelhecimento, um guia para a coleta de dados operacionais e de manutenção para o gerenciamento e avaliação de mecanismos de envelhecimento.

No Brasil, a Usina Nuclear de Angra 1, completa, em 2013, 29 anos de licença de operação. A usina de fabricação Westinghouse, teve seu licenciamento regido pela norma CNEN (1984) e baseado no modelo NRC (guias reguladores de revisão padronizados), o tempo de 40 anos foi considerado como base para 1984, sendo prevista a cada 10 anos uma revisão de autorização para ratificar ou retificar seus termos. Este procedimento garante uma periodicidade da revisão da avaliação de segurança mantendo as bases do licenciamento no seguimento da norma CNEN (1984).

O estudo de extensão da vida qualificada possui dois componentes, uma determinística e a outra probabilística e uma complementa a outra. A avaliação com base nos métodos determinísticos define a diferença entre o estado atual do item e o estado na fase de qualificação, porém, não define a probabilidade de ele continuar exercendo a sua função adequadamente por um período além do definido pela sua vida qualificada.

Não existe no Brasil uma formalização dos aspectos relacionados à extensão da licença de operação para além dos 40 anos. Na verdade, no Brasil segue-se a legislação do país de origem do projeto do reator. Contudo, a Autorização Provisória de Operação (AOP) estabelece diversos programas que buscam uma atualização do Projeto de Angra 1, em relação à tendência internacional, em destaque: Programa de Proteção Contra Incêndio, Programa de Qualificação Ambiental de Equipamentos Elétricos, Programa de Eficiência da Manutenção e Programa de Revisão das Especificações Técnicas (SALDANHA, 2003).

1.2 Revisão bibliográfica

NUNES (1994) discute a aplicação do Método dos Estágios à análise da indisponibilidade de um canal de proteção, objetivando tratar um problema prático, em que os tempos de reparos do canal seguem uma distribuição não-exponencial.

PINHO (2000) discute o Método das Variáveis Suplementares para o cálculo da indisponibilidade de equipamentos sujeitos ao envelhecimento utilizando a hipótese simplificadora de reparo perfeito. Neste estudo a modelagem do problema foi através de sistemas de equações diferenciais parciais ordinárias de primeira ordem, obtém-se um teorema da existência e unicidade para o caso de um equipamento sujeito a envelhecimento com 2 estados, operando e falho.

OLIVEIRA (2001) apresentou o desenvolvimento de um método de análise da confiabilidade de sistemas sob envelhecimento e sob reparo mínimo, utilizando o Método das Variáveis Suplementares e Inversão de Laplace para reduzir o número de equações a serem resolvidas por técnicas numericamente aproximadas, utilizando o método de Integração de Gauss-Legendre, o qual, devido à sua alta velocidade computacional, executa muito rapidamente o tratamento da variável tempo.

LINS (2003) apresentou duas metodologias para o cálculo da confiabilidade de sistemas sob envelhecimento cujos modelos foram otimizados por algoritmos genéticos, baseadas na utilização do Método dos Estágios, o qual, permite transformar sistemas não-markovianos em sistemas markovianos equivalentes. Vários testes foram realizados com diferentes distribuições de probabilidades para diferentes sistemas e os resultados obtidos com a utilização das metodologias propostas foram comparados com resultados obtidos por outras metodologias.

SALDANHA (2003) aborda a aplicação de processos pontuais modulados à avaliação do envelhecimento. Os processos modulados servem para descrever os tempos de falhas para um sistema reparável, implicando em que o sistema esteja, depois do reparo, exatamente como estava antes da falha, permitindo que o sistema seja afetado tanto pela falha como pelo reparo, sendo desta maneira, adequado para avaliar eventos que incorporem tendências no tempo ou que possuam características do processo de renovação.

OLIVEIRA (2005) fez uma análise da confiabilidade do Sistema de Água de Alimentação Auxiliar (SAAA) da Central Nuclear de Angra 1, considerando o envelhecimento do mesmo e utilizando as hipóteses de reparo mínimo ou tão ruim

quanto velho (*as bad as old*) e reparo perfeito ou tão bom quanto novo (*as good as new*), utilizando dois métodos para a modelagem de sistemas sob envelhecimento, os quais são: o Método dos Estágios e o Método das Variáveis Suplementares, empregados na transformação de sistemas não-markovianos em sistemas markovianos. Os resultados obtidos através da utilização dos dois métodos foram comparados, aplicando-se uma taxa de falha média para a representação do período de envelhecimento.

CROSSETTI (2006) aplicou as metodologias desenvolvidas por LINS (2003), realizando o cálculo da confiabilidade do Sistema Elétrico da Central Nuclear de Angra 1, considerando o envelhecimento do sistema.

OLIVEIRA (2007) faz uma análise da confiabilidade dos geradores diesel de emergência de uma Central Nuclear PWR de quatro loops, considerando-se hipótese de envelhecimento e de reparo perfeito, pela utilização do método das variáveis suplementares. Os resultados desta análise possibilitam considerar estratégias de manutenção distintas e otimizadas, visando uma melhor avaliação na aceitação dessas estratégias para uma eventual extensão da vida útil desses equipamentos.

FERRO *et al* (2012) apresenta um modelo que pode ser implantado em um computador pessoal, que permite a análise de sistemas de segurança de usinas nucleares, partindo de uma diagrama de transição, tipicamente empregado em análises markoviana de confiabilidade. Devido à necessidade de se considerar a extensão da vida qualificada do equipamento, o modelo markoviano não se aplica. Para transpor tal dificuldade, o modelo se transforma em markoviano a partir da utilização de variáveis suplementares. O autor sugere alterações na metodologia da regra de manutenção, com a inserção de parâmetros de confiabilidade a serem comparados com os critérios de desempenho estabelecidos.

1.3 Objetivo e motivação

Esta tese é a continuação de uma dissertação de mestrado (VICENTE, 2004), onde foi proposta uma metodologia de estudo de corte mais objetiva de operacionalização comparada à apresentada por TAKARAGI *et al* (1985) e (GANDINI, 1989), e no diagrama resultante do estudo de corte, fazemos o estudo de confiabilidade. Para tanto, foi considerado que no período de vida útil a taxa de falha seja estacionária o que está intimamente relacionada com processo markoviano homogêneo.

Objetivando realizar o estudo de confiabilidade de modo mais fidedigno, trabalharemos na mesma linha que os autores trataram a modelagem de um sistema não-markoviano por markoviano equivalente e a motivação do estudo está na ampliação do conhecimento teórico e a aplicação deste conhecimento em uma situação prática.

1.4 Estrutura da tese

No Capítulo 2 será apresentado o tratamento de sistemas com envelhecimento de componentes, processos estocásticos e alternativas para contornar a perda da propriedade markoviana, por exemplo, o métodos estágios e o método das variáveis suplementares.

No Capítulo 3, apresentamos o procedimento para discretização da malha e para solução das equações que governam as densidades de probabilidades, onde será utilizado o método das diferenças finitas.

No Capítulo 4, apresenta o cálculo da indisponibilidade média do sistema em função do vetor importância e do vetor fonte. Para tanto, apresentamos o sistema de equações que governam a função importância em sua escrita geral.

No Capítulo 5 será apresentado o procedimento utilizado para a discretização das equações que governam as funções importância, que será análogo ao utilizado para as equações que governam as probabilidades.

No Capítulo 6 será apresentado o desenvolvimento para obtenção das derivadas do estudo de corte, considerando que pelo menos um componente esteja envelhecendo.

Capítulo 7, apresentamos os dados utilizados para os cálculos, o critério utilizado para o estudo de corte e os resultados das derivadas dos respectivos elementos de transição;

Capítulo 8 apresenta as conclusões da pesquisa e recomendações para estudos futuros.

CAPÍTULO 2

TRATAMENTO DE SISTEMAS COM ENVELHECIMENTO DE COMPONENTES

2.1 Processos estocásticos

Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas $X(t)$ indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T dos inteiros positivos (lembramos que outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e $X(t)$ representa uma característica mensurável de interesse em t . O índice t não necessariamente é o tempo.

Processos estocásticos são de interesse para descrever o comportamento de um sistema operando em um período de tempo, no nosso caso definido como período de missão. Com isso, em termos formais, a variável randômica $X(t)$ representa o estado do sistema no tempo t . Portanto, pode-se afirmar que $X(t)$ é definido em um espaço denominado espaço de estados (ROSS; 2007).

Podemos classificar os processos estocásticos em relação à natureza do espaço de estados e do espaço de parâmetros. As possíveis combinações são:

a) Em relação ao estado.

- i)* Estado discreto: $X(t)$ é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
- ii)* Estado contínuo: $X(t)$ representa uma função.

b) Em relação ao tempo.

- i)* Tempo discreto: “ t ” é finito ou enumerável.
- ii)* Tempo contínuo: “ t ” pertence a um intervalo.

Lembramos que existem vários tipos de processos estocásticos, porém nesta tese abordaremos apenas um, denominado processo de Markov de tempo contínuo.

2.2 Cadeias de Markov de tempo contínuo

Consideremos um processo estocástico $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ com tempo contínuo e espaço de estados discretos $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, onde n é o número de estados. Consideremos também que o estado do processo no instante v é $X(v) = i$. A probabilidade condicional de que o processo estará no estado j no instante t é:

$$P(X(t) = j | X(v) = i, X(u) = x(u)) \quad (2.1)$$

onde $0 \leq u < v < t$ e $\{x(u), 0 \leq u < v\}$ representa a trajetória percorrida pelo processo até, mas não incluindo, o instante v . O processo é chamado de cadeia de Markov de tempo contínuo se satisfaz a propriedade markoviana. Então, podemos escrever da seguinte forma:

$$P(X(t) = j | X(v) = i) \quad (2.2)$$

A propriedade markoviana está relacionada com a falta de registro ou memória do processo, significando que a probabilidade do estado futuro só depende do estado atual do sistema. Para um processo ser markoviano, esta hipótese deve valer para todo instante de tempo e a cadeia é chamada de homogênea no tempo (ROSS; 2007).

$$P(X(t) = j | X(v) = i) = P_{ij} \quad (2.3)$$

Ao sair do estado i , o processo vai para um estado j com uma probabilidade P_{ij} , em que P_{ij} , satisfazem as condições:

i) $P_{ii} = 0$, para todo i ;

ii) $\sum_j^n P_{ij} = 1$, para todo i .

Na cadeia de Markov de tempo contínuo as intensidades de transição são definidas da seguinte forma (ROSS; 2007).

$$q_i = -\frac{d}{dt} P_{ii}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} \quad (2.4)$$

onde q_i é a taxa de transição de saída do estado i , ou seja, é o número de vezes esperado que o processo deixa o estado i por unidade tempo.

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_i P_{ij} \quad (2.5)$$

onde q_{ij} é a taxa de transição do estado i para o estado j , representando o número esperado de vezes que o processo transita do estado i para o estado j por unidade de tempo.

2.3. Equações de Chapman-Kolmogorov

As probabilidades de transição de um processo de Markov satisfazem a equação de Chapman-Kolmogorov, para todo i, j pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos.

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^n P_{ik}(t)P_{kj}(h) \quad (2.6)$$

para $t, h \geq 0$.

A partir da Eq.(2.6), ROSS (2007) faz um desenvolvimento algébrico e obtém as equações diferenciais prospectivas a seguir:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - q_j P_{ij}(t) \quad (2.7)$$

onde q_{kj} é a taxa de transição do estado k para o estado j e q_j é taxa de transição de saída do estado j para outros estados. Esta última equação será muito importante na solução das equações que trata esta tese.

2.4 Perda da propriedade markoviana

VICENTE *et al.* (2014), propõem um método de simplificação de diagramas de transição de estados para grandes sistemas, fazendo uso do princípio de conservação de importância e da relação de reciprocidade de fontes da teoria de perturbação generalizada e compara se o diagrama simplificado é uma boa aproximação do diagrama original, caso seja, o estudo de confiabilidade será feito neste diagrama simplificado. Neste estudo foi considerado a taxa de falha constante para todos os componentes e o modelo markoviano se aplica. Ampliando a perspectiva de emprego da método, esta tese objetiva calcular a indisponibilidade média do sistema levando em consideração uma situação mais real, o envelhecimento do componente ao longo do tempo, isto significa que a taxa de falha é crescente no tempo. Sendo assim, não é mais possível usar o modelo exponencial para

modelar os tempos de falha, pois o modelo markoviano homogêneo não se aplica mais nessa situação.

Será considerada a hipótese de que pelos menos um componente possui taxa de falha crescente no tempo. Uma situação possível de análise é o componente *B* cuja taxa de falha é λ_2 ser crescente no tempo e uma boa modelagem será a distribuição de Weibull por razões já mencionadas anteriormente.

As características gerais do sistema são as mesmas utilizadas por VICENTE *et al.* (2014):

- i) O sistema apresenta 4 (quatro) componentes/bombas;
- ii) Temos um sistema em série com 2 (dois) componentes/bombas e um sistema em paralelo com 2 (dois) componentes/bombas, sendo que o sistema em série se comunica com o sistema em paralelo;
- iii) O sistema possui uma equipe de reparo;
- iv) As taxas de falha dos componentes são menores que as suas taxas de reparo;
- v) A e B têm prioridades de reparo maiores que C e D;
- vi) Entre os componentes A e B e C e D, a estratégia de reparo adotada é o primeiro a entrar é o primeiro a sair (*first in, first out*).

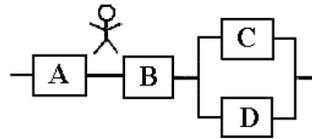


Figura 1: Diagrama de bloco

Na Tab. 1 apresentamos os valores das taxas de falha e reparo que serão utilizados nesta tese, que são os mesmos utilizados por VICENTE *et al.* (2014), com exceção do componente *B* que possui taxa de falha crescente no tempo.

Tabela 1: Valores das taxas de falha e de reparos típicos e considerando a situação em que componente *B* está envelhecendo

Componentes	Taxa de Falha (/hr)	Taxa de reparo (/hr)
A	$\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-5}$	$\mu_1 = 1,0 \times 10^{-2}$
B	$\lambda(x) = \frac{\beta}{\delta} \times \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1}$	$\mu_2 = 2,0 \times 10^{-2}$
C	$\lambda_3 = 1,0 \times 10^{-4}$	$\mu_3 = 1,0 \times 10^{-2}$
D	$\lambda_4 = 5,0 \times 10^{-4}$	$\mu_4 = 2,0 \times 10^{-3}$

Considerando agora que a taxa de falha será função do tempo de missão (x), onde (β) é o parâmetro de forma e (δ) é o parâmetro de escala. As transições de estados são as mesmas usadas por VICENTE *et al.* (2014), A Fig. 2 apresenta o diagrama de transição de estados na nova condição.

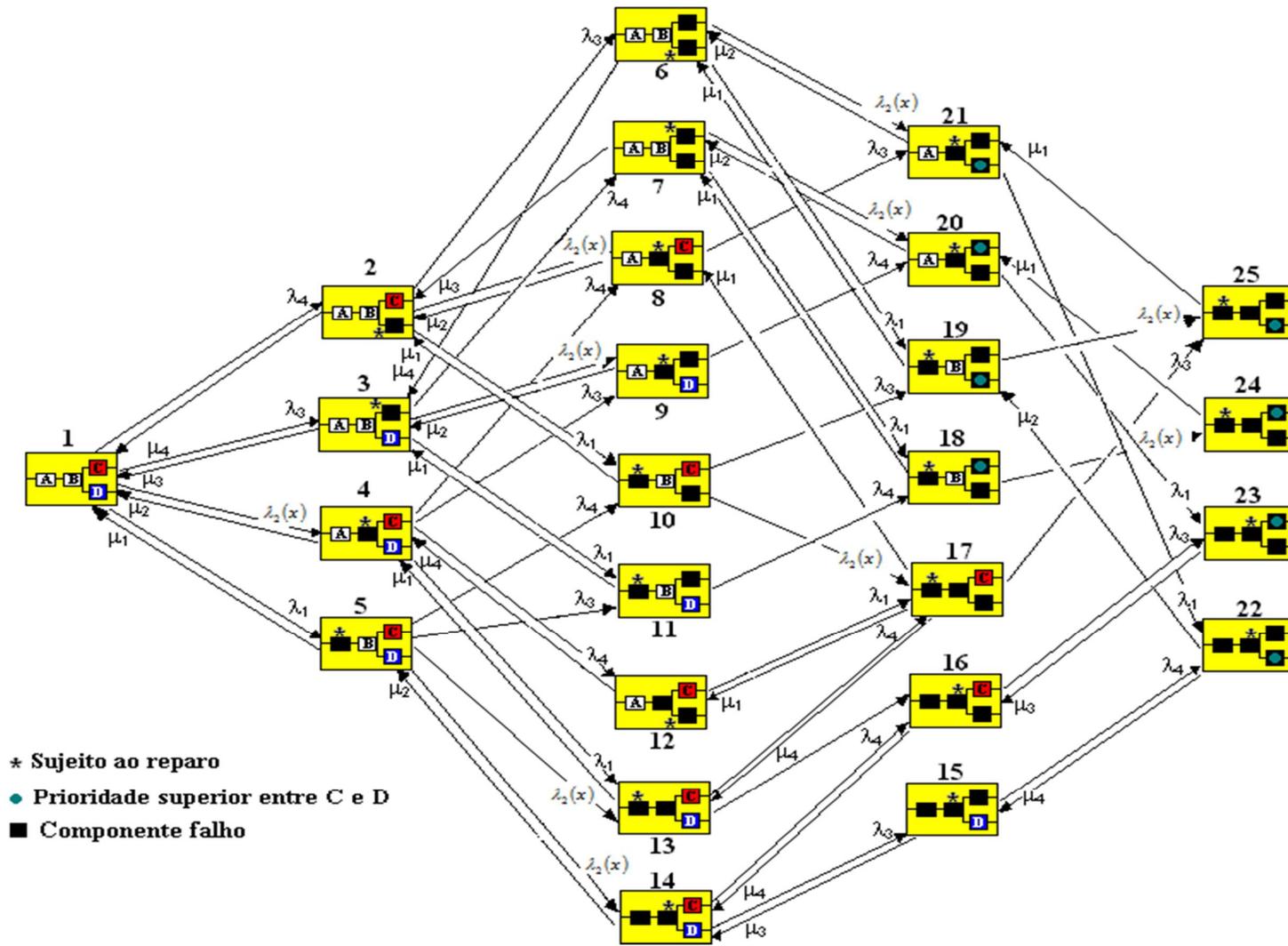


Figura 2: Diagrama de Transição de Estados: Sistema com quatro (4) componentes e uma (1) equipe de reparo, considerando o componente *B* com taxa de falha sendo modelada pela Weibull

A solução do problema acima mencionado pode ser obtida através de dois métodos: o método dos estágios e o das variáveis suplementares, COX e MILLER (1965), COX e SMITH (1961) e SINGH e BILLINTON (1977).

Aqui foi usado o método das variáveis suplementares, pois possui uma regra para modelagem de sistemas, sendo necessário apenas mudar as condições de contorno, condições iniciais e o modelo para distribuição para tempos de falha para condição inicial, o qual será a distribuição de Weibull de dois parâmetros.

A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull, já que obteremos a distribuição da exponencial se fizermos o parâmetro de forma igual a 1. Se se o parâmetro de forma for igual a 2 a distribuição será linear e caso o parâmetro de forma for igual a 3 a distribuição de probabilidade para os tempos de falha será quadrática, etc. Também, empregando uma distribuição de Weibull, poderemos obter tanto uma taxa de falha crescente como uma decrescente, pela simples escolha apropriada do parâmetro de forma MEYER (1983).

Uma outra característica da distribuição de Weibull está relacionada às boas aproximações para taxas de falhas de outras distribuições pela escolha apropriada dos parâmetros de escala e forma.

Apresentaremos de modo resumido a seguir, a ideia básica do método dos estágios e de modo mais desenvolvido o método das variáveis suplementares, pois nos interessará mais no desenrolar do estudo em realização.

2.5 O método dos estágios

O método dos estágios baseia-se no fato de que se dois ou mais estágios exponencialmente distribuídos forem combinados, o estado resultante não será exponencialmente distribuído. Neste caso, o processo reverso também é válido, isto é, se um estado não é exponencialmente distribuído, então poderá ser dividido em sub-estados (estágios), onde o tempo de permanência em cada sub-estado seja exponencialmente distribuído, BILLINTON e ALLAN (1983). A distribuição resultante dependerá do número de estados inicialmente combinados, e se eles estão ou não em série, em paralelo ou série/paralelo.

O método dos estágios divide um estado do sistema em sub-estados, onde cada sub-estado é definido como um estágio. Portanto este método representa um estado que não é exponencialmente distribuído por uma combinação de estágios, onde cada estágio

é exponencialmente distribuído. Com este procedimento, podemos representa um modelo não-markoviano por um markoviano equivalente NUNES (1995).

Este método segue as seguintes etapas:

- i)* estabelecer os estágios,
- ii)* obter as funções densidades; manutenibilidade e taxa de transição (falha ou reparo);
- iii)* avaliar os momentos associados com a combinação de estágios;
- iv)* avaliar o comportamento da taxa de transição (falha ou reparo).

O objetivo é calcular um atributo de confiabilidade que é a indisponibilidade média do sistema em situações onde pelo menos um componente esteja envelhecendo. Nesta situação o processo torna-se não-markoviano, a taxa de falha é dependente do tempo e os tempos de falha não seguem uma distribuição exponencial.

A seguir, para ilustrar a ideia do procedimento, alguns exemplos de combinações possíveis são apresentados.

Na Figura 3, temos a combinação de estágios em série, a variável aleatória tempo de duração do i -ésimo estágio é contínua e temos α estágios em série. O estado 1 está operando, enquanto que o estado falho 2 é representado pela combinação de estágios em série como mostrado,

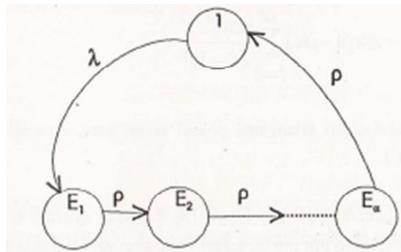


Figura 3: Diagrama de transição de estado, utilizando a combinação dos estágios em série para representar os tempos de reparo e a taxa de transição (ρ) constante

As duas principais generalizações, que consistem em uma mistura de estágios em série com estágios em paralelo, são duas combinações de estágios em paralelo (Figura 4) e combinação de estágios em série, em série com dois estágios em paralelo (Figura 5).

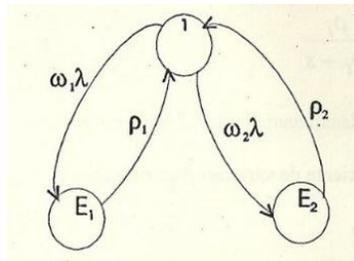


Figura 4: Diagrama de transição de estados para uma combinação de dois estágios em paralelo, onde 1 é o estado operando e E_1 e E_2 os dois estágios em série que representam o estado falho

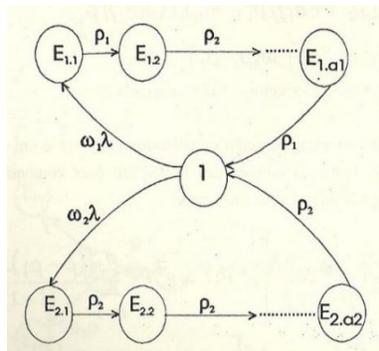


Figura 5: Diagrama de transição de estado para combinação de estágios em série e em paralelo, onde a_1 e a_2 são os números de estágios que estão em série

A desvantagem do método dos estágios está no fato que não existe uma forma padrão para esta metodologia. Cada caso será analisado individualmente e se tornará mais complexo dependendo da distribuição que se deseje aproximar (NUNES, 1995).

2.6 O Método das Variáveis Suplementares

Para uma maior compreensão do método das variáveis suplementares será usado um modelo simples de sistema reparável: o sistema de apenas um componente, que transita entre dois estados, um operando e um falho.

Como o pressuposto de que o sistema não falha nem envelhece enquanto está em reparo, a taxa de falha torna-se uma função contínua de x , sendo esta uma variável suplementar que armazena a idade operacional do componente em estudo, tanto aquela decorrente da operação em sistemas anteriores quanto o tempo que ficou no estado 0 no sistema atual. Será apresentada a modelagem matemática usando um processo markoviano. Com esse procedimento estará sendo preparada a base teórica para a aplicação do método das variáveis suplementares.

A Figura 6 representa um sistema que possui dois estados, 1 representando o sistema em situação operacional e 2 representando o sistema em situação de falha, a taxa de reparo é constante e a taxa de falha depende da idade do mesmo, então permanecer no estado 1 depende desta variável suplementar.

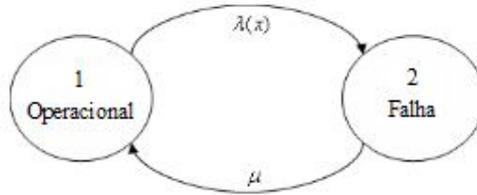


Figura 6: Diagrama para um equipamento com estados.

Considere-se um sistema que transite para n estados de um processo markoviano com tempo contínuo e S_1, S_2, \dots, S_n são os estados do sistema. Seja ρ_{ij} a taxa de transição do estado S_i para o estado S_j que será esquematicamente representado da seguinte forma:

$$S_i \xrightarrow{\rho_{ij}} S_j \quad (2.8)$$

Com essas informações pode-se calcular a probabilidade de transição do estado S_i para o estado S_j , isto no intervalo de tempo Δt :

$$P_{ij} = \rho_{ij}\Delta t \quad (2.9)$$

Se $P_i(t)$ é a probabilidade do sistema estar em S_i , no tempo t , então a probabilidade do sistema se encontrar em S_i no tempo $t + \Delta t$ pode ser calculada como a probabilidade do sistema transitar de todos os estados $j \rightarrow i$ ou o sistema não transitar do estado $i \rightarrow j$ quer dizer permanecer em i . Então, usando a equação de Chapman-Kolmogorov, podemos escrever:

$$P_i(t + \Delta t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ji}\Delta t P_j(t) + \left[1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij}\Delta t \right] P_i(t) \quad (2.10)$$

Desenvolvendo a Eq.(2.10), obtemos um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes.

i) Multiplicar $P_i(t)$ do membro direito da equação por $\left[1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij}\Delta t \right]$ e passar para o

lado esquerdo da equação $-\frac{P_i(t)}{\Delta t}$;

ii) Dividir a Eq.(2.10) por Δt e depois;

iii) Calculando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ em ambos os lados da equação, temos a definição de limite do membro esquerdo da equação.

Após estes procedimentos algébricos a Eq.(2.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_i'(t) = P_j(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ji} - P_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_{ij} \quad (2.11)$$

Este sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes representa o balanço de probabilidades, ou seja, a probabilidade de estar no

estado (i) no instante (t) é a probabilidade de transição de todos os estados (j) para o estado (i) subtraído a probabilidade de transição do estado (i) para o estado (j).

O desenvolvimento acima se aplicada na situação onde os tempos de falha são modelados pela distribuição de probabilidade exponencial, implicando em taxas de falha constante no tempo.

Considerando a situação de taxa de falha crescente o modelo markoviano não se aplica. Então, para calcular as probabilidades $P_1(t)$ e $P_2(t)$, temos que considerar a idade do componente. A probabilidade do sistema/equipamento estar funcionando no estado (1) no instante t será:

$$P_1(t) = \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx \quad (2.12)$$

onde $p_1(x, t)$ é uma função densidade probabilidade definida da seguinte forma:

$$p_1(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\text{prob(sist. estar no estado 1 no inst. t e sua idade estar entre } [t - (x + \Delta x), t])}{\Delta x} \quad (2.13)$$

Fazendo $x = 0$, temos a condição de contorno do nosso problema:

$$p_1(0, t) = \mu P_2(t) \quad (2.14)$$

A Eq.(2.14) significa que a probabilidade de estar no estado (1) só poderá ser obtida pela transição de reparo para qualquer t vinda do estado (2). Agora a probabilidade do sistema permanecer no estado (1) para $x > 0$, passado um tempo Δt , será o sistema não transitar para o estado (2) em Δt , (PINHO, 2000):

$$p_1(x + \Delta t, t + \Delta t) = p_1(x, t)(1 - \lambda(x)\Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (2.15)$$

A probabilidade de estar no estado (2) em Δt , pode ser obtida da seguinte forma: o sistema transitar do estado (1) para o estado (2) em Δt com taxa de falha $\lambda(x)$ ou não transitar para o estado (1) em Δt , ou seja, permanecer no estado (2), (PINHO, 2000):

$$P_2(t + \Delta t) = \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(x) p_1(x, t) dx + P_2(t)(1 - \mu\Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (2.16)$$

Desprezando o termo de segunda ordem da Eq.(2.15) e desenvolvendo algebricamente, obtemos:

$$p_1(x + \Delta t, t + \Delta t) = p_1(x, t) - \lambda(x)p_1(x, t)\Delta t$$

$$p_1(x + \Delta t, t + \Delta t) - p_1(x, t + \Delta t) + p_1(x, t + \Delta t) - p_1(x, t) = -\lambda(x)p_1(x, t)\Delta t$$

Dividindo ambos os lados por Δt , temos

$$\frac{p_1(x + \Delta t, t + \Delta t) - p_1(x, t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{p_1(x, t + \Delta t) - p_1(x, t)}{\Delta t} = -\lambda(x)p_1(x, t)$$

Aplicando $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ na equação, temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(x + \Delta t, t + \Delta t) - p_1(x, t + \Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(x, t + \Delta t) - p_1(x, t)}{\Delta t} = -\lambda(x)p_1(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_1(x, t) = -\lambda(x) p_1(x, t) \quad (2.17)$$

Procedendo de forma análogo em relação à Eq. (2.16), teremos:

$$P_2(t + \Delta t) = P_2(t)(1 - \mu\Delta t) + \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(x)p_1(x, t) dx$$

$$P_2(t + \Delta t) - P_2(t) = \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(x)p_1(x, t) dx - \Delta t \mu P_2(t)$$

Dividindo ambos os membros por Δt , temos

$$\frac{P_2(t + \Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} = \int_0^{\infty} \lambda(x)p_1(x, t) dx - \mu P_2(t)$$

Aplicando $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ na equação, temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_2(t + \Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} = \int_0^{\infty} \lambda(x)p_1(x, t) dx - \mu P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = \int_0^{\infty} \lambda(x)p_1(x, t) dx - \mu P_2(t) \quad (2.18)$$

Após este desenvolvimento algébrico, propomos uma regra aplicável a qualquer caso que faça uso de variáveis suplementares, que será dividida em três partes: um primeiro conjunto de equações com derivadas parciais, um segundo conjunto de equações com derivadas ordinárias e, por último, um conjunto de equações que são a condição de contorno:

1) Para o conjunto de equações diferenciais parciais, teremos o seguinte princípio: o(s) único(s) estado(s) que não terá(ão) equação(ões) diferencial(is) parcial(is) será(ão) aquele(s) onde todos os componentes estão falhos;

$$\frac{\partial}{\partial x} p_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_i(x, t) = -\sum (\text{das taxas que saem do estado}) p_i(x, t) \quad (2.19)$$

2) Para o(s) estado(s) não contemplado(s) como o princípio anterior, teremos as derivadas totais, obedecendo à regra do balanço de probabilidade;

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = \sum (\text{prob que chegam ao estado}) - \sum (\text{prob que saem do estado}) \quad (2.20)$$

3) Para as condições de contorno, utilizar $p_i(0, t)$ para todos os estado que foram contemplados com equações diferenciais parciais, aplicando o seguinte princípio: a probabilidade de estar no estado i em $(0, t)$ será dada por todas as probabilidades que chegam ao estado, e;

4) Condição inicial, usar $p_i(x, 0) = f(x)$ para o estado em que todos os componentes estão funcionando e para os demais estados $p_i(x, 0) = 0$.

Uma condição imposta é que a soma das probabilidades para qualquer instante de tempo (t) será igual a 1. Para $t=0$ temos todos os componentes do sistema operando.

A função $f(x)$ representa a função densidade de probabilidade que irá modelar os tempos de falha. Neste estudo será a distribuição de probabilidade de Weibull de dois parâmetros, pois através desta distribuição é possível obter taxas de falhas de outros modelos através de escolha adequada dos parâmetros de forma e escala.

Uma grande vantagem deste método está na padronização da técnica de solução, bastando mudar as condições iniciais e de contorno para adequação ao problema. Para obter as equações diferenciais parciais e equações diferenciais ordinárias, deve-se seguir o modelo sugerido na regra para obtenção das equações.

Segundo COX (1965) e SINGH e BILINTON (1977), o método das variáveis suplementares não apresenta dificuldades em transformar um modelo não-markoviano em um modelo markoviano. Entretanto, segundo SING e BILLINTON(1997), a desvantagem deste método é que o número de variáveis suplementares aumenta rapidamente com o número de taxas de transição dependentes do tempo, sugerindo ser adequado o método quando a quantidade de transições dependentes do tempo é reduzida.

As equações de que trata esta tese, a distribuição de probabilidade de Weibull e taxa de falha encontram-se no Apêndice A.

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM AS DENSIDADE DE PROBABILIDADES

3.1 – Introdução

Para que seja possível tratar numericamente as EDPs, elas devem ser expressas na forma de operadores aritméticos que o computador possa executar. Essencialmente, devemos representar as diferenciais da EDP por expressões algébricas, ou seja, discretizar a EDP. Então o processo de dividir o domínio em pontos é chamado de discretização e ao conjunto de pontos discretos é dado o nome de malha (FORTUNA, 2000).

Na Fig. 7 podemos observar que os pontos da malha localizam-se na interseção das linhas horizontais com as verticais, estando separados entre si por distâncias Δx e Δy , respectivamente, não necessariamente iguais. Os índices i e j identificam um ponto na i -ésima coluna e na j -ésima linha, respectivamente. Nesta tese será usada n malhas não quadradas, pois o tempo de missão e o tempo calendário que são respectivamente x e y são diferentes.

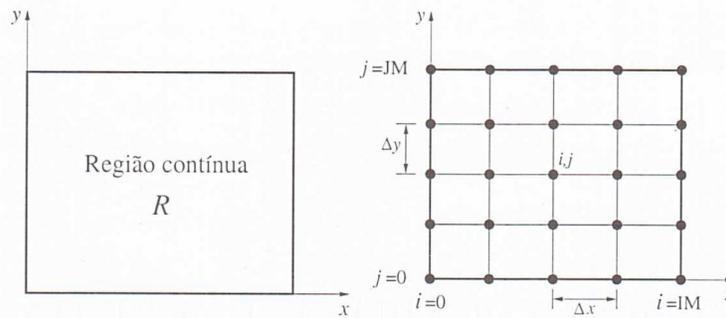


Figura 7. Região contínua e discretizada

Antes de resolvermos a EDP de forma numérica, precisamos encontrar, para os termos que nela aparecem, as respectivas expressões escritas em função dos pontos da malha. Essas expressões são denominadas de aproximações por diferenças finitas. O resultado final desse processo é um sistema de equações algébricas, denominada de

equações de diferenças finitas (EDF). A EDF é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema e a mesma será aproximada.

Outro ponto importante quando resolvemos um EDP é quando e sob que condições a solução das equações lineares é representativa da solução real da EDP. A seguir iremos ver a consistência das equações de diferenças finitas, estabilidade e convergência do método numérico empregado.

3.1.1 - Consistência

Uma característica importante de uma aproximação de diferenças finitas é que ela seja consistente com a equação parcial que ela vai discretizar, desprezando erros de arredondamento nos cálculos. Quanto menor Δx , melhor a aproximação para derivadas de uma função f , ou seja

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} |\text{EDP} - \text{EDF}| = 0 \quad (3.1)$$

3.1.2 - Estabilidade

Um método numérico estável é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados. Essa amplificação, quando presente, faz com que o módulo dos valores da solução numéricas cresça a cada etapa dos cálculos. Portanto, o conceito de estabilidade está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos. Em relação à estabilidade dos métodos numéricos, eles podem ser classificados em

- i)* Condicionalmente estáveis: para fornecerem soluções numéricas estáveis, devem satisfazer uma condição de estabilidade. Métodos explícitos, em geral, são desse tipo;
- ii)* Incondicionalmente estáveis: não necessitam satisfazer quaisquer critérios de estabilidade para produzir soluções estáveis;
- iii)* Incondicionalmente instáveis: não existem valores de Δx que permitam fornecer soluções estáveis.

3.1.3. - Convergência

A convergência é uma qualidade extremamente importante, mas, ao mesmo tempo, difícil de ser demonstrada diretamente. Em geral, é utilizada uma técnica indireta para demonstrar a convergência de um método numérico, baseado no Teorema de Equivalência de Lax: para a solução numérica de um problema linear de valor inicial bem posto, por uma discretização consistente, a estabilidade do método numérico é condição necessária e suficiente para convergência (FORTUNA, 2000). Então,

$$\text{Consistência} + \text{Estabilidade} \rightarrow \text{Convergência}$$

Será apresentado o desenvolvimento dos passos que servirão de base para o desenvolvimento dos programas em linguagem Fortran que serão utilizados neste trabalho.

3.2 – Discretização das equações do sistema

As equações tratadas nesta tese podem ser generalizadas da seguinte forma para $i = 1, \dots, N$

$$a_i \frac{\partial}{\partial x} p_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_i(x, t) = \sum_{k=1}^I H_{ik}(x) p_k(x, t) \quad (3.2)$$

mas, para alguns estados $a_i = 0$ e, neste caso, da Eq. (21) obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(t) = \sum_{k=1}^I \int_0^{\infty} H_{ik}(x) p_k(x, t) dx \quad (3.3)$$

pois, por definição

$$\int_0^{\infty} p_i(x, t) dx \equiv P_i(t) \quad (3.4)$$

para os casos em que $a_i = 1$ a função $H_{ik}(x)$ é tal que

$$H_{ik}(x) = \begin{cases} \hat{h}_i(x), & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad (3.5)$$

com este procedimento a Eq.(3.2) torna-se para $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_i(x, t) = \hat{h}_i(x) p_i(x, t) \quad (3.6)$$

além disso, a Eq.(3.3) torna-se para $i = N+1, \dots, I$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(t) = \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} h_{ik}(x) p_k(x, t) dx + \sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} P_k(t) \quad (3.7)$$

Para resolver as Eqs. (3.6) e (3.7), as seguintes condições iniciais são usadas

$$p_i(x, 0) = \begin{cases} f(x), & i = 1 \\ 0 & , i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.8)$$

$$P_i(0) = 0; i = N + 1, \dots, I \quad (3.9)$$

para condição de contorno, temos para $i = 1, \dots, N$

$$p_i(0, t) = \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} h_{ik}(x) p_k(x, t) dx + \sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} P_k(t) \quad (3.10)$$

Para a condição inicial definida na Eq.(3.8) a função que modela os tempos de falha é a Weibull, cuja função densidade de probabilidade e taxa de falha foram definidas no Apêndice A. Então, os pontos da malha para $t_1 = 0$ e para $j = 1, \dots, J+1$ serão

$$p_1(x_j, t_1) = f(x_j) \quad (3.11)$$

Para o conjunto de EDP(s) definidas no estudo de caso para $i = 1, \dots, N$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} p_i(x, t) \Big|_{(x_j, t_1)} \cong \frac{1}{2\Delta x} \{p_i(x_{j+1}, t_1) - p_i(x_{j-1}, t_1)\} \quad (3.12)$$

e

$$p_i(x_j, t_1) = \frac{1}{2} [p_i(x_{j+1}, t_1) + p_i(x_{j-1}, t_1)] \quad (3.13)$$

Substituindo a Eq.(3.14) na Eq.(3.13) vem

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} p_i(x, t) \right|_{(x_j, t_1)} \cong \frac{1}{\Delta t} \left\{ p_i(x_j, t_{1+1}) - \frac{1}{2} [p_i(x_{j+1}, t_1) + p_i(x_{j-1}, t_1)] \right\} \quad (3.15)$$

Substituindo as Eqs.(3.12) e (3.13) na (3.6), obtemos os pontos do interior da malha um passo à frente, para $j = 2, \dots, J$ e $l = 1, \dots, L$.

$$p_i(x_j, t_{1+1}) = \left\{ 1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} + \hat{h}_i(x_j) \right) \right\} \left\{ p_i(x_{j+1}, t_1) + p_i(x_{j-1}, t_1) \right\} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (3.16)$$

para obtermos o ponto da malha x_{j+1} para qualquer t_1 , temos:

$$p_i(x_{j+1}, t_1) = 2p_i(x_j, t_1) - p_i(x_{j-1}, t_1) \quad (3.17)$$

Com os procedimentos descritos acima, iremos obter todos os pontos do interior da malha para todas as EDP. Iremos apresentar agora o desenvolvimento genérico para o cálculo das derivadas totais para $i = N + 1, \dots, l$. No membro esquerdo da Eq.(3.8), faremos a seguinte aproximação

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} P_i(t) \right|_{t=t_1} \cong \frac{1}{\Delta t} \{ P_i(t_{1+1}) - P_i(t_1) \} \quad (3.18)$$

No membro direito da Eq.(3.2) para a integração da densidade, faremos a seguinte aproximação

$$\int_0^{\infty} p(x, t) dx \cong \frac{\Delta x}{3} \left\{ p(x_1, t_1) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} p(x_{2j}, t_1) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} p(x_{2j+1}, t_1) + p(x_{J+1}, t_1) \right\} \quad (3.19)$$

O procedimento acima é chamado $\frac{1}{3}$ de Simpson repetido com a condição de que J deve ser par.

Para o cálculo das derivadas totais faremos o seguinte procedimento: substituiremos as Eqs.(3.18) e (3.19) na (3.7) e obteremos

$$\begin{aligned}
P_i(t_{l+1}) = & P_i(t_l) + \left[\sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} P_k(t_l) + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{3} [h_{ik}(x_1) p_k(x_1, t_l) + \right. \right. \\
& + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} h_{ik}(x_{2j}) p_k(x_{2j}, t_l) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} h_{ik}(x_{2j+1}) p_k(x_{2j+1}, t_l) + \\
& \left. \left. + h_{ik}(x_{J+1}) p_k(x_{J+1}, t_l) \right] \Delta x \right\} \Delta t
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Obtendo os pontos do interior da malha da Eq.(3.7) vem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_i(t) \Big|_{t=t_l} \approx & \frac{1}{\Delta t} \{ P_i(t_{l+1}) - P_i(t_l) \} = \sum_{k=1}^N \int_0^\infty h_{ik}(x) p_k(x, t_l) dx + \\
& + \sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} P_k(t_l)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

mas, pela Eq.(3.4), seque que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{\Delta t} \{ p_i(x_j, t_{l+1}) - p_i(x_j, t_l) \} - \sum_{k=1}^N h_{ik}(x_j) p_k(x_j, t_l) - \right. \\
\left. - \sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} p_k(x_j, t_l) \right) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$p_i(x_j, t_{l+1}) = p_i(x_j, t_l) + \left(\sum_{k=1}^N h_{ik}(x_j) p_k(x_j, t_l) - \sum_{k=N+1}^I \alpha_{ik} p_k(x_j, t_l) \right) \Delta t \tag{3.23}$$

Este procedimento permite obter os pontos do interior da malha para $i = N+1, \dots, I$; $j = 1, \dots, J+1$ e $l = 1, \dots, L$.

Para a solução das equações de contorno definidas na Eq.(3.10), faremos $x_l = 0$, para $i = 1 \dots, N$ e $l = 1 \dots L$, e teremos

$$\begin{aligned}
P_i(x_1, t_{l+1}) = & \sum_{K=N+1}^I \alpha_{iK} P_K(t_{l+1}) + \sum_{K=1}^N \left\{ \frac{1}{3} [h_{iK}(x_1) p_K(x_1, t_{l+1}) + \right. \\
& + 4 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}} h_{iK}(x_{2j}) p_K(x_{2j}, t_{l+1}) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{J}{2}-1} h_{iK}(x_{2j+1}) p_K(x_{2j+1}, t_{l+1}) + \\
& \left. + h_{iK}(x_{J+1}) p_K(x_{J+1}, t_{l+1}) \right] \Delta x \Big\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

3.3 – Cálculo das probabilidades

Analisando o caso de estudo composto de 25 estados do sistema com acoplamento das equações, apresentamos os passos para a obtenção das probabilidades para qualquer instante t :

Passo 1) calcula-se $p_1(x_j, t_1) = f(x_j)$; $j = 1, \dots, J + 1$ usar Eq.(3.11);

Passo 2) calcula-se $p_1(x_j, t_2)$, usar Eq.(3.16) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, para o ponto $J+1$ da malha usar a Eq.(3.17);

Passo 3) aplicar a condição inicial;

$p_2(x_j, t_1) = p_3(x_j, t_1) = \dots = p_{21}(x_j, t_1) = 0$, $j = 1, \dots, J + 1$;

e

$P_{22}(t_1) = P_{23}(t_1) = P_{24}(t_1) = P_{25}(t_1) = 0$,

Passo 4) calculam-se $p_2(x_j, t_2)$, $p_3(x_j, t_2)$, ..., $p_{21}(x_j, t_2)$, $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, usando a Eq.(3.16) e para pontos $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 5) calculam-se $p_{22}(x_j, t_2)$, $p_{23}(x_j, t_2)$, ..., $p_{25}(x_j, t_2)$, $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, usando a Eq.(3.23) e para pontos $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 6) calcula-se $P_{22}(t_2)$, usando a Eq.(3.20), $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 7) calcula-se $P_{23}(t_2)$, usando a Eq.(3.20), $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 8) calcula-se $P_{24}(t_2)$ usando a Eq.(3.20), $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 9) calcula-se $P_{25}(t_2)$, usando a Eq.(3.20), $j = 1, \dots, J$ e $l = 1$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 10) Para calcular as condições de contorno usa-se a Eq.(4.21), $i = 1 \dots, N$ e $l = 1 \dots L$;

$$p_1(x_1, t_2) = P_1(t_2)$$

$$p_2(x_1, t_2) = P_2(t_2)$$

⋮

$$p_{21}(x_1, t_2) = P_{21}(t_2)$$

Passo 11) calcula-se $p_1(x_j, t_3)$, usa-se Eq.(3.20) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ usa-se a Eq.(3.17);

Passo 12) calculam-se $p_2(x_j, t_3), p_3(x_j, t_3), \dots, p_{21}(x_j, t_3)$, $j = 1, \dots, J$, e $l = 2$, usa-se a Eq.(3.16) e para os pontos $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 13) calcula-se $P_{22}(t_3)$, usando a Eq.(3.20) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 14) calcula-se $P_{23}(t_3)$, usando a Eq.(3.20) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 15) calcula-se $P_{24}(t_3)$, usando a Eq.(3.20) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 16) calcula-se $P_{25}(t_3)$, usando a Eq.(3.20) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

Passo 17) calcular-se usando a Eq.(3.21) para $j = 1, \dots, J$ e $l = 2$, para o ponto $J+1$ da malha usa-se a Eq.(3.17);

$$p_1(x_1, t_3) = P_1(t_3)$$

$$p_2(x_1, t_3) = P_2(t_3)$$

⋮

$$p_{21}(x_1, t_3) = P_{21}(t_3)$$

Com estes procedimentos, iremos obter as probabilidades para qualquer intervalo de tempo discretizado possibilitando agora o cálculo da indisponibilidade média do sistema para os 25 estados.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DA GPT PARA A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DAS TRANSIÇÕES DE ESTADO

4.1 – Introdução

O formalismo adotado nesta tese é o proposto por GANDINI (1987), que faz uso da função importância e da relação de reciprocidade de fontes, importantes conceitos que serão utilizados no trabalho. As equações que tratam esta tese são lineares, com dependência temporal.

A teoria de perturbação usada nesta tese é aquela que lida com quantidades integrais ou medidas mensuráveis. Além disso, será aplicada apenas a sistemas lineares que dependem linearmente do vetor campo e também faz uso do princípio de conservação da função importância em relação a campos lineares e não-lineares.

4.2 – Cálculo da indisponibilidade média

O atributo de confiabilidade que desejamos calcular é a indisponibilidade média do sistema. Para tanto, precisamos identificar os estados que estão falhos. Podemos observar na Fig.2 que os estados que estão operando são 1,2,3 e os estados que estão falhos são os de 4 até o 25. Então, a quantidade integral de interesse pode ser escrita da seguinte forma, considerando agora o envelhecimento

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=4}^{25} \int_0^{\infty} p_i(x, t) dx dt \quad (4.1)$$

Onde T é o tempo de missão.

Podemos rescrever a Eq.(4.1) na forma

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{x_{\max}} [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1] [p_1(x,t) \ p_2(x,t) \ \dots \ p_{24}(x,t) \ p_{25}(x,t)]^T dxdt \quad (4.2)$$

onde

$$\tilde{h}^T \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1]$$

é um vetor conhecido e

$$\tilde{p}(x,t) \equiv [p_1(x,t) \ p_2(x,t) \ \dots \ p_{24}(x,t) \ p_{25}(x,t)]^T$$

é o vetor de campo / probabilidades e o termo fonte será definido como

$$\tilde{S}^{+T}(x,t) \equiv \frac{1}{T} \tilde{h}^T$$

Agora podemos escrever a indisponibilidade média do sistema em função do termo fonte e o vetor campo, então pela Teoria de Perturbação Generalizada (GPT) a Eq.(4.2) pode ser escrita da seguinte forma

$$Q = \int_0^T \int_0^{x_{\max}} \tilde{S}^{+T}(x,t) \tilde{p}(x,t) dxdt \quad (4.3)$$

Segundo a Relação de Reciprocidade de Fontes (SILVA, 1989), podemos escrever

$$Q = \int_0^T \int_0^{x_{\max}} \tilde{p}^*(x,t) \tilde{S}(x,t) dxdt \quad (4.4)$$

A Eq. (4.4) representa a indisponibilidade média em função do vetor importância e do vetor fonte.

4.3 - Sistema de equações da função importância

Para o obtermos as equações que governam a função importância, iremos escrever as equações das derivadas parciais que governam as probabilidades na forma matricial:

$$A \frac{\partial}{\partial x} \underline{p}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}(x, t) = H \underline{p}(x, t) + \underline{S}(x, t) \quad (4.5)$$

onde A é uma matriz diagonal

$$A \equiv \text{diag}(a_1, \dots, a_l)$$

para

$$a_i = \begin{cases} 1, & i=1, \dots, N \\ 0, & i=N+1, \dots, l \end{cases}$$

onde H é a matriz de transição de estados

Nas equações diferenciais parciais foram introduzidas as condições de contorno através da delta de Dirac. No Apêndice B encontram-se o sistema de equações com a delta de Dirac, a matriz transição de estados, os elementos da diagonal principal e os elementos fora da diagonal principal.

As equações da função importância são obtidas diretamente das equações do Apêndice B, obedecendo às seguintes regras: as derivadas de ordem ímpar no membro esquerdo da equação serão precedidas do sinal negativo e em seguida temos que transpor a matriz de transição de estados H, aplicar a regra de reversão de operadores para os elementos da matriz e fazer uso das propriedades da delta de Dirac.

$$-A \frac{\partial}{\partial x} \underline{p}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}^*(x, t) = H^* \underline{p}^*(x, t) + \underline{S}^+(x, t) \quad (4.6)$$

No Apêndice C encontram-se o sistema de equações que governam a função importância, matriz adjunta H^* , os elementos da diagonal principal e os elementos fora da diagonal principal. Então a equação genérica ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} p_i^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_i^*(x, t) = \hat{h}_i(x) p_i^*(x, t) + \sum_{K=N+1}^I h_{ik}(x) p_K^*(x, t) + \\
+ \sum_{K=1}^N h_{ik}(x) p_K^*(0, t) + S_i^+(x, t); \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{4.7}$$

com as seguintes condições

$$p_i^*(x_{J+1}, t_l) = 0; \quad i = 1, \dots, I \text{ e } l = 1, \dots, L + 1 \tag{4.8}$$

$$p_i^*(x_j, t_{L+1}) = 0; \quad i = 1, \dots, I \text{ e } l = 1, \dots, J + 1 \tag{4.9}$$

e

$$-\frac{\partial}{\partial t} p_i^*(x, t) = \hat{h}_i(x) p_i^*(x, t) + \sum_{K=1}^N h_{ik}(x) p_K^*(0, t) + S_i^+(x, t); \quad i = N + 1, \dots, I \tag{4.10}$$

por definição temos:

$$p_i^*(0, t_l) \equiv p_i^*(x_1, t_l); \quad i = 1, \dots, I \text{ e } l = 1, \dots, L \tag{4.11}$$

o termo fonte da Eq.(4.5) será

$$\underline{S}(x, t) \equiv [f(x)\delta(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T$$

A interpretação da função importância será a provável contribuição do estado (i) a um processo arbitrário detectável, em um instante selecionado t_f ; no caso desta tese o processo será a indisponibilidade média do sistema. A função importância somente é conhecida no instante final t_f e sua solução é no sentido oposto ao das equações das probabilidades.

CAPÍTULO 5

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM AS FUNÇÕES IMPORTÂNCIA

5.1 – Introdução

Os procedimentos apresentados aqui serão análogos aos desenvolvidos no Capítulo 3 e o conjunto de equações que governam a função importância foram apresentadas no Capítulo 4.

5.2 – Discretização das equações da função importância

Na Eq.(4.7) é apresentado o sistema de equações que governam a função importância. Para o conjunto de equações de $i = 1, \dots, N$, valem as seguintes aproximações por diferenças finitas, pois as equações que governam a função importância tem o mesmo formato das equações de governam as probabilidades, então:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} p_i^*(x, t) \right|_{(x_{j+1}, t_{j+1})} \cong \frac{1}{2\Delta x} \{ p_i^*(x_{j+2}, t_{j+1}) - p_i^*(x_j, t_{j+1}) \} \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} p_i^*(x, t) \right|_{(x_{j+1}, t_{j+1})} \cong \frac{1}{\Delta t} \{ p_i^*(x_{j+1}, t_{j+1}) - p_i^*(x_{j+1}, t_j) \} \quad (5.2)$$

e

$$p_i^*(x_{j+1}, t_{j+1}) = \frac{1}{2} \{ p_i^*(x_{j+2}, t_{j+1}) + p_i^*(x_j, t_{j+1}) \} \quad (5.3)$$

Substituindo a Eq.(5.3) na Eq.(5.2) e fazendo o desenvolvimento algébrico necessário, obtemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} p_i^*(x, t) \right|_{(x_{j+1}, t_{j+1})} \cong \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{2} [p_i^*(x_{j+2}, t_{j+1}) + p_i^*(x_j, t_{j+1})] - p_i^*(x_{j+1}, t_j) \right\} \quad (5.4)$$

Usando as Eq.(5.1), (5.4) e (4.11) na Eq.(4.7), para $i=1, \dots, N$, obtemos

$$\begin{aligned}
 p_i^*(x_{j+1}, t_l) = & \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) p_i^*(x_{j+2}, t_{l+1}) + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) p_i^*(x_j, t_{l+1}) \right) + \\
 & + \left(\alpha_{ik}(x_{j+1}) p_i^*(x_{j+1}, t_{l+1}) + \sum_{K=1}^N h_{ik}(x_{j+1}) p_K^*(x_1, t_{l+1}) + \right. \\
 & \left. + \sum_{K=N+1}^I h_{ik}(x_{j+1}) p_K^*(x_{j+1}, t_{l+1}) + S_i^+(x_{j+1}, t_{l+1}) \right) \Delta t
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Agora usando as Eq.(4.11), (5.2), na Eq.(4.10) para $i = N+1, \dots, I$, vem

$$\begin{aligned}
 p_i^*(x_{j+1}, t_l) = & \frac{1}{2} \left(p_i^*(x_{j+2}, t_{l+1}) + p_i^*(x_j, t_{l+1}) \right) + \left(\alpha_{ik}(x_{j+1}) p_i^*(x_{j+1}, t_{l+1}) + \right. \\
 & \left. + \sum_{K=1}^N h_{ik}(x_{j+1}) p_K^*(x_1, t_{l+1}) + S_i^+(x_{j+1}, t_{l+1}) \right) \Delta t
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Usando as condições (4.8) e (4.9), na Eq.(5.5), para $i = 1, \dots, N$ e $j = J-1, \dots, 1$, vem

$$p_i^*(x_{j+1}, t_L) = S_i^+(x_{j+1}, t_L) \Delta t \tag{5.7}$$

Enquanto da Eq.(5.3) para $i = 1, \dots, I$, vem

$$p_i^*(x_1, t_L) = 2p_i^*(x_2, t_L) - p_i^*(x_3, t_L) \tag{5.8}$$

Com estes procedimentos, obtemos todas os pontos do interior da malha para $i=1, \dots, I$; $l=L, \dots, 1$ e $j=J, \dots, 1$. A seguir, iremos obter as derivadas de corte.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE PARA SIMPLIFICAÇÃO DO DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS

6.1 – Introdução

Para a realização do estudo de corte há necessidade de análise de duas condições: 1) a taxa de reparo deve ser maior que a taxa de falha; 2) a segunda condição está relacionada com a derivada da quantidade integral em relação ao elemento da matriz de transição. O cálculo destas derivadas segue a mesma linha do procedimento adotado por VICENTE *et al.* (2014). Considerando que pelo menos um componente esteja envelhecendo, apresentamos as derivadas do estudo de corte.

6.2 – As derivadas do estudo de corte

Para o cálculo das derivadas de corte, da Eq. (4.3), podemos escrever:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{ik}} = \int_0^T \left\{ \frac{\partial}{\partial w_{ik}} S^{+T}(x, t) p(x, t) + S^{+T}(x, t) \frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t) \right\} dt \quad (6.1)$$

Como $S^{+T}(x, t)$ não depende dos elementos da matriz de transição, $\frac{\partial}{\partial w_{ik}} S^{+T}(x, t) = 0$,

logo a Eq. (6.1) assume a forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{ik}} = \int_0^{x_{\max}} \int_0^T S^{+T}(x, t) \frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t) dt dx \quad (6.2)$$

As derivadas $\frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t)$ podem ser obtidas a partir da equação generalizada

do Capítulo 3, da seguinte forma:

$$a_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t) \right) = H \left(\frac{\partial}{\partial w_{ik}} p(x, t) \right) + \frac{\partial}{\partial w_{ik}} H p(x, t) \quad (6.3)$$

Mas, segundo a GPT, mais especificamente a Relação de Reciprocidades de Fontes (SILVA, 1989), a quantidade integral definida na Eq. (4.4) pode ser calculada através de:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{ik}} = \int_0^{x_{\max}} \int_0^T p^{*T}(x, t) \frac{\partial}{\partial w_{ik}} H p(x, t) dt dx \quad (6.4)$$

A derivada com relação ao parâmetro que se encontra no elemento h_{ik} e, conseqüentemente no elemento h_{kk} da matriz H , resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial w} H p(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -p_k(x, t) \leftarrow \text{linha } j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(x) P_k(t) \leftarrow \text{linha } i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ se } i > k \quad (6.5)$$

ou, então,

$$\frac{\partial}{\partial w} H p(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(x) P_k(t) \leftarrow \text{linha } i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -p_k(x, t) \leftarrow \text{linha } k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ se } i < k \quad (6.6)$$

Substituindo a Eq.(6.5) ou a Eq.(6.6) na Eq. (6.4), segue que:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{ik}} = \int_0^T p_i^*(0, t) P_k(t) dt - \int_0^T \int_0^{x_{\max}} p_k^*(x, t) p_k(x, t) dx dt \quad (6.7)$$

Desta forma temos a derivada da quantidade integral de interesse, calculada segundo a GPT, em relação aos elementos de transição w_{ik} não nulos da matriz de transição de estados, a partir das quais podemos proceder à redução do diagrama de transição de estados.

CAPÍTULO 7

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

7.1 Introdução

Os dados utilizados para os cálculos das métricas do estudo são: tempo calendário $x_{\max} = 5000$ horas com $\Delta x = 10^{-1}$ horas, tempo de missão $T = 4$ horas com $\Delta t = 4 \times 10^{-2}$ horas, o número total de equações do sistema é de 25 e o número de equações diferenciais parciais foi de 21 para distribuição de Weibull o parâmetro de forma foi de 1,322 e o de escala foi 795 horas. Na tabela 2 abaixo, temos os seguintes resultados:

Tabela 2 – Resultados para o cálculo direto com 25 estados

Quantidade Integral	$3,1 \times 10^{-3}$	$2,9 \times 10^{-3}$
Tempo total de cálculo	120,00 seg.	166,27 seg.
Tempo total de gravação	57,24 seg.	47,55 seg.

A quantidade integral calculada foi a indisponibilidade média do sistema e ela é única, pois usando a Eq. (4.3), temos como resultado $3,1 \times 10^{-3}$ e usando a Eq. (4.4), temos como resultado $2,9 \times 10^{-3}$. Conclui-se que primeiramente usando a GPT, temos uma boa aproximação para esta medida e se tivéssemos mais componentes com taxas dependentes do tempo a tendência que o tempo total de cálculo usando a GPT seja maior.

Foi utilizado para gerar os resultados um computador pessoal marca Samsung Intel® Core I5 segunda geração com 4 GB de memória RAM. Por fim, foram calculadas as derivadas para os estudos dos cortes que serão apresentados a seguir.

7.2 Critério de corte

Uma vez calculadas as derivadas de Q com relação às componentes não nulas da matriz de transição, podemos proceder ao corte do diagrama de transição de estados. Para tanto, vamos usar a metodologia sugerida por VICENTE *et al* (2014), que diz: “quando a taxa de reparo (μ) for maior que a taxa de falha (λ) e a derivada da quantidade

integral Q com relação ao elemento onde está a transição de reparo for menor que a derivada da quantidade integral Q com relação ao elemento onde está a transição de falha, podemos então cortar esta ligação entres os estados”. Lembramos que a metodologia proposta por VICENTE (2004) usa como quantidade integral de interesse a indisponibilidade média do sistema, porém as taxas de falha são constantes, ou seja, os componentes estão no período de vida útil.

Critério para o estudo de corte do sistema:

i) Taxa de reparo (μ) > Taxa de falha (λ)

$$ii) \frac{\partial Q}{\partial w_{i,k}} < \frac{\partial Q}{\partial w'_{i,k}}$$

onde Q é a indisponibilidade média do sistema

e

$w_{i,k} \equiv$ Elemento de transição de reparo

$w'_{i,k} \equiv$ Elemento de transição de falha

Com as condições propostas acima realizaremos o estudo de corte passo a passo no diagrama original.

7.3 Estudo de cortes passo a passo

Para iniciarmos o estudo de corte devemos escolher uma região, não há critério ou regra que defina qual a melhor região do diagrama, entretanto, por experiência uma boa sugestão para início é a região central do diagrama. No caso em questão, o primeiro caso de estudo de corte será no estado 6, pois o mesmo encontra-se na coluna que divide o diagrama de transição ao meio. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição w'_{ik} usando a Eq. (6.7), a qual nos fornece a seguinte derivada de Q em relação ao elemento $a_{6,2}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{6,2}} = 0,1399 \times 10^{-2}$$

para $a_{6,2} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação aos elementos de transição $w_{6,19}$ e

$w_{6,21}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{6,19}} = -0,5131 \times 10^{-14}$$

para $w_{6,19} \equiv$ transição de reparo

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{6,21}} = -0,3038 \times 10^{-12}$$

para $w_{6,21} \equiv$ transição de reparo

As taxas de reparo (μ_1 e μ_2) são maiores que a taxa de falha (λ_3) e também as derivadas $\frac{\partial Q}{\partial w_{6,19}}$ e $\frac{\partial Q}{\partial w_{6,21}}$ são menores do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{6,2}}$, então podemos cortar as transições de 19 para 6 e de 21 para 6, como pode ser visto na Fig. 8 no Apêndice D.

No segundo caso do estudo, iremos analisar o estado 7 e seguiremos a ordem dos estados de cima para baixo. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{7,3}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{7,3}} = 0,2755 \times 10^{-3}$$

para $w'_{7,3} \equiv$ transição de falha

As derivadas de Q em relação aos elementos de transição $w_{7,18}$ e $w_{7,20}$ são:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{7,18}} = -0,2544 \times 10^{-13}$$

para $w_{7,18} \equiv$ transição de reparo

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{7,20}} = -0,1511 \times 10^{-11}$$

para $w_{7,20} \equiv$ transição de reparo

As taxas de reparo (μ_1 e μ_2) são maiores que a taxa de falha (λ_4) e também as derivadas $\frac{\partial Q}{\partial w_{7,18}}$ e $\frac{\partial Q}{\partial w_{7,20}}$ são menores do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{7,3}}$, então podemos cortar as transições de 18 para 7 e de 20 para 7, como pode ser visto na Fig.9 no Apêndice D.

No terceiro caso do estudo, iremos analisar o estado 8. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{8,4}$:

$$\frac{\partial Q}{w'_{8,4}} = -0,1974 \times 10^{-7}$$

para $w'_{8,4} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento $w_{8,17}$:

$$\frac{\partial Q}{w_{8,17}} = -0,5818 \times 10^{-12}$$

para $w_{8,17} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_2) é maior que a taxa de falha (λ_2) e também a derivada

$\frac{\partial Q}{\partial w_{8,17}}$ é menor do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{8,4}}$, então podemos cortar a transição de 17 para 8,

como pode ser visto na Fig.10 no Apêndice D.

No quarto caso do estudo, iremos analisar o estado 9. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{3,1}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{3,1}} = -0,1520 \times 10^{-6}$$

para $w'_{3,1} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{3,9}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{3,9}} = -0,4833 \times 10^{-6}$$

para $w_{3,9} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_2) é maior que a taxa de falha (λ_3) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{3,9}}$ é menor do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{3,1}}$, então podemos cortar a transição de 9 para 3, como pode ser visto na Fig.11 no Apêndice D.

No quinto caso do estudo, iremos analisar o estado 10. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{2,1}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{2,1}} = -0,2178 \times 10^{-6}$$

para $w'_{2,1} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{2,10}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{2,10}} = 0,1388 \times 10^{-2}$$

para $w_{2,10} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_1) é maior que a taxa de falha (λ_4) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{2,10}}$ é maior que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{2,1}}$, então não podemos cortar a transição de 10 para 2, como pode ser visto na Fig.12 no Apêndice D.

No sexto caso do estudo, iremos analisar o estado 11. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{3,1}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{3,1}} = -0,1520 \times 10^{-6}$$

para $w'_{3,1} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{3,11}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{3,11}} = 0,2755 \times 10^{-3}$$

para $w_{3,11} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_1) é maior que a taxa de falha (λ_3) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{3,11}}$ é maior que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{3,1}}$, então não podemos cortar a transição de 11 para 3, como pode ser visto na Fig. 13 no Apêndice D.

No sétimo caso do estudo, iremos analisar o estado 12. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{4,12}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{12,4}} = -0,3528 \times 10^{-7}$$

para $w'_{12,4} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{12,17}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{12,17}} = -0,1842 \times 10^{-9}$$

para $w_{12,17} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_1) é maior que a taxa de falha (λ_4) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{12,17}}$ é menor do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{4,12}}$, então podemos cortar a transição de 17 para 12, como pode ser visto na Fig. 14 no Apêndice D.

No oitavo caso do estudo, iremos analisar o estado 13. Para tanto, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{4,13}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{4,13}} = -0,7726 \times 10^{-9}$$

para $w'_{4,13} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{17,13}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{17,13}} = 0,2038 \times 10^{-13}$$

para $w_{17,13} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_1) é maior que a taxa de falha (λ_2) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{17,13}}$ é

maior que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{4,13}}$, então não podemos cortar a transição de 17 para 13, como

pode ser visto na Fig. 15 no Apêndice D.

No nono caso do estudo, iremos analisar o estado 14, o último de cima para baixo, como feito anteriormente, iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w'_{5,1}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w'_{5,1}} = -0,2756 \times 10^{-4}$$

para $w'_{5,1} \equiv$ transição de falha

Iremos calcular a derivada de Q em relação ao elemento de transição $w_{5,14}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_{5,14}} = -0,37 \times 10^{-10}$$

para $w_{5,14} \equiv$ transição de reparo

A taxa de reparo (μ_1) é maior que a taxa de falha (λ_2) e a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w_{5,14}}$ é menor do que a derivada $\frac{\partial Q}{\partial w'_{5,1}}$, então podemos cortar a transição de 14 para 5, como pode ser visto na Fig. 16 no Apêndice D.

7.4 Diagrama simplificado

Uma vez obtido o diagrama de transição de estados reduzido, que pode ser visto na Figura 17, a nova matriz de transição de estados fica apenas com os seguintes estados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 17 e a seguir o conjunto de equações do diagrama simplificado.

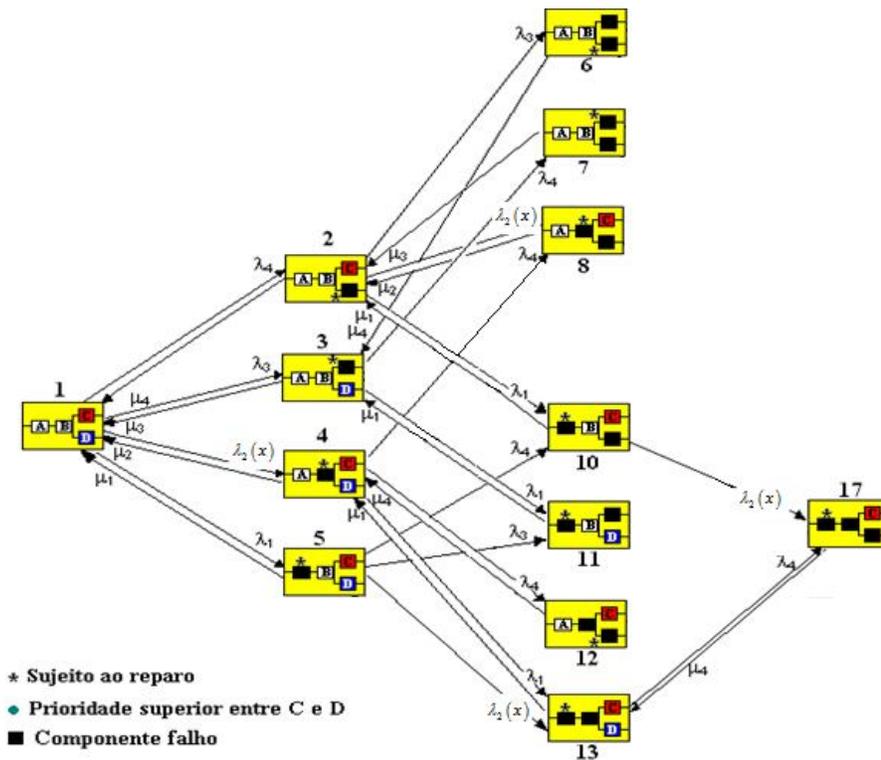


Figura 17 - O corte proposto com base no formalismo da GPT

Segue o conjunto de equações diferenciais do diagrama reduzido:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_1(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4) p_1(x, t) + \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx + \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx + f(x) \delta(t) \\
\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_2(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4) p_2(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx + \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_7(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} p_8(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{10}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_3(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_3) p_3(x, t) + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx + \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_6(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{11}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_4(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_4(x, t) &= -(\lambda_1 + 2\lambda_4 + \mu_2) p_4(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_1(x, t) dx + \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{12}(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_5(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_5(x, t) &= -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1) p_5(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_6(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_6(x, t) &= -(\mu_4) p_6(x, t) + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_7(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_7(x, t) &= -(\mu_3) p_7(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_8(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_8(x, t) &= -(\mu_2) p_8(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_2(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{10}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{10}(x, t) &= -(\mu_1 + \lambda_2(x)) p_{10}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{11}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{11}(x, t) &= -(\mu_1) p_{11}(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{12}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{12}(x, t) &= -(\mu_4) p_{12}(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{13}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{13}(x, t) &= -(\mu_1 + \lambda_4) p_{13}(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_5(x, t) dx + \\
&+ \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{17}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{17}(x, t) &= -(\mu_4) p_{17}(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_{10}(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx
\end{aligned}$$

Uma vez calculada a indisponibilidade média do sistema pelo cálculo direto, podemos comparar este resultado com o cálculo da indisponibilidade média do sistema simplificado. Usando o conjunto de equação acima, calculamos as probabilidades, as densidades, as importâncias e finalmente calculamos a indisponibilidade média para o sistema simplificado.

Tabela 3 – Resultados para o cálculo simplificado com 13 estados

Quantidade Integral	$3,1 \times 10^{-3}$
Tempo total de cálculo	47,72 seg.
Tempo total de gravação	40,98 seg.

O resultado da indisponibilidade média do sistema simplificado foi de $3,1 \times 10^{-3}$ usando a Eq. (4.3). Comparando o resultado da quantidade integral do diagrama original com o diagrama simplificado, temos resultados equivalentes com erro desprezível. Com relação ao esforço computacional gasto para o cálculo da quantidade integral foi reduzido quase a metade. Concluímos que vale apenas fazer a simplificação e realizar o estudo de confiabilidade no diagrama simplificado.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Foi apresentada uma proposta de metodologia para simplificar diagramas de transição de estado em abordagens markovianas de confiabilidade, considerando que pelo menos um dos componentes possua taxa de falha crescente no tempo. A distribuição utilizada para modelar os tempos de falha foi a Weibull de dois parâmetros, para um tempo calendário de 5.000 horas e um tempo de missão de 4 horas, a indisponibilidade média do sistema para os vinte e cinco (25) estados foi de $3,1 \times 10^{-3}$ usando as probabilidades e de $2,9 \times 10^{-3}$ usando a função importância. Este resultado mostra que utilizando a função importância temos uma boa aproximação para o cálculo da indisponibilidade média do sistema. Porém, temos um aumento de aproximadamente 38,56% do tempo total de cálculo e, com o aumento do número de componentes com taxas dependentes do tempo a simplificação do diagrama de transição de estados pode não compensar devido ao significativo aumento do esforço computacional.

O diagrama simplificado contempla os estados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ,10, 11, 12, 13 e 17 e a nova quantidade integral de interesse a (indisponibilidade média) para estes estados foi de 0,31% para um tempo total de cálculo de 47,72 segundos e tempo total de gravação de 40,98 segundos, demonstrando ser uma excelente aproximação do diagrama original. Entretanto, no estudo de corte do estado 8, temos uma taxa de falha $h_2(x)$ e uma taxa de reparo μ_1 . A primeira condição para o estudo de corte diz que: a taxa reparo tem que ser maior que a taxa de falha, já na primeira condição temos um grande problema, como $h_2(x)$ varia no tempo não podemos afirmar que para todo período de missão $h_2(x)$ será sempre menor que μ_1 .

Uma proposta para contornar o problema apresentado é fazermos o estudo de corte no intervalo que a relação $h_2(x) < \mu_1$ seja válida.

A segunda condição diz que: se a derivada da quantidade integral em relação ao elemento de transição W_k' (reparo) for menor que a derivada da quantidade integral em relação ao elemento de transição W_k' (falha), aquela transição poderá ser cortada. Esta

análise somente faz sentido com taxas de transição constantes, como temos uma taxa que varia no tempo, temos aqui uma segunda complicação.

Nesta segunda condição, podemos também contornar a dificuldade com o mesmo procedimento, ou seja, teremos um valor conhecido x que irá satisfazer a condição que a taxa de falha será menor que a taxa de reparo, portanto, deixará de ser uma variável dependente do tempo de missão para um valor conhecido.

Este procedimento possibilita realizar o estudo de corte para o caso, por exemplo, em que todos os componentes estejam envelhecendo, possibilitando a ampliação da aplicação do método.

Neste trabalho tivemos apenas o estado 8 com esta situação, nos demais o estudo de corte foi realizado sem problemas. Então, foi tomada a decisão de fazer o estudo de corte somente para aqueles estados onde a taxa de falha fosse constante.

Uma importante contribuição deste trabalho está na metodologia usada na discretização das equações parciais, ordinárias, condição de contorno e condição inicial, permitindo uma maior familiarização com o método das variáveis suplementares, pois uma grande dúvida inicial era por onde deveríamos calcular primeiro.

O cálculo das importâncias somente foi possível depois de uma reelaboração das equações parciais, pois as equações da função importância saem diretamente das equações parciais adicionando as equações de contorno através da delta de Dirac.

Uma outra dificuldade contornada na solução das equações da função importância é que somente conhecemos seu resultado no instante final. Após uma análise mais detalhada, percebemos que a solução das equações da função importância deve ser de $J+1$ para 1 e de $L+1$ para 1, o inverso do usado para o cálculo das probabilidades.

Neste caso em estudo, considerando apenas um componente envelhecendo, concluímos que compensa fazer a simplificação do diagrama de transição, mesmo havendo aumento para o tempo total de cálculo usando a função importância para o cálculo da indisponibilidade média do sistema. A partir deste momento todo estudo de análise de confiabilidade será realizado no diagrama simplificado com uma redução considerável do esforço computacional.

Para estudos futuros recomenda-se considerar a possibilidade de termos dois, três ou quatro componentes do sistema possuírem taxas de falha variando no tempo, especificamente para esta configuração, verificar o efeito do número de componentes envelhecendo com o aumento no tempo total de cálculo, aplicação em outras configurações, analisar o comportamento da quantidade integral de interesse para

diferentes intervalos de tempo de missão e para o cálculos da integrais o uso de Gauss-Legendre, pois foi verificado que com um número bem menor de pontos, por exemplo 96, foi obtido um aproximação equivalente a Simpson usando 50.000 pontos. Esta mudança, se viável, implicará em redução considerável no tempo total de cálculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BECKER, M., 1974, *"The Principles and Applications of Variational Methods, Cambridge"*, Massachusetts, MIT Press.

BERNARDO, E. M. C., 2001, *Processos Markovianos de Decisão*. Disponível na Internet (<http://www.terravista.pt/Meco/6358/>). Consultado em 05 de jan. 2004.

BILLINTON, R. ALLAN, R. N., 1983, *"Reliability Evaluation of Engineering System: Concepts e Techniques"*, Plenum Press, New York.

CACUCI, D. G., WEBER, C. F., OBLow, E. M. e MARABLE, J. H., 1980, *"Sensitivity Theory for General Systems od Nonlinear Equations"*, Nuclear Science and Engineering, vol. 75, pp. 88-110.

NUNES, M. E C., AMARAL NETTO, J. D., FRUTUOSO E MELO, P. F., 1994, *"Utilização do Método dos Estágios na Análise da Indisponibilidade de um Canal de Proteção com Tempos de Reparo Não-Exponenciais"*. In: Anais do V Congresso Geral de Energia Nuclear, pp. 707-712, ABN, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

NUNES, M. E C., 1995, *Utilização do Método dos Estágios na Análise da Indisponibilidade de um Canal de Proteção*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COX, D. R., SMITH, W. L., 1961, *Queues*, Methuen & Co. Ltd, London.

COX, D. R., MILLER, H. D., 1965, *The Theory of Stochastic Processes*, London, Chapman and Hall.

CROSSETTI, P. G., 2006, *Um Modelo de Confiabilidade do Sistema Elétrico de Angra I pelo Método dos Estágios Otimizados por Algoritmos Genéticos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ELETRONUCLEAR, 2013, *Panorama da Energia Nuclear no Mundo*. Disponível em: <<http://www.eletronuclear.gov.br/LinkClick.aspx?fileticket=fDwbsxOWKHU%3d&tabid=297>>. Acesso em 5 de novembro de 2013.

FERRO, N. J., SALDANHA, P. L. C., FRUTUOSO E MELO, P. F., MARQUES, F. F., 2012, “*Incorporating Reliability Attributes into the Maintenance Rule for the Qualified Life Extension of Nuclear Power Plant Safety Systems*”. In: PSAM11 and ESREL2012, 2012, Helsinki. 11th International Probabilistic Safety Assessment and Management Conference, PSAM11, and The Annual European Safety and Reliability Conference, ESREL2012, Scandic Marina Congress Center, Helsinki, Finland 25-29 June 2012.

FORTUNA, A. O., 2000, *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*, Edusp, São Paulo.

FRUTUOSO e MELO, P. F. ALVIM, A. C. M. and SILVA, F. C., 1998, “*Sensitivity Analysis on the Accident Rate of a Plant Equipped With a Single Protective Channel by Generalized Perturbation Methods*”, Annals of Nuclear Energy, vol. 25, pp.1191-1207.

FRUTUOSO e MELO, P. F., OLIVEIRA, L. F. AND YOUNGBLOOD, R, 1994, “*Markov Models for Reliability Analysis of Multichannel Protective Systems*”. Proceedings of the II International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management, San Diego, CA.

GANDINI, A., 1975, “*Time-Dependent Generalized Perturbation Methods for Burn-up Analysis*”. CNEN Technical Report RT/FI (75) 4, Roma.

GANDINI, A., 1981, “*Generalized Perturbation Theory for Nonlinear Systems from the Importance Conservation Principle*”, Nuclear Science and Engineering, vol. 77, pp. 316-343.

GANDINI, A., 1981, “*Reactor Life and Control Analysis Via GPT Sensitivity Methods*”. Trans. Am. Nucl. Soc., vol. 45, pp. 325-326.

GANDINI, A., 1987, “*Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach*”. Advances in Nuclear Science and Technology, vol. 19, pp. 205.

GANDINI, A, 1989, “*System Reliability Assessment Via Sensitivity Analysis*”. In: CRC PRESS, Rome. Safety Design Criteria for Industrial Plants. Capítulo 5. Italy.

GANDINI, A., 1990, “*Importance & Sensitivity in Assessing System Reliability*”. IEEE Transactions on Reliability, vol. 39, nº1, pp.61-70, April 1990.

GANDINI, A., 2000, “*HGPT Based Sensitivity Time-Dependent Methods for the Analysis of Subcritical Systems*”, Annals of Nuclear Energy, v. 28, pp.1193-1217.

- GREENSPAN, E., 1975, “*Variational Versus Generalized Perturbation Theories – Are They Different ?*”, Nuclear Science and Engineering, vol. 57, pp. 250-251.
- HOWARD, A and RORRES, C., 2001, *Cadeias de Markov*. In: Bookman, Álgebra Linear com Aplicações, 8ª ed., Capítulo 11, Porto Alegre, Brasil.
- LEWINS, J., 1965, *Importance – The Adjoint Function*, Oxford, Pergamon Press.
- LIMA, E.F., 2002, *Estudo de Sensibilidade da Frequência de Acidente com 3 Canais de Proteção Iguais Utilizando a GPT*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LINS, R. P., 2003, *Cálculo da Confiabilidade de Sistemas sob Envelhecimento Através do Método dos Estágios e de Algoritmos Genéticos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MEYER, P. L., 1983, *Probabilidade Aplicação à Estatística*. 2ª ed., Capítulo 11. LTC. Rio de Janeiro.
- MCKENDRICK, A. G., 1926, “*Application of Mathematics to Medical Problems*”, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, nº44, PP. 98-130.
- OBLOW, E. M., 1976, “*Sensitivity Theory from a Differential Viewpoint*”, Nuclear Science and Engineering, vol. 59, pp. 187-189.
- OLIVEIRA, E. A., 2001, *Uso de Variáveis Suplementares e Inversão de Transformada de Laplace no Cálculo da Confiabilidade de Sistemas Sujeitos a Envelhecimento e Sob Reparo Mínimo*. Teses de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- OLIVEIRA, A. L., ALVIM, A. C., FRUTUOSO E MELO, P. F., 2005, “*Unavailability Analysis of Safety Systems Under Aging by Supplementary Variables With Imperfect Repair*”. Annals of Nuclear Energy, Grã-Bretanha, v.32, pp.241-252.
- OLIVEIRA, I. M. S., FRUTUOSO E MELO, P. F., PINHO, M. O. 2007, “*A Reliability Analysis of the Emergency Diesel Generators of a Four Loop PWR Under Aging and Perfect Repair by Supplementary Variables*”. In: International Nuclear Atlantic Conference, Rio de Janeiro, RJ. v.1, pp. 1-1.
- PAPAZOGLU, I. A. and GYFTOPOULOS, E. P., 1977, “*Markov Processes for Reliability Analyses of Large Systems*”, IEEE Transactions on Reliability, vol.26, nº 3, pp. 232-237.

- PINHO, M. O. de, 2000, *Sobre a Aplicação de Sistemas de Equações Diferenciais e Parciais e Ordinárias de Primeira Ordem à Confiabilidade de Sistemas de Segurança Sob Envelhecimento*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- POMRANING, G., 1967, “*Variational Principle for Eigenvalue Equations*”, J. Math. Phys., vol. 8, pp. 149-160.
- ROOS, S. M., 2007, *Introduction to Probability Models*. 9ª ed., Elsevier, California.
- SALDANHA, P. L. C., 2003, *Uma Aplicação de Processos Pontuais Modulados à Avaliação do Envelhecimento para Extensão da Vida Qualificada de Equipamentos de Centrais Nucleares*. Teses de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SILVA, F. C., 1981, *Cálculo de Variação em Razões de Taxas de Reações Utilizando a Teoria de Perturbação Generalizada*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SILVA, F. C., 1989, *Desenvolvimento de Métodos da Teoria de Perturbação Generalizada (GPT) e suas Aplicações à Física de Reatores*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SINGH, C., BILLINTON, R., 1977, *System Reliability Modelling and Evaluation*. London, Hutchinson.
- SS-Nº4, 1999, *AMAT Guidelines, Reference document for IAEA Aging Management Assessment Teams*. Service Series nº4, International Atomic Energy Agency – IAEA, Vienna.
- SS-50-P-3, 1992, *Data Collection and Record Keeping for Management of Nuclear Power Plant Ageing – A Safety Practice*, Safety Series nº50 – P-3, International Energy Agency – IAEA, Vienna.
- STACEY, JR., W. M., 1974, *Variational Methods in Nuclear Reactor Physics*, New York, Academic Press, ver também: Nucl. Sci. Eng., vol. 48, pp. 444-458, 1972.
- TAKARAGI, K., SASAKI, R., and SHINGI, S., 1985, “*A Method of Rapid Markov Reliability Calculation*”, IEEE Transactions on Reability, vol. 34, nº3, pp.262-268.
- VICENTE, R. C., 2004, *Simplificação de Diagramas de Transição de Estados Via GPT em Análise Markovianas de Confiabilidade*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VICENTE, R. C., SILVA, F. C., FRUTUOSO e MELO, P. F. and ALVIM, A. C. M., 2014, “*Simplification of State Transition Diagrams in Average Unavailability Analysis by Using Generalized Perturbation Theory*”. Aceito para publicação em Science and Technology of Nuclear Installations.

USACHEV, L. N., 1964, “*Perturbation Theory for the Breeding Ratio and for Other Number Ratios Pertaining to Various Reactor Processes*”, Journal of Nuclear Energy, parts A/B, vol. 18, pp. 571-583.

WILLIAMS, M. L., 1979, “*Development of Depletion Perturbation Theory for Coupled Neutron/Nuclides Field*”, Nucl. Sci. Eng, vol. 70, pp. 20-36.

10 CFR54, 1995, *Requirements for Renewal of Operating Licenses for Nuclear Power Plants*, Code of Federal Regulation. Title 10: Energy, Part 54 – 10CFR54, Department of Energy, Washington, DC.

10 CFR51, 1991, *Environmental Protection Regulations for Domestic Licensing and Related Regulatory Functions*, Code of Federal Regulation. Title 10: Energy, Part 51 – 10CFR51, Department of Energy, Washington, DC.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES QUE TRATAM A TESE

O primeiro conjunto de equações que trata esta tese são as equações diferenciais parciais, que representam as transições de saída do estado. A solução destas equações são os pontos do interior da malha. No caso de estudo temos 21 equações diferenciais parciais, pela regra temos: o(s) único(s) estado(s) que não terá(ão) equação(ões) diferencial(is) parcial(is) será(ão) aquele(s) onde todos os componentes estão falhos. Então:

1) Conjunto de Equações Diferenciais Parciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_1(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4) p_1(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_2(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4) p_2(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_3(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_4 + \mu_3) p_3(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_4(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_4(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2) p_4(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_5(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_5(x, t) = -(2\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1) p_5(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_6(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_6(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_4) p_6(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_7(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_7(x, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_3) p_7(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_8(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_8(x, t) = -(\lambda_3 + \mu_2) p_8(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_9(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_9(x, t) = -(\lambda_4 + \mu_2) p_9(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{10}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{10}(x, t) = -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_1) p_{10}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{11}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{11}(x, t) = -(\lambda_4 + \mu_1) p_{11}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{12}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{12}(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_4) p_{12}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{13}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{13}(x, t) = -(2\lambda_4 + \mu_1) p_{13}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{14}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{14}(x, t) = -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2) p_{14}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{15}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{15}(x, t) = -(\lambda_4 + \mu_3) p_{15}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{16}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{16}(x, t) = -(\lambda_3 + \mu_4) p_{16}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{17}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{17}(x, t) = -(\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_4) p_{17}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{18}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{18}(x, t) = -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{18}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{19}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{19}(x, t) = -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{19}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{20}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{20}(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_2) p_{20}(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{21}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{21}(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_2) p_{21}(x, t)$$

O segundo conjunto de equações que trata esta tese são derivadas totais que totalizam 4 equações. A solução destas equações será interpretada como a probabilidade de estar no estado (i) para variando de 22 a 25 no instante t. O(s) estado(s) não contemplado(s) como o princípio anterior irão obedecer à regra do balanço de probabilidade, ou seja, a probabilidade de estar no estado (i) no instante (t) é a probabilidade de transição de todos os estados (j) para o estado (i) subtraído a probabilidade de transição do estado (i) para o estado (j).

2) Para as derivadas totais usaremos a regra do balanço de probabilidade:

$$\frac{d}{dt} P_{22}(t) = \lambda_4 \int_0^{\infty} p_{15}(x, t) dx + \lambda_1 \int_0^{\infty} p_{21}(x, t) dx - (\mu_2 + \mu_4) P_{22}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_{23}(t) = \lambda_3 \int_0^{\infty} p_{16}(x, t) dx + \lambda_1 \int_0^{\infty} p_{20}(x, t) dx - (\mu_3) P_{23}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_{24}(t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_{18}(x, t) dx - (\mu_1) P_{24}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_{25}(t) = \lambda_3 \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx + \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_{19}(x, t) dx - (\mu_1) P_{25}(t)$$

O terceiro conjunto de equações que trata esta tese, representa as chegadas ao estado (i) a condição de contorno totalizando 21 equações. A solução destas equações será interpretada como a probabilidade de estar no estado (i) no instantes t.

3) Para as condições de contorno, temos:

$$p_1(0, t) = \mu_4 \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx + \mu_3 \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx$$

$$p_2(0, t) = \lambda_4 \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx + \mu_3 \int_0^{\infty} p_7(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_8(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{10}(x, t) dx$$

$$p_3(0, t) = \lambda_3 \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx + \mu_4 \int_0^{\infty} p_6(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_9(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{11}(x, t) dx$$

$$p_4(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_1(x, t) dx + \mu_4 \int_0^{\infty} p_{12}(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx$$

$$p_5(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_1(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_{14}(x, t) dx$$

$$p_6(0, t) = \lambda_3 \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{19}(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_{21}(x, t) dx$$

$$p_7(0, t) = \lambda_4 \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{18}(x, t) dx + \mu_2 \int_0^{\infty} p_{20}(x, t) dx$$

$$p_8(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_2(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx$$

$$p_9(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_3(x, t) dx + \lambda_3 \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx$$

$$p_{10}(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_2(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx$$

$$p_{11}(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \lambda_3 \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx$$

$$p_{12}(0, t) = \lambda_4 \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \mu_1 \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx$$

$$p_{13}(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_5(x, t) dx + \mu_4 \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx$$

$$p_{14}(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_5(x, t) dx + \mu_3 \int_0^{\infty} p_{15}(x, t) dx + \mu_4 \int_0^{\infty} p_{16}(x, t) dx$$

$$p_{15}(0, t) = \lambda_3 \int_0^{\infty} p_{14}(x, t) dx + \mu_4 P_{22}(t)$$

$$p_{16}(0, t) = \lambda_4 \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_{14}(x, t) dx + \mu_3 P_{23}(t)$$

$$p_{17}(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_{10}(x, t) dx + \lambda_1 \int_0^{\infty} p_{12}(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx$$

$$p_{18}(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_7(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_{11}(x, t) dx$$

$$p_{19}(0, t) = \lambda_1 \int_0^{\infty} p_6(x, t) dx + \lambda_3 \int_0^{\infty} p_{10}(x, t) dx + \mu_2 P_{22}(t)$$

$$p_{20}(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_7(x, t) dx + \lambda_4 \int_0^{\infty} p_9(x, t) dx + \mu_1 P_{24}(t)$$

$$p_{21}(0, t) = \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_6(x, t) dx + \lambda_3 \int_0^{\infty} p_8(x, t) dx + \mu_1 P_{25}(t)$$

Para iniciarmos a solução das equações do problema, primeiramente devemos obter a solução dos pontos da malha da distribuição da Weibull para $t_1 = 0$ e para $j = 1, \dots, J+1$; usando a Eq.(3.11). Os pontos do interior da malha um passo à frente, para $j = 2, \dots, J$ e $l = 1, \dots, L$, devemos usar a Eq.(3.16). Para obtermos o ponto da malha x_{j+1} para qualquer t_l , usaremos a Eq.(3.17). Com estes passos obteremos todos os pontos da malha para condição inicial.

4) Condição inicial: para o estado em que todos os componentes estão funcionando.

$$p_{IB}(x, 0) = f(x)$$

A função densidade de probabilidade para os tempos de falha será a Weibull de dois parâmetros a seguir:

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta\right], x \geq 0$$

Parâmetros $\begin{cases} \delta \rightarrow \text{escala} \\ \beta \rightarrow \text{forma} \end{cases}$

$$\text{Taxa de falha} \rightarrow \lambda(x) = \frac{\beta}{\delta} \times \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1}$$

Para os demais estados $\rightarrow p_1(x,0) = 0$

$$p_2(x,0) = p_3(x,0) = p_4(x,0) = p_5(x,0) = \dots = p_{21}(x,0) = p_{22}(0) = p_{23}(0) = p_{24}(0) = p_{25}(0) = 0$$

A função densidade de probabilidade deve atender a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{x_{\max}} f(x)dx \cong 1$$

onde

x_{\max} é o infinito numérico.

APÊNDICE B - EDPs REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

As equações apresentadas no Apêndice A podem ser reescritas adicionando nas EDPs as condições de contornos através da delta de Dirac. Podemos representar estas equações na forma matricial através da Eq.(4.5). As equações que governam a função importância são obtidas diretamente desta escrita matricial. A seguir apresentamos as EDPs usando a delta de Dirac.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_1(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4) p_1(x, t) + \mu_4 \delta(x) \int_0^\infty p_2(x, t) dx + \mu_3 \delta(x) \int_0^\infty p_3(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_4(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_5(x, t) dx + f(x) \delta(t) \\
\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_2(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4) p_2(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^\infty p_1(x, t) dx + \mu_3 \delta(x) \int_0^\infty p_7(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_8(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{10}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_3(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_4 + \mu_3) p_3(x, t) + \lambda_3 \delta(x) \int_0^\infty p_1(x, t) dx + \mu_4 \delta(x) \int_0^\infty p_6(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_9(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{11}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_4(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_4(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2) p_4(x, t) + \delta(x) \int_0^\infty \lambda_2(x) p_1(x, t) dx + \mu_4 \delta(x) \int_0^\infty p_{12}(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{13}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_5(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_5(x, t) &= -(2\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1) p_5(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^\infty p_1(x, t) dx + \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_{14}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_6(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_6(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_4) p_6(x, t) + \lambda_3 \delta(x) \int_0^\infty p_2(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{19}(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_{21}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_7(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_7(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_3) p_7(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^\infty p_3(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{18}(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^\infty p_{20}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_8(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_8(x, t) &= -(\lambda_3 + \mu_2) p_8(x, t) + \delta(x) \int_0^\infty \lambda_2(x) p_2(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^\infty p_4(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^\infty p_{17}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_9(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_9(x, t) &= -(\lambda_4 + \mu_2) p_9(x, t) + \delta(x) \int_0^\infty \lambda_2(x) p_3(x, t) dx + \lambda_3 \delta(x) \int_0^\infty p_4(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{10}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{10}(x, t) &= -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_1) p_{10}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^\infty p_2(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^\infty p_5(x, t) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} p_{11}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{11}(x, t) &= -(\lambda_4 + \mu_1) p_{11}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_3(x, t) dx + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_5(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{12}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{12}(x, t) &= -(\lambda_1 + \mu_4) p_{12}(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{13}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{13}(x, t) &= -(2\lambda_4 + \mu_1) p_{13}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_4(x, t) dx + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_5(x, t) dx + \\
&+ \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{17}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{14}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{14}(x, t) &= -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2) p_{14}(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_5(x, t) dx + \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{15}(x, t) dx + \\
&+ \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{16}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{15}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{15}(x, t) &= -(\lambda_4 + \mu_3) p_{15}(x, t) + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{14}(x, t) dx + \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{22}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{16}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{16}(x, t) &= -(\lambda_3 + \mu_4) p_{16}(x, t) + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{14}(x, t) dx + \\
&+ \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{23}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{17}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{17}(x, t) &= -(\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_4) p_{17}(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_{10}(x, t) dx + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{12}(x, t) dx + \\
&+ \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{13}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{18}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{18}(x, t) &= -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{18}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_7(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{11}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{19}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{19}(x, t) &= -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{19}(x, t) + \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_6(x, t) dx + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{10}(x, t) dx + \\
&+ \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{22}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{20}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{20}(x, t) &= -(\lambda_1 + \mu_2) p_{20}(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_7(x, t) dx + \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} p_9(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{24}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{21}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{21}(x, t) &= -(\lambda_1 + \mu_2) p_{21}(x, t) + \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) p_6(x, t) dx + \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} p_8(x, t) dx + \\
&+ \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} p_{25}(x, t) dx \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{22}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{22}(x, t) &= -(\mu_2 + \mu_4) p_{22}(x, t) + \lambda_4 p_{15}(x, t) + \lambda_1 p_{21}(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{23}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{23}(x, t) &= -(\mu_3) p_{23}(x, t) + \lambda_3 p_{16}(x, t) + \lambda_1 p_{20}(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{24}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{24}(x, t) &= -(\mu_1) p_{24}(x, t) + \lambda_2(x) p_{18}(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial x} p_{25}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} p_{25}(x, t) &= -(\mu_1) p_{25}(x, t) + \lambda_3 p_{17}(x, t) + \lambda_2(x) p_{19}(x, t)
\end{aligned}$$

i. Elementos da diagonal principal:

$$h_{1,1} = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4)$$

$$h_{2,2} = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4)$$

$$h_{3,3} = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_4 + \mu_3)$$

$$h_{4,4} = -(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2)$$

$$h_{5,5} = -(2\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1)$$

$$h_{6,6} = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_4)$$

$$h_{7,7} = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_3)$$

$$h_{8,8} = -(\lambda_3 + \mu_2)$$

$$h_{9,9} = -(\lambda_4 + \mu_2)$$

$$h_{10,10} = -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_1)$$

$$h_{11,11} = -(\lambda_4 + \mu_1)$$

$$h_{12,12} = -(\lambda_1 + \mu_4)$$

$$h_{13,13} = -(2\lambda_4 + \mu_1)$$

$$h_{14,14} = -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2)$$

$$h_{15,15} = -(\lambda_4 + \mu_3)$$

$$h_{16,16} = -(\lambda_3 + \mu_4)$$

$$h_{17,17} = -(\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_4)$$

$$h_{18,18} = -(\lambda_2(x) + \mu_1)$$

$$h_{19,19} = -(\lambda_2(x) + \mu_1)$$

$$h_{20,20} = -(\lambda_1 + \mu_2)$$

$$h_{21,21} = -(\lambda_1 + \mu_2)$$

$$h_{22,22} = -(\mu_2 + \mu_4)$$

$$h_{23,23} = -(\mu_3)$$

$$h_{24,24} = -(\mu_1)$$

$$h_{25,25} = -(\mu_1)$$

ii. *Elementos fora da diagonal principal:*

$$h_{1,2} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{6,2} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{13,4} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{1,3} = \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{6,19} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{13,5} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{1,4} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{6,21} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{13,17} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{1,5} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{7,3} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{14,5} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{2,1} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{7,18} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{14,15} = \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{2,7} = \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{7,20} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{14,16} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{2,8} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{8,2} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{15,14} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{2,10} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{8,4} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{15,22} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{3,1} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{8,17} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{16,13} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{3,6} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{9,3} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{16,14} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{3,9} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{9,4} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{16,23} = \mu_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{3,11} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{10,2} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{17,10} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{4,1} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{10,5} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{17,12} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{4,12} = \mu_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{11,3} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{17,13} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{4,13} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{11,5} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{18,7} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{5,1} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{12,4} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{18,11} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{5,14} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{12,17} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{19,6} = \lambda_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{19,10} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{19,22} = \mu_2 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{20,7} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{20,9} = \lambda_4 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{20,24} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{21,6} = \delta(x) \int_0^{\infty} \lambda_2(x) (\cdot) dx$$

$$h_{21,8} = \lambda_3 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{21,25} = \mu_1 \delta(x) \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$h_{22,15} = \lambda_4$$

$$h_{22,21} = \lambda_1$$

$$h_{23,16} = \lambda_3$$

$$h_{23,20} = \lambda_1$$

$$h_{24,18} = \lambda_2(x)$$

$$h_{25,17} = \lambda_3$$

$$h_{25,19} = \lambda_2(x)$$

A escrita na forma matricial será fundamental para obtermos as equações da função importância, pois necessitamos obter a matriz adjunta. Para tanto, necessitamos primeiro transpor linhas por colunas e depois aplicar a regra de operadores. No membro esquerdo das equações a função importância devem ser precedidas do sinal negativo. No Apêndice C apresentamos os conjuntos de equações que governam a função importância.

APÊNDICE C – CONJUNTO DE EQUAÇÕES QUE GOVERNAM A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

As equações da função importância são obtidas diretamente das equações do Apêndice B, obedecendo às seguintes regras: as derivadas de ordem ímpar no membro esquerdo da equação serão precedidas do sinal negativo e em seguida temos que transpor a matriz de transição de estados H, aplicar a regra de reversão de operadores para os elementos da matriz e fazer uso das propriedades da delta de Dirac. Na Eq.(4.6), temos a escrita geral para a função importância e a seguir as equações:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} p_1^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_1^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4) p_1^*(x, t) + \lambda_4 p_2^*(0, t) + \lambda_3 p_3^*(0, t) + \\
&+ \lambda_2(x) p_4^*(0, t) + \lambda_1 p_5^*(0, t) + S_1^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_2^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_2^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4) p_2^*(x, t) + \mu_4 p_1^*(0, t) + \lambda_3 p_6^*(0, t) + \\
&+ \lambda_2(x) p_8^*(0, t) + \lambda_1 p_{10}^*(0, t) + S_2^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_3^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_3^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_4 + \mu_3) p_3^*(x, t) + \mu_3 p_1^*(0, t) + \lambda_4 p_7^*(0, t) + \\
&+ \lambda_2(x) p_9^*(0, t) + \lambda_1 p_{11}^*(0, t) + S_3^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_4^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_4^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2) p_4^*(x, t) + \mu_2 p_1^*(0, t) + \lambda_4 p_8^*(0, t) + \\
&+ \lambda_3 p_9^*(0, t) + \mu_4 p_{12}^*(0, t) + \mu_1 p_{13}^*(0, t) + S_4^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_5^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_5^*(x, t) &= -(2\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1) p_5^*(x, t) + \mu_1 p_1^*(0, t) + \lambda_4 p_{10}^*(0, t) + \\
&+ \lambda_3 p_{11}^*(0, t) + \lambda_2(x) p_{13}^*(0, t) + \lambda_2(x) p_{14}^*(0, t) + S_5^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_6^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_6^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_4) p_6^*(x, t) + \mu_4 p_3^*(0, t) + \lambda_1 p_{19}^*(0, t) + \\
&+ \lambda_2(x) p_{21}^*(0, t) + S_6^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_7^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_7^*(x, t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_3) p_7^*(x, t) + \mu_3 p_2^*(0, t) + \lambda_1 p_{18}^*(0, t) + \\
&+ \lambda_2(x) p_{20}^*(0, t) + S_7^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_8^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_8^*(x, t) &= -(\lambda_3 + \mu_2) p_8^*(x, t) + \mu_2 p_2^*(0, t) + \lambda_3 p_{21}^*(0, t) + S_8^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_9^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_9^*(x, t) &= -(\lambda_4 + \mu_2) p_9^*(x, t) + \mu_2 p_3^*(0, t) + \lambda_4 p_{20}^*(0, t) + S_9^+(x, t) \\
-\frac{\partial}{\partial x} p_{10}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{10}^*(x, t) &= -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_1) p_{10}^*(x, t) + \mu_1 p_2^*(0, t) + \lambda_2(x) p_{17}^*(0, t) + \\
&+ \lambda_3 p_{19}^*(0, t) + S_{10}^+(x, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{11}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{11}^*(x, t) = -(\lambda_4 + \mu_1) p_{11}^*(x, t) + \mu_1 p_3^*(0, t) + \lambda_4 p_{18}^*(0, t) + S_{11}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{12}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{12}^*(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_4) p_{12}^*(x, t) + \mu_4 p_4^*(0, t) + \lambda_1 p_{17}^*(0, t) + S_{12}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{13}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{13}^*(x, t) = -(2\lambda_4 + \mu_1) p_{13}^*(x, t) + \mu_1 p_4^*(0, t) + \lambda_4 p_{16}^*(0, t) + \\
& + \lambda_4 p_{17}^*(0, t) + S_{13}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{14}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{14}^*(x, t) = -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2) p_{14}^*(x, t) + \mu_2 p_5^*(0, t) + \lambda_3 p_{15}^*(0, t) + \\
& + \lambda_4 p_{16}^*(0, t) + S_{14}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{15}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{15}^*(x, t) = -(\lambda_4 + \mu_3) p_{15}^*(x, t) + \mu_3 p_{14}^*(0, t) + \lambda_4 p_{22}^*(x, t) + S_{15}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{16}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{16}^*(x, t) = -(\lambda_3 + \mu_4) p_{16}^*(x, t) + \mu_4 p_{14}^*(0, t) + \lambda_3 p_{23}^*(x, t) + S_{16}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{17}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{17}^*(x, t) = -(\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_4) p_{17}^*(x, t) + \mu_1 p_8^*(0, t) + \mu_1 p_{12}^*(0, t) + \\
& + \mu_4 p_{13}^*(0, t) + \lambda_3 p_{25}^*(x, t) + S_{17}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{18}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{18}^*(x, t) = -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{18}^*(x, t) + \mu_1 p_7^*(0, t) + \lambda_2(x) p_{24}^*(x, t) + S_{18}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{19}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{19}^*(x, t) = -(\lambda_2(x) + \mu_1) p_{19}^*(x, t) + \mu_1 p_6^*(0, t) + \lambda_2(x) p_{25}^*(x, t) + S_{19}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{20}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{20}^*(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_2) p_{20}^*(x, t) + \mu_2 p_7^*(0, t) + \lambda_1 p_{23}^*(x, t) + S_{20}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} p_{21}^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} p_{21}^*(x, t) = -(\lambda_1 + \mu_2) p_{21}^*(x, t) + \mu_2 p_6^*(0, t) + \lambda_1 p_{22}^*(x, t) + S_{21}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial t} p_{22}^*(x, t) = -(\mu_2 + \mu_4) p_{22}^*(x, t) + \mu_4 p_{15}^*(0, t) + \mu_2 p_{19}^*(0, t) + S_{22}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial t} p_{23}^*(x, t) = -(\mu_3) p_{23}^*(x, t) + \mu_3 p_{16}^*(0, t) + S_{23}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial t} p_{24}^*(x, t) = -(\mu_1) p_{24}^*(x, t) + \mu_1 p_{20}^*(0, t) + S_{24}^+(x, t) \\
& -\frac{\partial}{\partial t} p_{25}^*(x, t) = -(\mu_1) p_{25}^*(x, t) + \mu_1 p_{21}^*(0, t) + S_{25}^+(x, t)
\end{aligned}$$

i. *Elementos da diagonal principal.*

$$H_{1,1}^* = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4)$$

$$H_{2,2}^* = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_4)$$

$$H_{3,3}^* = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \lambda_4 + \mu_3)$$

$$H_{4,4}^* = -(\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \mu_2)$$

$$H_{5,5}^* = -(2\lambda_2(x) + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1)$$

$$H_{6,6}^* = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_4)$$

$$H_{7,7}^* = -(\lambda_1 + \lambda_2(x) + \mu_3)$$

$$H_{8,8}^* = -(\lambda_3 + \mu_2)$$

$$H_{9,9}^* = -(\lambda_4 + \mu_2)$$

$$H_{10,10}^* = -(\lambda_2(x) + \lambda_3 + \mu_1)$$

$$H_{11,11}^* = -(\lambda_4 + \mu_1)$$

$$H_{12,12}^* = -(\lambda_1 + \mu_4)$$

$$H_{13,13}^* = -(2\lambda_4 + \mu_1)$$

$$H_{14,14}^* = -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2)$$

$$H_{15,15}^* = -(\lambda_4 + \mu_3)$$

$$H_{16,16}^* = -(\lambda_3 + \mu_4)$$

$$H_{17,17}^* = -(\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_4)$$

$$H_{18,18}^* = -(\lambda_2(x) + \mu_1)$$

$$H_{19,19}^* = -(\lambda_2(x) + \mu_1)$$

$$H_{20,20}^* = -(\lambda_1 + \mu_2)$$

$$H_{21,21}^* = -(\lambda_1 + \mu_2)$$

$$H_{22,22}^* = -(\mu_2 + \mu_4)$$

$$H_{23,23}^* = -(\mu_3)$$

$$H_{24,24}^* = -(\mu_1)$$

$$H_{25,25}^* = -(\mu_1)$$

ii. Elementos fora da diagonal principal da matriz adjunta H^* :

$$H_{5,1}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{5,10}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{18,24}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{1,2}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{5,11}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{19,6}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{1,3}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{5,13}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{11,18}^* = \lambda_{18} \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{1,4}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{5,14}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{12,4}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{1,5}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{6,3}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{12,17}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{2,1}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{6,19}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{13,4}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{2,6}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{6,21}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{13,16}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{2,8}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{7,2}^* = \mu_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{13,17}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{2,10}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{7,18}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{14,5}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{3,1}^* = \mu_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{7,20}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{14,15}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{3,7}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{8,2}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} \delta(x) (\cdot) dx$$

$$H_{14,16}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{3,9}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{8,21}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{15,14}^* = \mu_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{3,11}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{9,3}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{15,22}^* = \lambda_4$$

$$H_{4,1}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{9,20}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{16,14}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{4,8}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{10,2}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{16,23}^* = \lambda_3$$

$$H_{4,9}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{10,17}^* = \lambda_2(x) \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{17,18}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{4,12}^* = \lambda_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{10,19}^* = \lambda_3 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{17,12}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{4,13}^* = \lambda_1 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{17,13}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{17,25}^* = \lambda_3$$

$$H_{19,25}^* = \lambda_2(x)$$

$$H_{20,7}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{20,23}^* = \lambda_1$$

$$H_{21,6}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) \delta(x) dx$$

$$H_{21,22}^* = \lambda_1$$

$$H_{22,15}^* = \mu_4 \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$H_{22,19}^* = \mu_2 \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$H_{23,16}^* = \mu_3 \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$H_{24,20}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

$$H_{25,21}^* = \mu_1 \int_0^{\infty} (\cdot) dx$$

APÊNDICE D – ESTUDO DE CORTE PROPOSTO

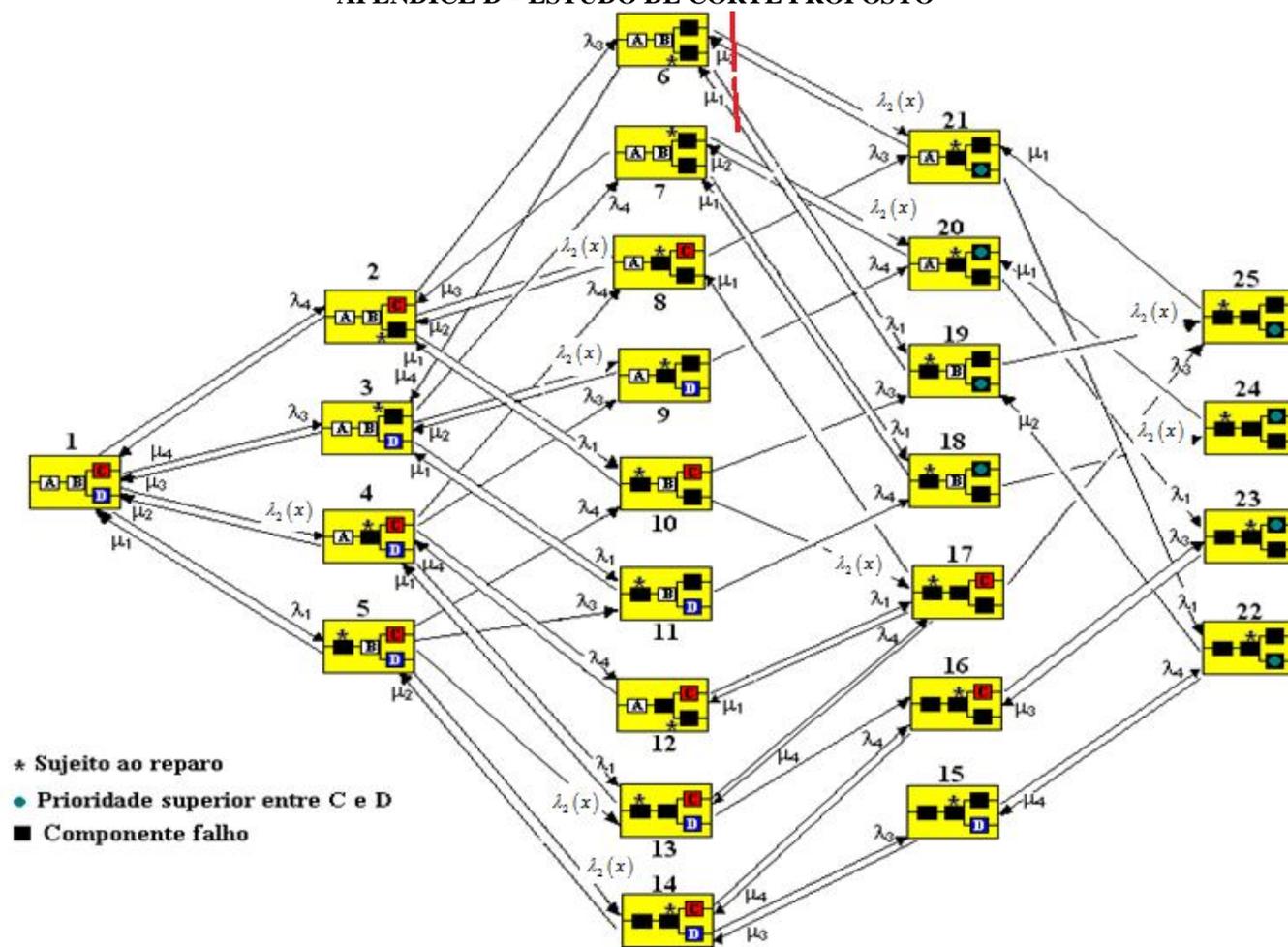


Figura 8 - Estudo de corte estado 6.

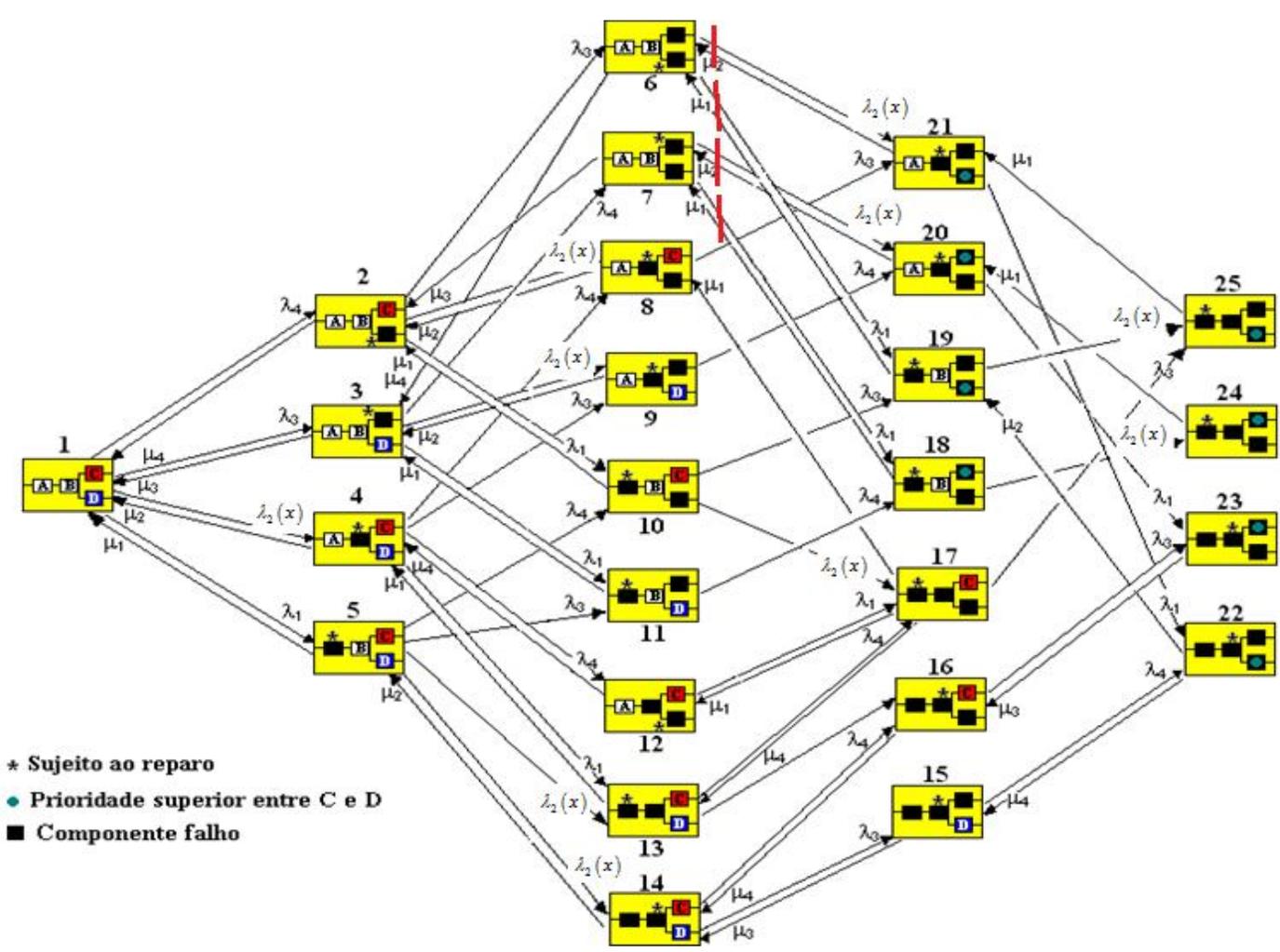


Figura 9 - estudo de corte estado 7

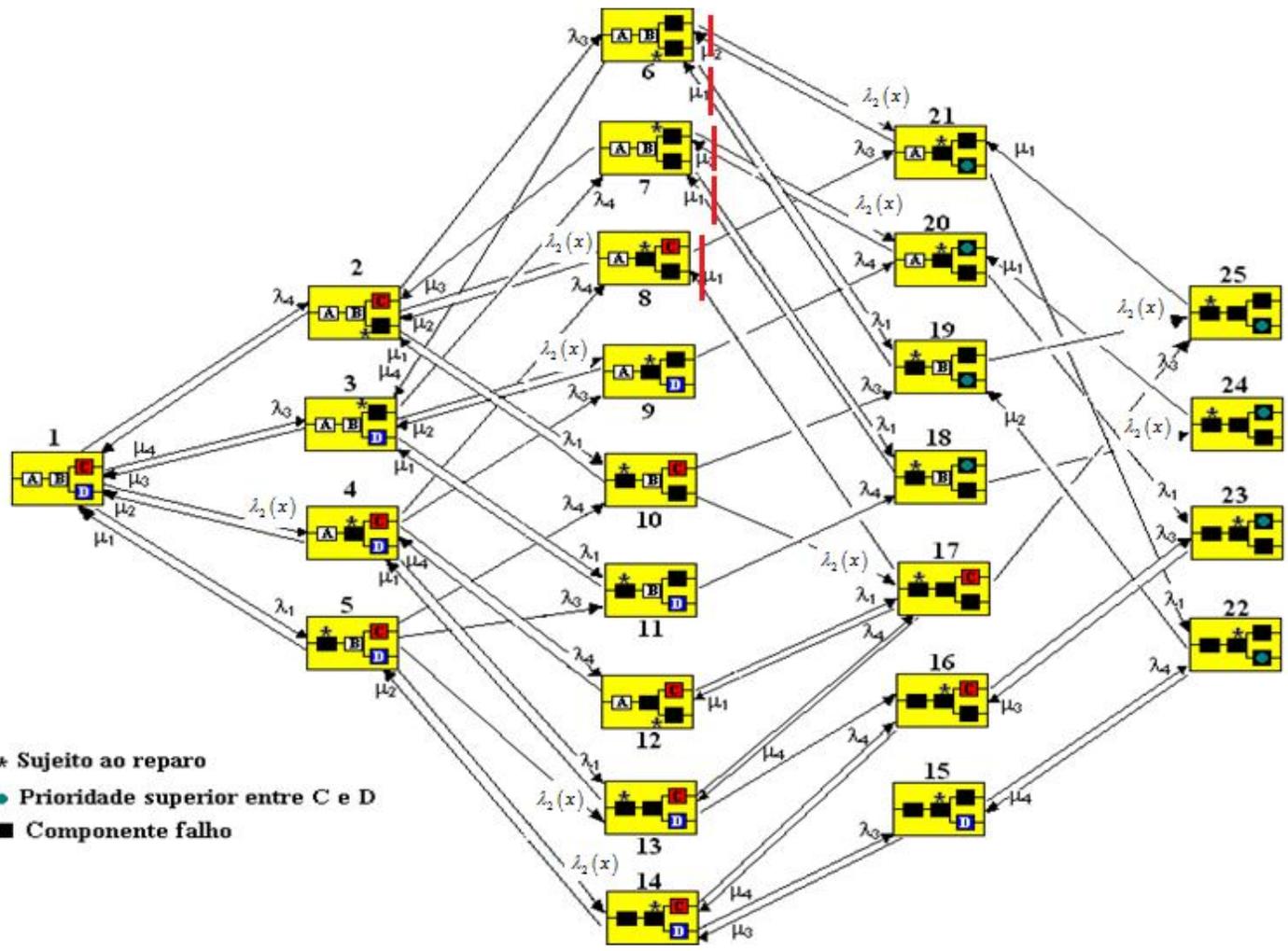


Figura 10 - Estudo de corte estado 8.

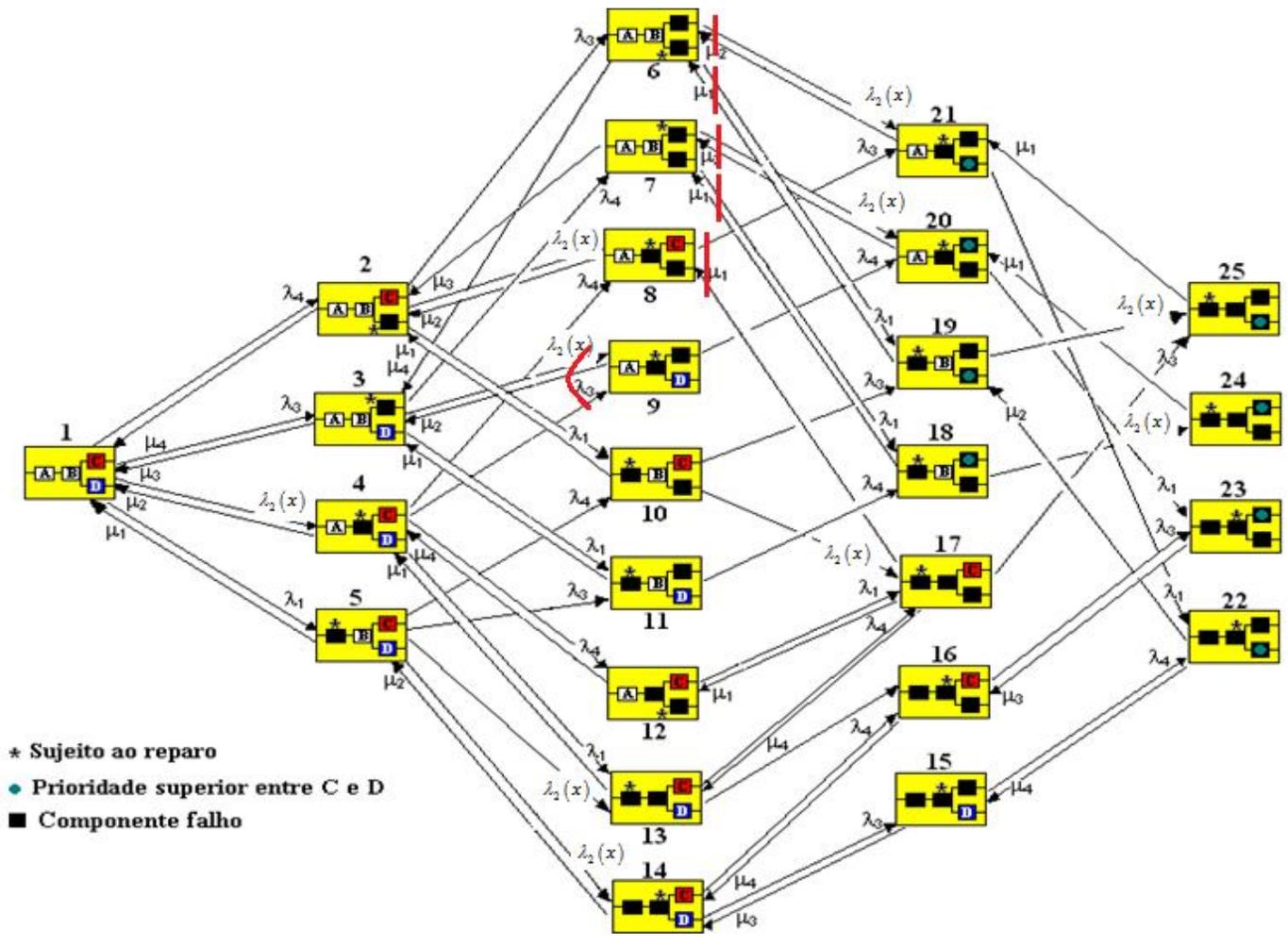


Figura 11 - Estudo de corte estado 9.

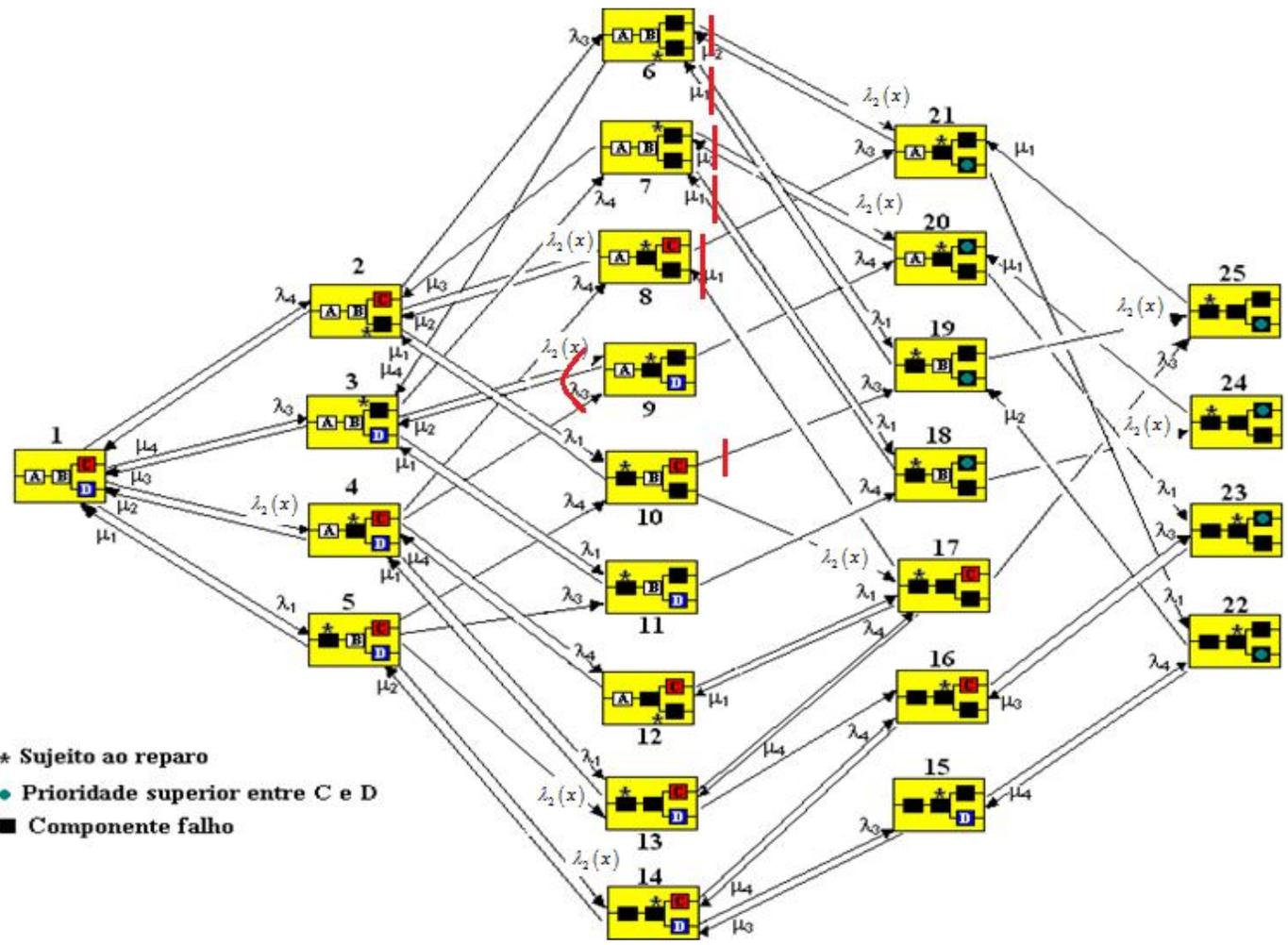


Figura 12 - Estudo de corte estado 10.

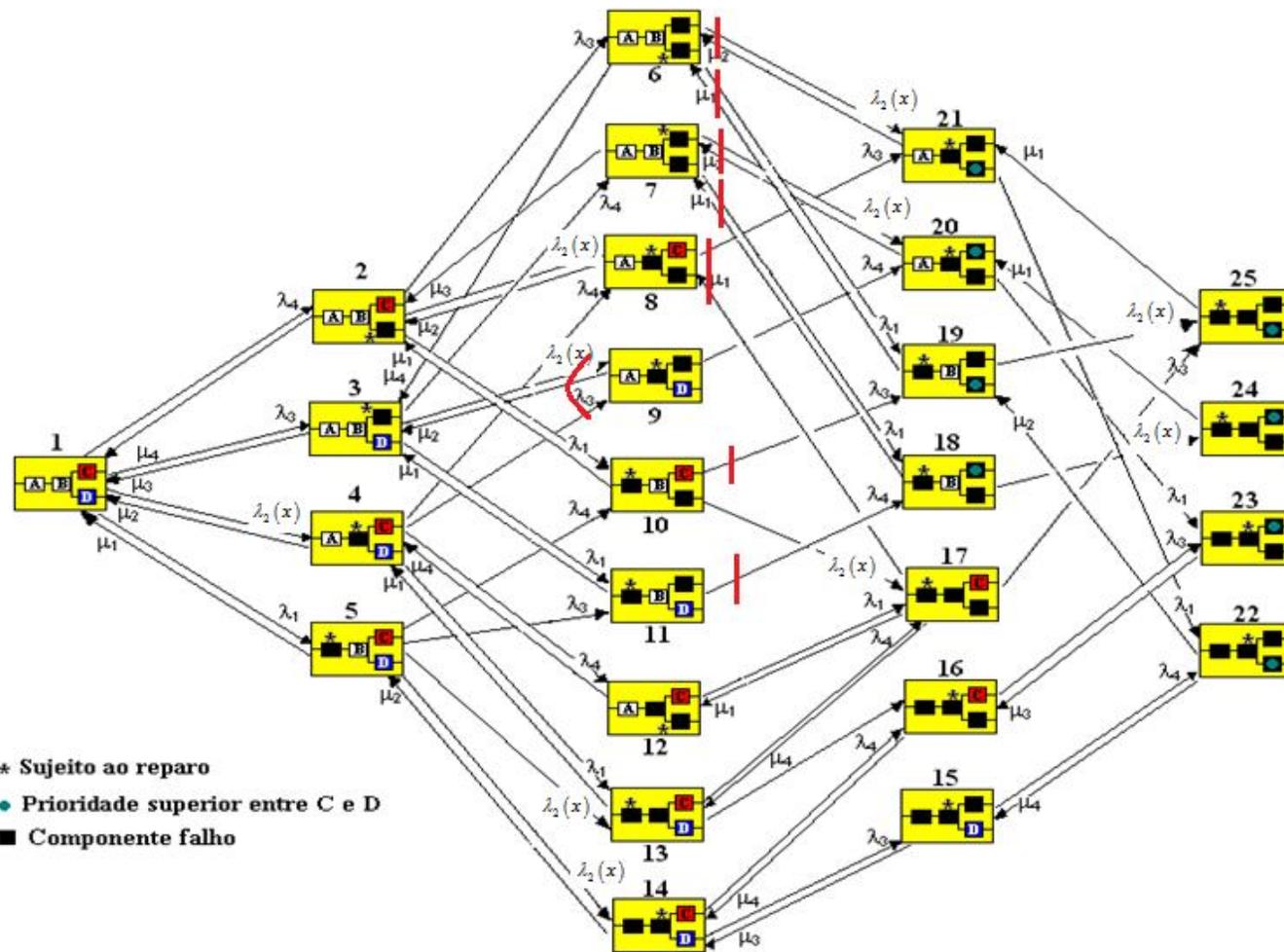


Figura 13 - Estudo de corte estado 11.

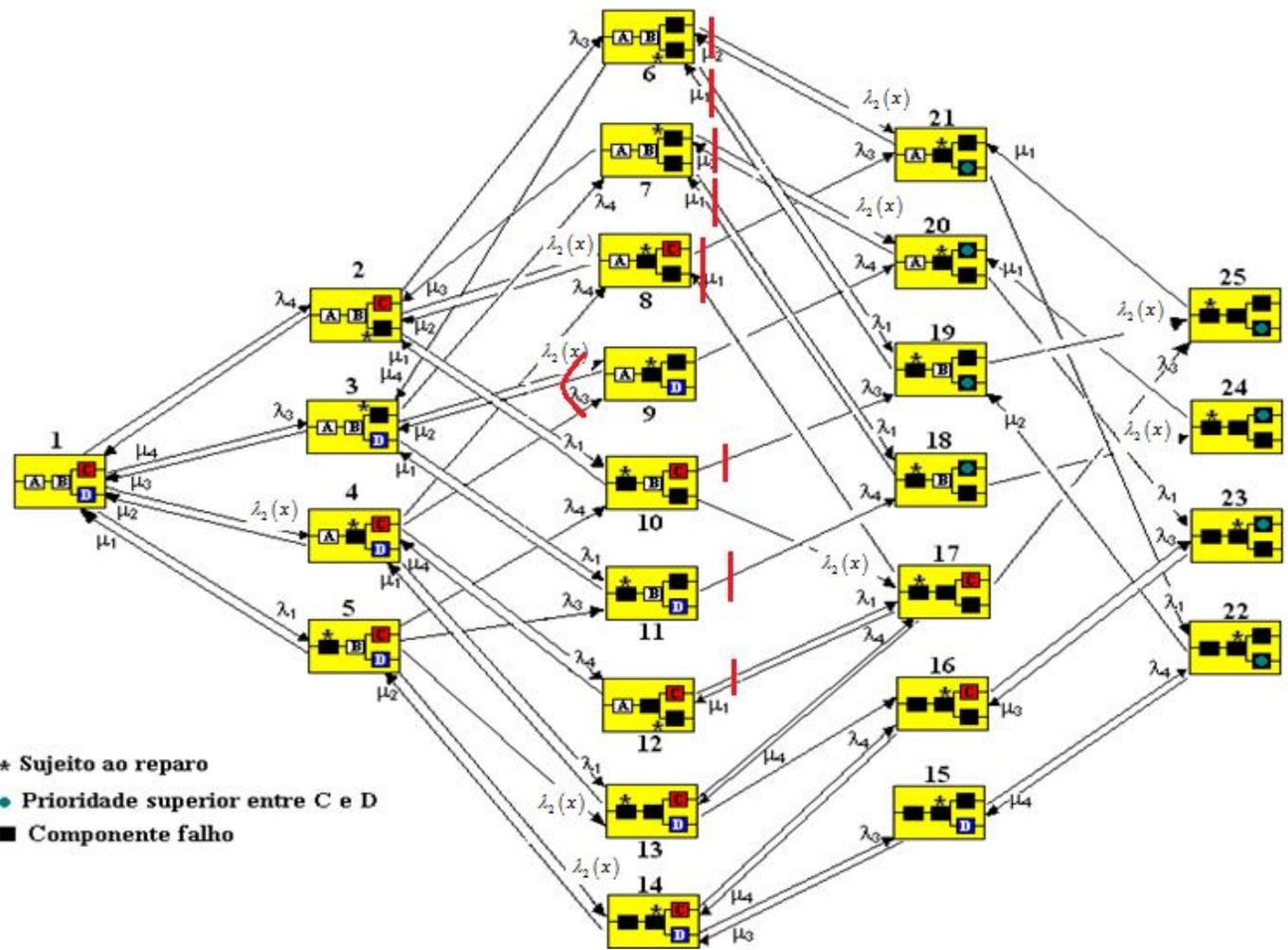


Figura 14 - Estudo de corte estado 12.

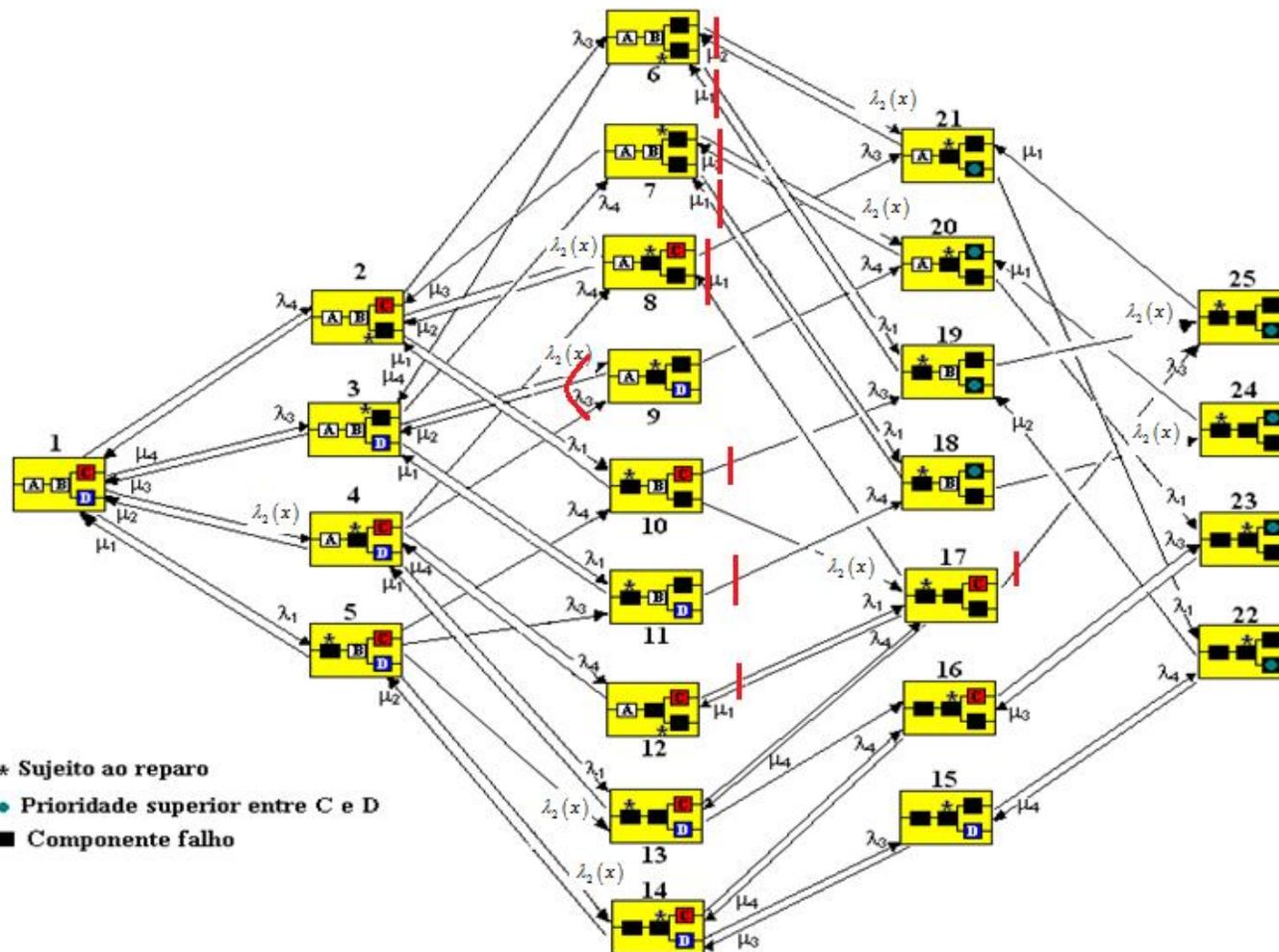


Figura 15: estudo de corte estado 13

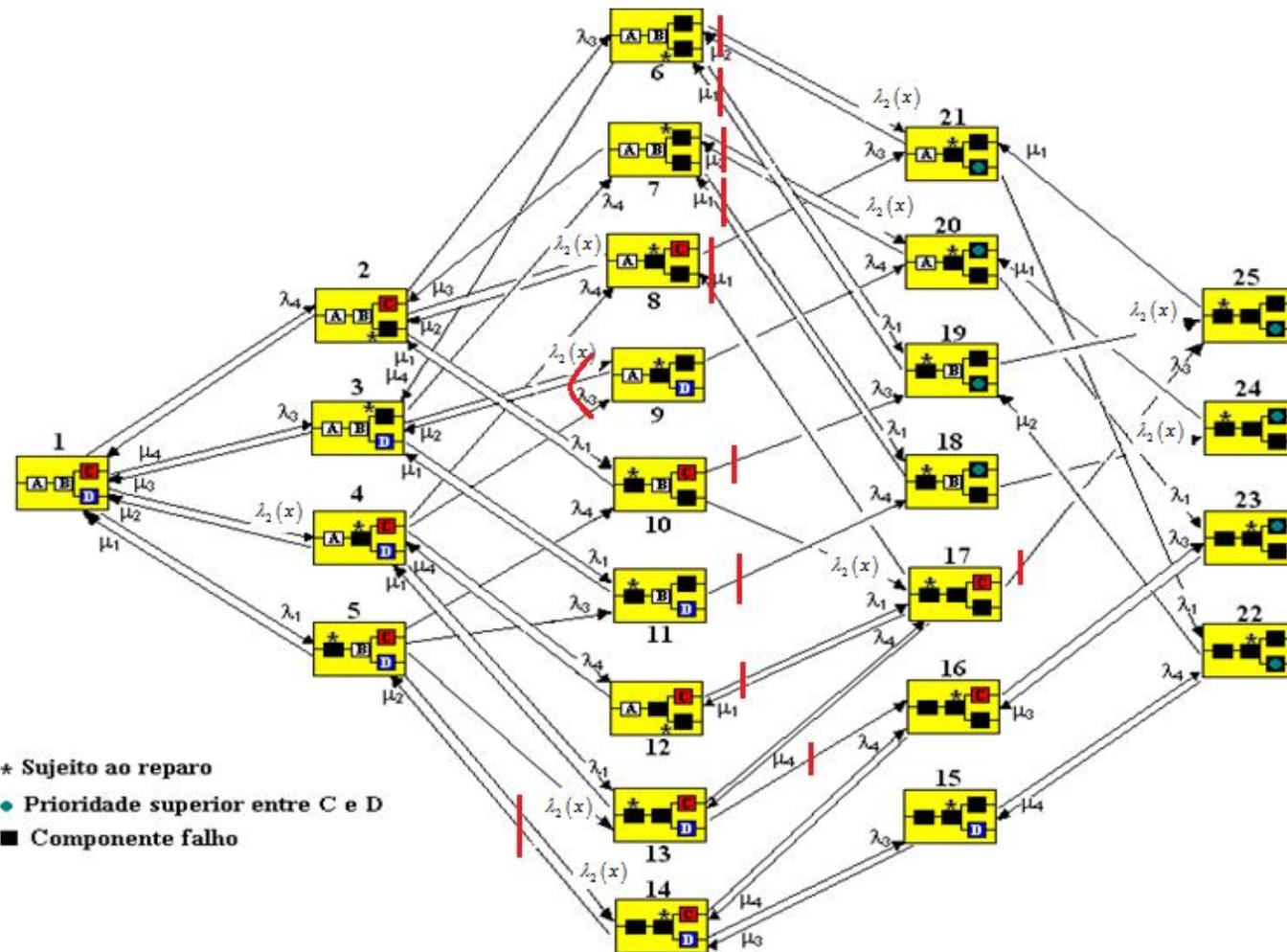


Figura 16 - Estudo de corte estado 14.

APÊNDICE E – PROGRAMAS E SUBROTINAS

PROBABILIDADE - Subrotinas

Este algoritmo é parte integrante da tese de Rosemberg Carlos Vicente, submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em ciências em engenharia nuclear.

`subroutine` AlocaoMemoria

`use` Solucao

`use` Matrizes

`use` DadosEntrada

`use` Probabilidades

`allocate` (Funcao(Numero_Intervalos_J+1))

`allocate` (Distribuicao(Numero_Intervalos_J+1))

`allocate` (Probabilidade_Total(Numero_Intervalos_L+1))

`allocate` (Alfa(Numero_Total_Estados,Numero_Total_Estados))

`allocate` (H_Til(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1))

`allocate` (Matriz_Controlo(Numero_Total_Estados,Numero_Total_Estados))

`allocate` (Probabilidade_Estado(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_L+1))

`allocate` (H(Numero_Total_Estados,Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1))

`allocate`

(Densidade_Probabilidade(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1,Numero_Intervalos_L+1))

`end subroutine` AlocaoMemoria

```

subroutine CalculaIntegral (Indice, I, K, Indice_L, Integral)

  use Matrizes , only : H , Funcao

  use Solucao , only : Densidade_Probabilidade

  use DadosEntrada , only : Delta_X , Numero_Intervalos_J

  implicit none

  integer :: I , K , J , Indice , Indice_J , Indice_L , Numero_Intervalos

  real*8 :: Soma , Termo1 , Termo2 , Termo3 , Termo4 , Integral

  ! Escolha do tipo de integral
  ! =====

  select case (Indice)

  ! Para cálculo da probabilidade do estado
  ! =====

  case (0)

    do J=1,Numero_Intervalos_J+1

      Funcao(J) = Densidade_Probabilidade(K,J,Indice_L)

    end do

  ! Para cálculo da integral de hik(x) * pi(x,tl)
  ! =====

  case (1)

    do J=1,Numero_Intervalos_J+1

      Funcao(J) = H(I,K,J) * Densidade_Probabilidade(K,J,Indice_L)

    end do

  end select

```

```
! Cálculo do primeiro termo da fórmula
! =====
```

```
Termo1 = Funcao(1)
```

```
! Cálculo do segundo termo da fórmula
! =====
```

```
Numero_Intervalos = Numero_Intervalos_J / 2
```

```
Soma = 0.0D+00
```

```
do J=1,Numero_Intervalos
```

```
    Indice_J = 2 * J
```

```
    Soma = Soma + Funcao(Indice_J)
```

```
end do
```

```
Termo2 = 4.0D+00 * Soma
```

```
! Cálculo do terceiro termo da fórmula
! =====
```

```
Soma = 0.0D+00
```

```
do J=1,Numero_Intervalos-1
```

```
    Indice_J = 2 * J + 1
```

```
    Soma = Soma + Funcao(Indice_J)
```

```
end do
```

```
Termo3 = 2.0D+00 * Soma
```

```
! Cálculo do quarto termo da fórmula
! =====
```

```
Indice_J = Numero_Intervalos_J + 1
```

```
Termo4 = Funcao(Indice_J)
```

```

! Cálculo da inntegral
! =====

Integral = (Termo1 + Termo2 + Termo3 + Termo4) * Delta_X / 3.0D+00

end subroutine CalculaIntegral

subroutine CalculaProbabilidades (Indice_L)

use Probabilidades , only : Probabilidade_Total

use Solucao      , only : Probabilidade_Estado

use DadosEntrada , only : Numero_Total_Estados ,
Numero_Estados_Derivadas_Parciais

implicit none

integer :: I      , Indice_L

real*8 :: Soma   , Integral

Soma = 0.0D+00

do I=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

! Cálculo da probabilidade dos estados
! =====

call CalculaIntegral (0, I, I, Indice_L, Integral)

Probabilidade_Estado(I,Indice_L) = Integral

! Contabiliza a probabilidade do estado
! =====

Soma = Soma + Probabilidade_Estado(I,Indice_L)

end do

! Contabiliza a probabilidade dos demais estados
! =====

if (Numero_Estados_Derivadas_Parciais < Numero_Total_Estados) then

```

```

do I=Numero_Estados_Derivadas_Parciais+1,Numero_Total_Estados

    Soma = Soma + Probabilidade_Estado(I,Indice_L)

end do

end if

! Cálculo da probabilidade no instante considerado
! =====

Probabilidade_Total (Indice_L) = Soma

end subroutine CalculaProbabilidades

subroutine Calculos

use DadosEntrada

use Matrices

use Solucao

implicit none

integer :: I      , J      , L      , K

real*8 :: Soma1      , Soma2      , Integral      , Termo_Mais      , Termo_Menos
do L=1,Numero_Intervalos_L

! Cálculo das densidades de probabilidade para j > 1 e I até N
! =====

Termo_Menos = (1.0D+00 - Delta_T / Delta_X) / 2.0D+00

Termo_Mais = (1.0D+00 + Delta_T / Delta_X) / 2.0D+00

do I=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

    do J=2,Numero_Intervalos_J

        Densidade_Probabilidade(I,J,L+1) = Termo_Menos *
Densidade_Probabilidade(I,J+1,L) + Termo_Mais * Densidade_Probabilidade(I,J-1,L) &
+ H_Til(I,J) * Delta_T * Densidade_Probabilidade(I,J,L)

    end do

end do

```

```

J = Numero_Intervalos_J

Densidade_Probabilidade(I,J+1,L+1) = 2.0D+00 *
Densidade_Probabilidade(I,J,L+1) - Densidade_Probabilidade(I,J-1,L+1)

end do

!   Cálculo das probabilidades para todo J e I > N
!   =====

if (Numero_Estados_Derivadas_Parciais < Numero_Total_Estados) then

do I=Numero_Estados_Derivadas_Parciais+1,Numero_Total_Estados

!   Cálculo das densidades de probabilidade
!   =====

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Soma1 = 0.0D+00

do K=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

Soma1 = Soma1 + H(I,K,J) * Densidade_Probabilidade(K,J,L)

end do

Soma2 = 0.0D+00

do K=Numero_Estados_Derivadas_Parciais+1,Numero_Total_Estados

Soma2 = Soma2 + Alfa(I,K) * Densidade_Probabilidade(K,J,L)

end do

Densidade_Probabilidade(I,J,L+1) = Densidade_Probabilidade(I,J,L) + (Soma1
+ Soma2) * Delta_T

end do

!   Calculo da probabilidade de cada estado (para I > N)
!   =====

call CalculaIntegral (0, I, I, L+1, Integral)

Probabilidade_Estado(I,L+1) = Integral

```

```

    end do

end if

!  Cálculo das densidades de probabilidade para J = 1 e I até N
!  =====

do I=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

    Soma1 = 0.0D+00

    do K=1,Numero_Total_Estados

        select case (Matriz_Control(I,K))

            case (-1)

                Soma1 = Soma1 + Alfa(I,K) * Probabilidade_Estado(K,L+1)

            case (1)

                call CalculaIntegral (1, I, K, L, Integral)

                Soma1 = Soma1 + Integral

        end select

    end do

    Densidade_Probabilidade(I,1,L+1) = Soma1

end do

!  Cálculo das probabilidades dos estados
!  =====

call CalculaProbabilidades (L+1)

end do

end subroutine Calculos

```

```

subroutine DadosProblema

  use Matrices

  use DadosEntrada , only : Numero_Total_Estados , Numero_Intervalos_J ,
Delta_X

  use Probabilidades , only : Distribuicao

  implicit none

  integer :: I , J , K

  real*8 :: X , Mi1 , Mi2 , Mi3 , Mi4 , Base , Beta ,
Delta , Razao , Lambda1 , Lambda2 , Lambda3 , Lambda4

! Parâmetros da distribuição de probabilidades
! =====

Beta = 1.322D+00

Delta = 7.95D+02

Razao = Beta / Delta

! Inicializa todos os elementos das matrizes com zero
! =====

do I=1,Numero_Total_Estados

  do K=1,Numero_Total_Estados

    Alfa(I,K) = 0.0D+00

  end do

  do J=1,Numero_Intervalos_J+1

    H_TIL(I,J) = 0.0D+00

    do K=1,Numero_Total_Estados

      H(I,K,J) = 0.0D+00

    end do

  end do

```

```

end do

end do

! Taxas de falha constantes
! =====

Lambda1 = 1.0D-05
Lambda3 = 1.0D-04
Lambda4 = 5.0D-04

! Taxas de reparo constantes
! =====

Mi1 = 1.0D-02
Mi2 = 2.0D-02
Mi3 = 1.0D-02
Mi4 = 2.0D-03

! Elementos não nulos da matriz Alfa
! =====

Alfa(15,22) = Mi4
Alfa(19,22) = Mi2
Alfa(16,23) = Mi3
Alfa(20,24) = Mi1
Alfa(21,25) = Mi1
Alfa(22,22) = - (Mi2 + Mi4)
Alfa(23,23) = - Mi3
Alfa(24,24) = - Mi1
Alfa(25,25) = - Mi1

! Cálculo das variáveis dependentes de x
! =====

X = 0.0D+00

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Base = X / Delta

! Cálculo da densidade de probabilidade
! =====

Distribuicao(J) = Razao * (Base ** (Beta - 1.0D+00)) * dexp(- Base ** Beta)

```

! Cálculo da taxa de falha dependente do tempo de envelhecimento
!

$$\text{Lambda2} = \text{Razao} * (\text{Base} ** (\text{Beta} - 1.0\text{D}+00))$$

! Elementos não nulos da matriz H_Til
! =====

$$\text{H_Til}(1,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda2} + \text{Lambda3} + \text{Lambda4})$$

$$\text{H_Til}(2,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda2} + \text{Lambda3} + \text{Mi4})$$

$$\text{H_Til}(3,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda2} + \text{Lambda4} + \text{Mi3})$$

$$\text{H_Til}(4,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda3} + \text{Lambda4} + \text{Lambda4} + \text{Mi2})$$

$$\text{H_Til}(5,\text{J}) = - (\text{Lambda2} + \text{Lambda2} + \text{Lambda3} + \text{Lambda4} + \text{Mi1})$$

$$\text{H_Til}(6,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda2} + \text{Mi4})$$

$$\text{H_Til}(7,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Lambda2} + \text{Mi3})$$

$$\text{H_Til}(8,\text{J}) = - (\text{Lambda3} + \text{Mi2})$$

$$\text{H_Til}(9,\text{J}) = - (\text{Lambda4} + \text{Mi2})$$

$$\text{H_Til}(10,\text{J}) = - (\text{Lambda2} + \text{Lambda3} + \text{Mi1})$$

$$\text{H_Til}(11,\text{J}) = - (\text{Lambda4} + \text{Mi1})$$

$$\text{H_Til}(12,\text{J}) = - (\text{Lambda1} + \text{Mi4})$$

$$\text{H_Til}(13,\text{J}) = - (\text{Lambda4} + \text{Lambda4} + \text{Mi1})$$

$$\text{H_Til}(14,\text{J}) = - (\text{Lambda3} + \text{Lambda4} + \text{Mi2})$$

$$\text{H_Til}(15,\text{J}) = - (\text{Lambda4} + \text{Mi3})$$

$$\text{H_Til}(16,\text{J}) = - (\text{Lambda3} + \text{Mi4})$$

$$\text{H_Til}(17,\text{J}) = - (\text{Lambda3} + \text{Mi1} + \text{Mi1} + \text{Mi4})$$

$$\text{H_Til}(18,\text{J}) = - (\text{Lambda2} + \text{Mi1})$$

$$\text{H_Til}(19,\text{J}) = - (\text{Lambda2} + \text{Mi1})$$

$$H_Til(20,J) = - (\text{Lambda1} + \text{Mi2})$$

$$H_Til(21,J) = - (\text{Lambda1} + \text{Mi2})$$

! Elementos não nulos da matriz H
! =====

- H(1,2,J) = Mi4
- H(1,3,J) = Mi3
- H(1,4,J) = Mi2
- H(1,5,J) = Mi1
- H(2,1,J) = Lambda4
- H(2,7,J) = Mi3
- H(2,8,J) = Mi2
- H(2,10,J) = Mi1
- H(3,1,J) = Lambda3
- H(3,6,J) = Mi4
- H(3,9,J) = Mi2
- H(3,11,J) = Mi1
- H(4,1,J) = Lambda2
- H(4,12,J) = Mi4
- H(4,13,J) = Mi1
- H(5,1,J) = Lambda1
- H(5,14,J) = Mi2
- H(6,2,J) = Lambda3
- H(6,19,J) = Mi1
- H(6,21,J) = Mi2
- H(7,3,J) = Lambda4
- H(7,18,J) = Mi1
- H(7,20,J) = Mi2
- H(8,2,J) = Lambda2
- H(8,4,J) = Lambda4
- H(8,17,J) = Mi1
- H(9,3,J) = Lambda2
- H(9,4,J) = Lambda3
- H(10,2,J) = Lambda1
- H(10,5,J) = Lambda4
- H(11,3,J) = Lambda1
- H(11,5,J) = Lambda3
- H(12,4,J) = Lambda4
- H(12,17,J) = Mi1
- H(13,4,J) = Lambda1
- H(13,5,J) = Lambda2
- H(13,17,J) = Mi4
- H(14,5,J) = Lambda2
- H(14,15,J) = Mi3

```

H(14,16,J)= Mi4
H(15,14,J)= Lambda3
H(16,13,J)= Lambda4
H(16,14,J)= Lambda4
H(17,10,J)= Lambda2
H(17,12,J)= Lambda1
H(17,13,J)= Lambda4
H(18,7,J) = Lambda1
H(18,11,J)= Lambda4
H(19,6,J) = Lambda1
H(19,10,J)= Lambda3
H(20,7,J)= Lambda2
H(20,9,J)= Lambda4
H(21,6,J)= Lambda2
H(21,8,J)= Lambda3
H(22,15,J)=Lambda4
H(22,21,J)=Lambda1
H(23,16,J)=Lambda3
H(23,20,J)=Lambda1
H(24,18,J)=Lambda2
H(25,17,J)=Lambda3
H(25,19,J)=Lambda2

```

```

!   Toma novo valor de x
!   =====
X = X + Delta_X

```

```

end do
end subroutine DadosProblema

```

```

subroutine GravaDadosSaida (Instante_Inicial)

```

```

use Solucao

```

```

use DadosEntrada , only : Numero_Total_Estados , Numero_Intervalos_J ,
Numero_Intervalos_L

```

```

use Probabilidades , only: Probabilidade_Total

```

```

use Matrices

```

```

implicit none

```

```

integer :: I , L , J , K , Opcao , Estado , Instante

```

```

real :: Instante_Inicial

```

! Verifica se há alguma probabilidade negativa

! =====

Estado = 0

Instante = 0

Controla: do L=1,Numero_Intervalos_L+1

do I=1,Numero_Total_Estados

if (Probabilidade_Estado(I,L) < 0.0D+00) then

Estado = I

Instante = L

exit controla

end if

end do

end do controla

! Abertura do arquivo de verificação

! =====

open (unit=2, file='Saida.dat', status='unknown')

! Gravação no arquivo de verificação

! =====

if (Estado /= 0) then

10 write (2,10) Instante, Estado
format(2I7, ///)

end if

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

15 write (2,15) L
format(/, 'Instante : ', I4, /)

20 write (2,20) (Probabilidade_Estado(I,L), I=1,Numero_Total_Estados)
format(/, 5E15.5)

```

write (2,25) Probabilidade_Total(L)
25  format(//, E15.5, //)

end do

close(unit=2)

write (*,30)
30  format(//, 5X, 'Grava os demais arquivos ? ', /, &
        5X, ' Sim - 1'           , /, &
        5X, ' Nao - 2'          , /, &
        5X, 'Opcao : '          $)
read (*,*)Opcao

!  Toma o instante de início de gravação
!  =====

call cpu_time (Instante_Inicial)

if (Opcao == 1) then

!  gravação do arquivo com as probabilidades de estado
!  =====

open (unit=3, file='probabilidades.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

write (3,rec=L) (Probabilidade_Estado(I,L), I=1,Numero_Total_Estados)

end do

close(unit=3)

!  Gravação do arquivo com as densidades de probabilidade
!  =====

open (unit=4, file='densidades.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')

K = 1

```

```

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

write (4,rec=K) (Densidade_Probabilidade(I,J,L), I=1,Numero_Total_Estados)

K = K + 1

end do

end do

close(unit=4)

end if

end subroutine GravaDadosSaida

subroutine Inicializacao

use Solucao

use Probabilidades

use DadosEntrada , only : Numero_Intervalos_L , Numero_Intervalos_J ,
Numero_Total_Estados

implicit none

integer :: I , J , L

! Inicializa todas as probabilidades com zero
! =====

do I=1,Numero_Total_Estados

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

! Para as densidades de probabilidade
! =====

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Densidade_Probabilidade(I,J,L) = 0.0D+00

```

```

        end do

!   Para as probabilidades de cada estado
!   =====

        Probabilidade_Estado(I,L) = 0.0D+00

        end do

end do

!   Probabilidade do estado 1 é feita igual a 1.0 em t1
!   =====

        Probabilidade_Estado(1,1) = 1.0D+00

!   Probabilidade do instante t1 é feita igual a 1.0
!   =====

        Probabilidade_Total(1) = 1.0D+00

!   Densidade de probabilidade do estado 1 é a densidade de probabilidade em t1
!   =====
=====

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

        Densidade_Probabilidade(1,J,1) = Distribuicao(J)

end do

end subroutine Inicializacao

subroutine LeDadosEntrada

    use DadosEntrada

    implicit none

    integer :: I , K

    character (len=20) :: Nome_Arquivo

```

```

! Leitura do nome do arquivo de dados de entrada
! =====

write (*,10)
10 format(//, 5X, 'Nome do arquivo de dados de entrada : ', $)

read (*,20) Nome_Arquivo
20 format(A20)

! Abertura do arquivo de dados de entrada
! =====

open (unit=1, file=Nome_Arquivo, status='old')

read (1,*) Numero_Total_Estados, Numero_Estados_Derivadas_Parciais

read (1,*) Numero_Intervalos_J, Numero_Intervalos_L

read (1,*) Delta_X, Delta_T

if (Delta_T > Delta_X) then

    write (*,*) '
    write (*,*) '
    write (*,*) 'Delta_T e maior do que Delta_X, logo nao e possivel continuar.'
    stop

end if

! Chama a rotina que alocará espaço em memória
! =====

call AlocacaoMemoria

do I=1,Numero_Total_Estados

    read (1,*) (Matriz_Control(I,K), K=1,Numero_Total_Estados)

end do

close(unit=1)

end subroutine LeDadosEntrada

```

```

subroutine LiberaMemoria

  use Solucao

  use Matrices

  use DadosEntrada

  use Probabilidades

  deallocate (H)

  deallocate (Alfa)

  deallocate (H_Til)

  deallocate (Funcao)

  deallocate (Distribuicao)

  deallocate (Matriz_Controlo)

  deallocate (Probabilidade_Total)

  deallocate (Probabilidade_Estado)

  deallocate (Densidade_Probabilidade)

end subroutine LiberaMemoria

```

Módulos

```

! Fluxo de dados DadosEntrada
! =====

```

```

module DadosEntrada

  integer :: Numero_Intervalos_J , Numero_Total_Estados ,
Numero_Estados_Derivadas_Parciais , &
          Numero_Intervalos_L

  integer , allocatable :: Matriz_Controlo(:,:)

  real*8 :: Delta_X , Delta_T

end module DadosEntrada

```

```

! Fluxo de dados Matrizes
! =====

    module Matrizes

real*8 , allocatable :: Alfa(:,:) , H_Til(:,) , H(:,,:) , Funcao(:)

    end module Matrizes

! Fluxo de dados Solucao
! =====

module Solucao

real*8 , allocatable :: Probabilidade_Estado(:,) , Densidade_Probabilidade(:,,:)

end module Solucao

! Fluxo de dados Probabilidades
! =====

module Probabilidades

real*8 , allocatable :: Distribuicao(:) , Probabilidade_Total(:)

end module Probabilidades

program Probabilidade

real :: Instante_Inicial , Instante_Final

call LeDadosEntrada

! Toma o instante de início dos cálculos
! =====

call cpu_time (Instante_Inicial)

call DadosProblema

call Inicializacao

```

```

call Calculos

call QuantidadeIntegral

! Toma o instante do fim dos cálculos
! =====

call cpu_time (Instante_Final)

! Mostra o tempo total de execução dos cálculos
! =====

write (6,10) Instante_Final - Instante_Inicial
10 format(//, 'Tempo Total de Calculo : ', F7.2, ' segundos')
pause

call GravadosSaida (Instante_Inicial)

! Chama a rotina para liberar espaço na memória
! =====

call LiberaMemoria

! Toma o instante do fim de gravação
! =====

call cpu_time (Instante_Final)

! Mostra o tempo total de gravação
! =====

write (6,20) Instante_Final - Instante_Inicial
20 format(//, 'Tempo Total de Gravacao : ', F7.2, ' segundos')

end program Probabilidade

subroutine QuantidadeIntegral

    use DadosEntrada , only : Numero_Intervalos_L , Numero_Total_Estados ,
    Delta_T

    use Solucao , only : Probabilidade_Estado

    implicit none

```

```

integer :: I      , L      , Indice_L      , Numero_Intervalos

real*8 :: Soma      , Termo1      , Termo2      , Tempo_Missao      , &
Integral      , Termo3      , Termo4      , Quantidade_Integral

```

```

Quantidade_Integral = 0.0D+00

```

```

do I=4,Numero_Total_Estados

```

```

!   Cálculo do primeiro termo da fórmula
!   =====

```

```

Termo1 = Probabilidade_Estado(I,1)

```

```

!   Cálculo do segundo termo da fórmula
!   =====

```

```

Numero_Intervalos = Numero_Intervalos_L / 2

```

```

Soma = 0.0D+00

```

```

do L=1,Numero_Intervalos

```

```

    Indice_L = 2 * L

```

```

    Soma = Soma + Probabilidade_Estado(I,Indice_L)

```

```

end do

```

```

Termo2 = 4.0D+00 * Soma

```

```

!   Cálculo do terceiro termo da fórmula
!   =====

```

```

Soma = 0.0D+00

```

```

do L=1,Numero_Intervalos-1

```

```

    Indice_L = 2 * L + 1

```

```

    Soma = Soma + Probabilidade_Estado(I,Indice_L)

```

```

end do

```

```

Termo3 = 2.0D+00 * Soma

```

```
! Cálculo do quarto termo da fórmula
! =====
```

```
Indice_L = Numero_Intervalos_L + 1
```

```
Termo4 = Probabilidade_Estado(I,Indice_L)
```

```
! Cálculo da inntegral
! =====
```

```
Integral = (Termo1 + Termo2 + Termo3 + Termo4) * Delta_T / 3.0D+00
```

```
Quantidade_Integral = Quantidade_Integral + Integral
```

```
end do
```

```
Tempo_Missao = Numero_Intervalos_L * Delta_T
```

```
Quantidade_Integral = Quantidade_Integral / Tempo_Missao
```

```
Quantidade_Integral = 1.0D+02 * Quantidade_Integral
```

```
write (*,*) '
write (*,*) '
write (*,10) Quantidade_Integral
10 format(5x, 'Quantidade Integral : ', F6.2, '%')
```

```
end subroutine QuantidadeIntegral
```

Dados de entrada-CASO25.dat

```
25      21
50000   100
1.0D-01  4.0D-02
0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```



```

    module Fontes

real*8 , allocatable :: S_Mais(:)

    end module Fontes

! Fluxo de dados Solucao
! =====

module Solucao

real*8 , allocatable :: Funcao_Importancia(:, :, :)

end module Solucao

subroutine LiberaMemoria

use Fontes

use Solucao

use Matrices

deallocate (S_Mais)

deallocate (Alfa)

deallocate (H)

deallocate (Funcao_Importancia)

end subroutine LiberaMemoria

subroutine LeDadosEntrada

use DadosEntrada

implicit none

character (len=20) :: Nome_Arquivo

! Leitura do nome do arquivo de dados de entrada
! =====

write (*,10)

```

```

10 format(//, 5X, 'Nome do arquivo de dados de entrada : ', $)

   read (*,20) Nome_Arquivo
20 format(A20)

!  Abertura do arquivo de dados de entrada
!  =====

open (unit=1, file=Nome_Arquivo, status='old')

   read (1,*) Numero_Total_Estados, Numero_Estados_Derivadas_Parciais

   read (1,*) Numero_Intervalos_J, Numero_Intervalos_L

   read (1,*) Delta_X, Delta_T

   if (Delta_T > Delta_X) then

       write (*,*) '
       write (*,*) '
       write (*,*) ' Delta_T e maior do que Delta_X, logo nao e possivel continuar.'
       stop

   end if

close(unit=1)

end subroutine LeDadosEntrada

```

```

subroutine Inicializacao

```

```

   use Solucao

   use DadosEntrada , only : Numero_Intervalos_J , Numero_Intervalos_L ,
Numero_Total_Estados

   implicit none

   integer :: I , J , L

```

```

! Inicializa as Funções Importâncias com zero
! =====

do I=1,Numero_Total_Estados

  do L=1,Numero_Intervalos_L+1

    do J=1,Numero_Intervalos_J+1

      Funcao_Importancia(I,J,L) = 0.0D+00

    end do

  end do

end do

end subroutine Inicializacao

program Importancia

  real :: Instante_Inicial   , Instante_Final

  call LeDadosEntrada

! Toma o instante de início dos cálculos
! =====

  call cpu_time (Instante_Inicial)

! Chama a rotina que aloca espaço em memória
! =====

  call AlocaoMemoria

  call DadosProblema

  call Inicializacao

  call Calculos

! Toma o instante do fim dos cálculos
! =====

```

```

    call cpu_time (Instante_Final)
!   Mostra o tempo total de execução dos cálculos
!   =====

    write (6,10) Instante_Final - Instante_Inicial
10  format(//, 'Tempo Total de Calculo : ', F7.2, ' segundos')
    pause

!   Toma o instante de início de gravação
!   =====

    call cpu_time (Instante_Inicial)

    call GravadadosSaida

!   Chama a rotina para liberar espaço na memória
!   =====

    call LiberaMemoria

!   Toma o instante do fim de gravação
!   =====

    call cpu_time (Instante_Final)

!   Mostra o tempo total de gravação
!   =====

    write (6,20) Instante_Final - Instante_Inicial
20  format(//, 'Tempo Total de Gravação : ', F7.2, ' segundos')

end program Importancia

subroutine GravaDadosSaida

    use Solucao

    use DadosEntrada , only : Numero_Total_Estados , Numero_Intervalos_J ,
Numero_Intervalos_L

    implicit none

    integer :: I , J , L , K

```

! Gravação das importâncias no arquivo de saída

! =====

```
open (unit=2, file='importancias.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')
```

```
K = 1
```

```
do L=1,Numero_Intervalos_L+1
```

```
do J=1,Numero_Intervalos_J+1
```

```
write (2,rec=K) (Funcao_Importancia(I,J,L), I=1,Numero_Total_Estados)
```

```
K = K + 1
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close(unit=2)
```

```
end subroutine GravaDadosSaida
```

```
subroutine DadosProblema
```

```
use Fontes
```

```
use Matrices
```

```
use DadosEntrada
```

```
implicit none
```

```
integer :: I , J , K , L
```

```
real*8 :: X , Base , Mi1 , Mi2 , Mi3 , Mi4 , &
Delta , Gama , Lambda1 , Lambda2 , Lambda3 , Lambda4 , &
Razao , Tempo_Missao
```

! Parâmetros da distribuição de probabilidades

! =====

```
Gama = 1.322D+00
```

Delta = 7.95D+02

Razao = Gama / Delta

! Inicializa todos os elementos das matrizes com zero

! =====

do I=1,Numero_Total_Estados

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Alfa(I,J) = 0.0D+00

do K=1,Numero_Total_Estados

H(I,K,J) = 0.0D+00

end do

end do

S_Mais(I) = 0.0D+00

end do

! Cálculo do termo de fonte das equações da Função Importância

! =====

Tempo_Missao = Numero_Intervalos_L * Delta_T

do I=4,Numero_Total_Estados

S_Mais(I) = 1.0D+00 / Tempo_Missao

end do

! Taxas de falha constantes

! =====

Lambda1 = 1.0D-05

Lambda3 = 1.0D-04

Lambda4 = 5.0D-04

! Taxas de reparo constantes

! =====

Mi1 = 1.0D-02

Mi2 = 2.0D-02

Mi3 = 1.0D-02

Mi4 = 2.0D-03

! Cálculo das variáveis dependentes de x

! =====

X = 0.0D+00

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Base = X / Delta

! Cálculo da taxa de falha dependente do tempo de envelhecimento

!

=====
Lambda2 = Razao * (Base ** (Gama - 1.0D+00))

! Elementos não nulos da matriz Alfa

! =====

Alfa(1,J) = - (Lambda1 + Lambda2 + Lambda3 + lambda4)

Alfa(2,J) = - (Lambda1 + Lambda2 + Lambda3 + Mi4)

Alfa(3,J) = - (Lambda1 + Lambda2 + Lambda4 + Mi3)

Alfa(4,J) = - (Lambda1 + Lambda3 + 2.0D+00 * Lambda4 + Mi2)

Alfa(5,J) = - (2.0D+00 * Lambda2 + Lambda3 + Lambda4 + Mi1)

Alfa(6,J) = - (Lambda1 + Lambda2 + Mi4)

Alfa(7,J) = - (Lambda1 + Lambda2 + Mi3)

Alfa(8,J) = - (Lambda3 + Mi2)

Alfa(9,J) = - (Lambda4 + Mi2)

Alfa(10,J) = - (Lambda2 + Lambda3 + Mi1)

Alfa(11,J) = - (Lambda4 + Mi1)

Alfa(12,J) = - (Lambda1 + Mi4)

Alfa(13,J) = - (2.0D+00 * Lambda4 + Mi1)

Alfa(14,J) = - (Lambda3 + Lambda4 + Mi2)

Alfa(15,J) = - (Lambda4 + Mi3)

Alfa(16,J) = - (Lambda3 + Mi4)

Alfa(17,J) = - (Lambda3 + 2.D+00 * Mi1 + Mi4)

Alfa(18,J) = - (Lambda2 + Mi1)

$$\text{Alfa}(19,J) = - (\text{Lambda}2 + \text{Mi}1)$$

$$\text{Alfa}(20,J) = - (\text{Lambda}1 + \text{Mi}2)$$

$$\text{Alfa}(21,J) = - (\text{Lambda}1 + \text{Mi}2)$$

$$\text{Alfa}(22,J) = - (\text{Mi}2 + \text{Mi}4)$$

$$\text{Alfa}(23,J) = - \text{Mi}3$$

$$\text{Alfa}(24,J) = - \text{Mi}1$$

$$\text{Alfa}(25,J) = - \text{Mi}1$$

! Elementos não nulos da matriz H

! =====

$$\text{H}(1,2,J) = \text{Lambda}4$$

$$\text{H}(1,3,J) = \text{Lambda}3$$

$$\text{H}(1,4,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(1,5,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(2,1,J) = \text{Mi}4$$

$$\text{H}(2,6,J) = \text{Lambda}3$$

$$\text{H}(2,8,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(2,10,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(3,1,J) = \text{Mi}3$$

$$\text{H}(3,7,J) = \text{Lambda}4$$

$$\text{H}(3,9,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(3,11,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(4,1,J) = \text{Mi}2$$

$$\text{H}(4,8,J) = \text{Lambda}4$$

$$\text{H}(4,9,J) = \text{Lambda}3$$

$$\text{H}(4,12,J) = \text{Lambda}4$$

$$\text{H}(4,13,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(5,1,J) = \text{Mi}1$$

$$\text{H}(5,10,J) = \text{Lambda}4$$

$$\text{H}(5,11,J) = \text{Lambda}3$$

$$\text{H}(5,13,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(5,14,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(6,3,J) = \text{Mi}4$$

$$\text{H}(6,19,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(6,21,J) = \text{Lambda}2$$

$$\text{H}(7,2,J) = \text{Mi}3$$

$$\text{H}(7,18,J) = \text{Lambda}1$$

$$\text{H}(7,20,J) = \text{Lambda}2$$

$$H(8,2,J) = \text{Mi}2$$
$$H(8,21,J) = \text{Lambda}3$$

$$H(9,3,J) = \text{Mi}2$$
$$H(9,20,J) = \text{Lambda}4$$

$$H(10,2,J) = \text{Mi}1$$
$$H(10,17,J) = \text{Lambda}2$$
$$H(10,19,J) = \text{Lambda}3$$

$$H(11,3,J) = \text{Mi}1$$
$$H(11,18,J) = \text{Lambda}4$$

$$H(12,4,J) = \text{Mi}4$$
$$H(12,17,J) = \text{Lambda}1$$

$$H(13,4,J) = \text{Mi}1$$
$$H(13,16,J) = \text{Lambda}4$$
$$H(13,17,J) = \text{Lambda}4$$

$$H(14,5,J) = \text{Mi}2$$
$$H(14,15,J) = \text{Lambda}3$$
$$H(14,16,J) = \text{Lambda}4$$

$$H(15,14,J) = \text{Mi}3$$
$$H(15,22,J) = \text{Lambda}4$$

$$H(16,14,J) = \text{Mi}4$$
$$H(16,23,J) = \text{Lambda}3$$

$$H(17,8,J) = \text{Mi}1$$
$$H(17,12,J) = \text{Mi}1$$
$$H(17,13,J) = \text{Mi}4$$
$$H(17,25,J) = \text{Lambda}3$$

$$H(18,7,J) = \text{Mi}1$$
$$H(18,24,J) = \text{Lambda}2$$

$$H(19,6,J) = \text{Mi}1$$
$$H(19,25,J) = \text{Lambda}2$$

$$H(20,7,J) = \text{Mi}2$$
$$H(20,23,J) = \text{Lambda}1$$

$$H(21,6,J) = \text{Mi}2$$
$$H(21,22,J) = \text{Lambda}1$$

```

H(22,15,J) = Mi4
H(22,19,J) = Mi2

H(23,16,J) = Mi3

H(24,20,J) = Mi1

H(25,21,J) = Mi1

!   Toma novo valor de x
!   =====

X = X + Delta_X

end do

end subroutine DadosProblema

subroutine Calculos

use DadosEntrada

use Matrices

use Solucao

use Fontes

implicit none

integer :: I      , J      , L      , K

real*8 :: Soma1   , Soma2   , Termo1   , Termo2   , Termo3   , Termo4   , &
          Coef1   , Coef2   , Meio

!   Variáveis auxiliares
!   =====

Meio = 0.5D+00

Coef1 = Meio * (1.0D+00 + Delta_T / Delta_X)
Coef2 = Meio * (1.0D+00 - Delta_T / Delta_X)

!   Cálculos das Funções Importâncias para L
!   =====

```

```

L = Numero_Intervalos_L

do I=1,Numero_Total_Estados

  do J=Numero_Intervalos_J-1,1,-1

    Funcao_Importancia(I,J+1,L) = S_Mais(I) * Delta_T

  end do

  Funcao_Importancia(I,1,L) = 2.0D+00 * Funcao_Importancia(I,2,L) -
Funcao_Importancia(I,3,L)

end do

! Cálculo das Funções Importâncias para os demais l
! =====

do L=Numero_Intervalos_L-1,1,-1

! Cálculos das Funções Importâncias para j > 1
! =====

do J=Numero_Intervalos_J-1,1,-1

! Cálculo das Funções Importâncias com derivadas parciais em x
! =====

do I=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

  Soma1 = 0.0D+00

  do K=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

    Soma1 = Soma1 + H(I,K,J+1) * Funcao_Importancia(K,1,L+1)

  end do

  Soma2 = 0.0D+00

  if (Numero_Estados_Derivadas_Parciais < Numero_Total_Estados) then

    do K=Numero_Estados_Derivadas_Parciais+1,Numero_Total_Estados

      Soma2 = Soma2 + H(I,K,J+1) * Funcao_Importancia(K,J+1,L+1)

    end do

  end if

end do

```

```

end if

Termo1 = Coef1 * Funcao_Importancia(I,J+2,L+1)

        Termo2 = Coef2 * Funcao_Importancia(I,J,L+1)

        Termo3 = Alfa(I,J+1) * Funcao_Importancia(I,J+1,L+1)

        Termo4 = Soma1 + Soma2 + S_Mais(I)

        Funcao_Importancia(I,J+1,L) = Termo1 + Termo2 + (Termo3 + Termo4) *
Delta_T

        end do

!       Cálculo das Funções Importâncias com derivadas parciais apenas em t
!
=====
==

if (Numero_Estados_Derivadas_Parciais < Numero_Total_Estados) then

do I=Numero_Estados_Derivadas_Parciais+1,Numero_Total_Estados

        Soma1 = 0.0D+00

        do K=1,Numero_Estados_Derivadas_Parciais

                Soma1 = Soma1 + H(I,K,J+1) * Funcao_Importancia(K,1,L+1)

        end do

        Termo1 = Meio * Funcao_Importancia(I,J+2,L+1)

        Termo2 = Meio * Funcao_Importancia(I,J,L+1)

                Termo3 = Alfa(I,J+1) * Funcao_Importancia(I,J+1,L+1)

                Termo4 = Soma1 + S_Mais(I)

        Funcao_Importancia(I,J+1,L) = Termo1 + Termo2 + (Termo3 + Termo4) *
Delta_T

        end do

end if

```

```

end do

!   Cálculos das Funções Importâncias para j = 1
!   =====

do I=1,Numero_Total_Estados

    Funcao_Importancia(I,1,L) = 2.0D+00 * Funcao_Importancia(I,2,L) -
    Funcao_Importancia(I,3,L)

end do

end do

end subroutine Calculos

```

QUANTIDADE INRTEGRAL – Subrotinas

```

program Quantidade

call LeDadosEntrada

call Calculos

end program Quantidade

```

Fluxo de dados DadosEntrada

```
! =====
```

```

module DadosEntrada

    integer :: Numero_Intervalos_J , Numero_Total_Estados

    real*8 :: Delta_X

end module DadosEntrada

```

! Fluxo de dados Funcoes

```
! =====
```

```

module Funcoes

real*8 , allocatable :: Funcao(:) , Funcao_Importancia(:, :)

end module Funcoes

```

```
subroutine LeDadosEntrada
```

```
  use DadosEntrada
```

```
  use Funcoes
```

```
  implicit none
```

```
  integer :: I      , J      , L
```

```
  character (len=20) :: Nome_Arquivo
```

```
!  Leitura do nome do arquivo de dados de entrada
```

```
!  =====
```

```
  write (*,10)
```

```
10 format(//, 5X, 'Nome do arquivo de dados de entrada : ', $)
```

```
  read (*,20) Nome_Arquivo
```

```
20 format(A20)
```

```
!  Abertura do arquivo de dados de entrada
```

```
!  =====
```

```
  open (unit=1, file=Nome_Arquivo, status='old')
```

```
    read (1,*) Numero_Total_Estados
```

```
    read (1,*) Numero_Intervalos_J
```

```
    read (1,*) Delta_X
```

```
  close(unit=1)
```

```
!  Alocação de memória
```

```
!  =====
```

```
  allocate (Funcao_Importancia(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1))
```

```

! Leitura do arquivo com as Importâncias
! =====

open (unit=1, file='importancias.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')

L = 1

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

  read (1,rec=L) (Funcao_Importancia(I,J), I=1,Numero_Total_Estados)

  L = L + 1

end do

close(unit=1)

end subroutine LeDadosEntrada

subroutine Calculos

use Funcoes

use DadosEntrada , only : Numero_Intervalos_J , Delta_X

implicit none

integer :: J

real*8 :: X , Base , Beta , &
         Delta , Razao , Tempo_Missao

real*8 :: Integral , Densidade , Quantidade_Integral

! Alocação de memória
! =====

allocate (Funcao(Numero_Intervalos_J+1))

! Parâmetros da distribuição de probabilidades
! =====

```

Beta = 1.322D+00

Delta = 7.95D+02

Razao = Beta / Delta

! Cálculo das variáveis dependentes de x
! =====

X = 0.0D+00

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

Base = X / Delta

! Cálculo da densidade de probabilidade
! =====

Densidade = Razao * (Base ** (Beta - 1.0D+00)) * `dexp`(- Base ** Beta)

! Cálculo do produto da densidade de probabilidade pela Função Importância
! =====

Funcao(J) = Densidade * Funcao_Importancia(1,J)

! Toma novo valor de x
! =====

X = X + Delta_X

end do

call CalculaIntegral (Integral)

Quantidade_Integral = 1.0D+02 * Integral

```
write (*,*) '
write (*,*) '
write (*,10) Quantidade_Integral
10 format(5x, 'Quantidade Integral : ', F6.2, '%')
```

pause

```
! Liberação de memória
! =====
```

```
deallocate (Funcao)
```

```
deallocate (Funcao_Importancia)
```

```
end subroutine Calculos
```

```
subroutine CalculaIntegral (Integral)
```

```
use Funcoes , only : Funcao
```

```
use DadosEntrada , only : Numero_Intervalos_J , Delta_X
```

```
implicit none
```

```
integer :: J , Indice , Numero_Intervalos
```

```
real*8 :: Termo1 , Termo2 , Integral , Soma , &  
         Termo3 , Termo4
```

```
! Cálculo do primeiro termo da fórmula
! =====
```

```
Termo1 = Funcao(1)
```

```
! Cálculo do segundo termo da fórmula
! =====
```

```
Numero_Intervalos = Numero_Intervalos_J / 2
```

```
Soma = 0.0D+00
```

```
do J=1,Numero_Intervalos
```

```
    Indice = 2 * J
```

```
    Soma = Soma + Funcao(Indice)
```

```
end do
```

```
Termo2 = 4.0D+00 * Soma
```

```
! Cálculo do terceiro termo da fórmula
! =====
```

```
Soma = 0.0D+00
```

```
do J=1,Numero_Intervalos-1
```

```
    Indice = 2 * J + 1
```

```
    Soma = Soma + Funcao(Indice)
```

```
end do
```

```
Termo3 = 2.0D+00 * Soma
```

```
! Cálculo do quarto termo da fórmula
! =====
```

```
Indice = Numero_Intervalos_J + 1
```

```
Termo4 = Funcao(Indice)
```

```
! Cálculo da inntegral
! =====
```

```
Integral = (Termo1 + Termo2 + Termo3 + Termo4) * Delta_X / 3.0D+00
```

```
end subroutine CalculaIntegral
```

```
Dados de entrada-CASO25.dat
```

```
25
```

```
50000
```

```
1.0D-01
```

SENSIBILIDADE - Subrotinas

```
program Sensibilidade
```

```
    call LeDadosEntrada
```

```
    call DadosProblema
```

```
    call Calculos
```

```

! Chama a rotina para liberar espaço na memória
! =====

call LiberaMemoria

end program Sensibilidade

! Fluxo de dados DadosEntrada
! =====

module DadosEntrada

integer , allocatable :: Elemento_Nao_Nulo(:,:)

integer :: Numero_Intervalos_J , Numero_Intervalos_L ,
Numero_Total_Estados , Numero_Estados_Derivadas_Parciais

real*8 :: Delta_X , Delta_T

end module DadosEntrada

! Fluxo de dados Funcoes
! =====

module Funcoes

real*8 , allocatable :: Funcao_Importancia(:,,:) , Densidade_Probabilidade(:,,:) ,
Probabilidade_Estado(:,:)

end module Funcoes

subroutine LiberaMemoria

use DadosEntrada

use Funcoes

deallocate (Elemento_Nao_Nulo)

deallocate (Funcao_Importancia)

deallocate (Probabilidade_Estado)

deallocate (Densidade_Probabilidade)

```

```

end subroutine LiberaMemoria

subroutine LeDadosEntrada

  use DadosEntrada

  use Funcoes

  implicit none

  integer :: I , J , L , K

  character (len=20) :: Nome_Arquivo

  ! Leitura do nome do arquivo de dados de entrada
  ! =====

  write (*,10)
10  format(//, 5X, 'Nome do arquivo de dados de entrada : ', $)

  read (*,20) Nome_Arquivo
20  format(A20)

  ! Abertura do arquivo de dados de entrada
  ! =====

  open (unit=1, file=Nome_Arquivo, status='old')

  read (1,*) Numero_Total_Estados, Numero_Estados_Derivadas_Parciais

  read (1,*) Numero_Intervalos_J, Numero_Intervalos_L

  read (1,*) Delta_X, Delta_T

  close(unit=1)

  ! Chama a rotina que aloca espaço em memória
  ! =====

  call AlocaoMemoria

```

! Leitura do arquivo com as Probabilidades

! =====

```
open (unit=3, file='probabilidades.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')
```

```
do L=1,Numero_Intervalos_L+1
```

```
    read (3,rec=L) (Probabilidade_Estado(I,L), I=1,Numero_Total_Estados)
```

```
end do
```

```
close(unit=3)
```

! Leitura do arquivo com as densidades de probabilidade

! =====

```
open (unit=4, file='densidades.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')
```

```
K = 1
```

```
do L=1,Numero_Intervalos_L+1
```

```
    do J=1,Numero_Intervalos_J+1
```

```
        read (4,rec=K) (Densidade_Probabilidade(I,J,L), I=1,Numero_Total_Estados)
```

```
        K = K + 1
```

```
    end do
```

```
end do
```

```
close(unit=4)
```

! Leitura do arquivo com as Importâncias

! =====

```
open (unit=2, file='importancias.dat', recl=256, form='binary', access='direct',
status='unknown')
```

```
K = 1
```

```
do L=1,Numero_Intervalos_L+1
```

```

do J=1,Numero_Intervalos_J+1

    read (2,rec=K) (Funcao_Importancia(I,J,L), I=1,Numero_Total_Estados)

    K = K + 1
end do

end do

close(unit=2)

end subroutine LeDadosEntrada

subroutine DadosProblema

    use DadosEntrada

    implicit none

    integer :: I      , K

!   Indicador de elemento não nulo da matriz H
!   =====

do I=1,Numero_Total_Estados

    do K=1,Numero_Total_Estados

        Elemento_Nao_Nulo(I,K) = 0

    end do

end do

Elemento_Nao_Nulo(1,2) = 1
Elemento_Nao_Nulo(1,3) = 1
Elemento_Nao_Nulo(1,4) = 1
Elemento_Nao_Nulo(1,5) = 1

Elemento_Nao_Nulo(2,1) = 1
Elemento_Nao_Nulo(2,7) = 1
Elemento_Nao_Nulo(2,8) = 1
Elemento_Nao_Nulo(2,10)= 1

Elemento_Nao_Nulo(3,1) = 1

```

Elemento_Nao_Nulo(3,6) = 1
Elemento_Nao_Nulo(3,9) = 1
Elemento_Nao_Nulo(3,11)= 1

Elemento_Nao_Nulo(4,12)= 1
Elemento_Nao_Nulo(4,13)= 1

Elemento_Nao_Nulo(5,1) = 1
Elemento_Nao_Nulo(5,14)= 1

Elemento_Nao_Nulo(6,2) = 1
Elemento_Nao_Nulo(6,19)= 1
Elemento_Nao_Nulo(6,21)= 1

Elemento_Nao_Nulo(7,3) = 1
Elemento_Nao_Nulo(7,18)= 1
Elemento_Nao_Nulo(7,20)= 1

Elemento_Nao_Nulo(8,4) = 1
Elemento_Nao_Nulo(8,17)= 1

Elemento_Nao_Nulo(9,4) = 1

Elemento_Nao_Nulo(10,2)= 1
Elemento_Nao_Nulo(10,5)= 1

Elemento_Nao_Nulo(11,3)= 1
Elemento_Nao_Nulo(11,5)= 1

Elemento_Nao_Nulo(12,4) =1
Elemento_Nao_Nulo(12,17)=1

Elemento_Nao_Nulo(13,4)= 1
Elemento_Nao_Nulo(13,17)=1

Elemento_Nao_Nulo(14,15)=1
Elemento_Nao_Nulo(14,16)=1

Elemento_Nao_Nulo(15,14)=1
Elemento_Nao_Nulo(15,22)=1

Elemento_Nao_Nulo(16,13)=1
Elemento_Nao_Nulo(16,14)=1
Elemento_Nao_Nulo(16,23)=1

Elemento_Nao_Nulo(17,12)=1
Elemento_Nao_Nulo(17,13)=1

```
Elemento_Nao_Nulo(18,7)= 1  
Elemento_Nao_Nulo(18,11)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(19,6)= 1  
Elemento_Nao_Nulo(19,10)=1  
Elemento_Nao_Nulo(19,22)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(20,9) =1  
Elemento_Nao_Nulo(20,24)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(21,8) =1  
Elemento_Nao_Nulo(21,25)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(22,15)=1  
Elemento_Nao_Nulo(22,21)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(23,16)=1  
Elemento_Nao_Nulo(23,20)=1
```

```
Elemento_Nao_Nulo(25,17)=1
```

```
end subroutine DadosProblema
```

```
subroutine Calculos
```

```
use DadosEntrada
```

```
use Funcoes
```

```
implicit none
```

```
integer :: I , J , L , K
```

```
real*8 :: Termo1, Integral, Derivada
```

```
real*8 , dimension(50001) :: Funcao, Integrais_X
```

```
open (unit=1, file='Saida.dat', status='unknown')
```

```
do I=1,Numero_Total_Estados
```

```
do K=1,Numero_Total_Estados
```

```

if (Elemento_Nao_Nulo(I,K) == 1) then
!   Cálculo do primeiro termo da derivada
!   =====

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

    Funcao(L) = Funcao_Importancia(I,1,L) * Probabilidade_Estado(K,L)

end do

!   Cálculo das integrais na variável x
!   =====

call CalculaIntegral (Numero_Intervalos_L, Funcao, Delta_T, Integral)

Termo1 = Integral

!   Cálculo do segundo termo da derivada
!   =====

do L=1,Numero_Intervalos_L+1

    do J=1,Numero_Intervalos_J+1

        Funcao(J) = Funcao_Importancia(K,J,L) * Densidade_Probabilidade(K,J,L)

    end do

!   Cálculo das integrais na variável x
!   =====

    call CalculaIntegral (Numero_Intervalos_J, Funcao, Delta_X, Integral)

    Integrais_X(L) = Integral

end do

!   Cálculo das integrais na variável t
!   =====

call CalculaIntegral (Numero_Intervalos_L, Integrais_X, Delta_T, Integral)

!   Cálculo da derivada
!   =====

Derivada = Termo1 - Integral

```

```

        write (1,10) I, K, Derivada, Termo1, Integral
10      format(/,5x, 2I4, 3E14.4)

        end if

        end do

    end do

close (unit=1)

end subroutine Calculos

subroutine CalculaIntegral (Numero_Pontos, Funcao, Delta, Integral)

use Funcoes

implicit none

integer :: N      , Indice      , Numero_Pontos      , Numero_Intervalos

real*8 :: Termo1      , Termo2      , Soma      , Integral      , &
        Termo3      , Termo4      , Delta

        real*8 , dimension(50001) :: Funcao

!  Cálculo do primeiro termo da fórmula
!  =====

Termo1 = Funcao(1)

!  Cálculo do segundo termo da fórmula
!  =====

Numero_Intervalos = Numero_Pontos / 2

Soma = 0.0D+00

do N=1,Numero_Intervalos

    Indice = 2 * N

```

```

    Soma = Soma + Funcao(Indice)

end do

Termo2 = 4.0D+00 * Soma

! Cálculo do terceiro termo da fórmula
! =====

Soma = 0.0D+00

do N=1,Numero_Intervalos-1

    Indice = 2 * N + 1

    Soma = Soma + Funcao(Indice)

end do

Termo3 = 2.0D+00 * Soma

! Cálculo do quarto termo da fórmula
! =====

Indice = Numero_Pontos + 1

Termo4 = Funcao(Indice)

! Cálculo da inntegral
! =====

Integral = (Termo1 + Termo2 + Termo3 + Termo4) * Delta / 3.0D+00

end subroutine CalculaIntegral

```

```

subroutine AllocacaoMemoria

use DadosEntrada

use Funcoes

allocate (Elemento_Nao_Nulo(Numero_Total_Estados,Numero_Total_Estados))

allocate (Probabilidade_Estado(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_L+1))

allocate
(Funcao_Importancia(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1,Numero_Intervalos
_L+1))

allocate
(Densidade_Probabilidade(Numero_Total_Estados,Numero_Intervalos_J+1,Numero_Inter
valos_L+1))

end subroutine AllocacaoMemoria

```

Dados de entrada-CASO25.dat

```

25      21
50000   100
1.0D-01  4.0D-02

```