



SIMULAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO SUBCRÍTICA DE NÊUTRONS ATRAVÉS
DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HÍBRIDA DA DIFUSÃO COM FONTES
EXTERNAS DE NÊUTRONS

Adilson Costa da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011

SIMULAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO SUBCRÍTICA DE NÊUTRONS ATRAVÉS
DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HÍBRIDA DA DIFUSÃO COM FONTES
EXTERNAS DE NÊUTRONS

Adilson Costa da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.

Prof. Adimir dos Santos, Ph.D.

Prof. Ricardo Carvalho de Barros, Ph.D.

Prof. Roberto David Martinez Garcia, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

FEVEREIRO DE 2011

Silva, Adilson Costa da

Simulação da Multiplicação Subcrítica de Nêutrons
através da Solução da Equação Híbrida da Difusão com
Fontes Externas de Nêutrons/Adilson Costa da Silva.

- Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XII, 58 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva,

Aquilino Senra Martinez

Tese (doutorado) - UFRJ / COPPE / Programa
de Engenharia Nuclear, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 57-58.

1. Equação da Difusão de Nêutrons. 2. Método
de Expansão Nodal. 3. Fonte Externa de Nêutrons.
I. Silva, Fernando Carvalho da *et al.* II. Universidade
Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de
Engenharia Nuclear. III. Título.

Dedicatória

Dedico essa obra a Cristo pelo entendimento e clareza no desenvolvimento desta tese.

Aos meus Pais pelo apoio e incentivo, em especial a minha mãe que sempre acreditou em mim e que foi a minha grande incentivadora a continuar na busca de novos conhecimentos.

A minha esposa Michele pelo apoio e dedicação incondicional e a minha filha Isabela por lindos momentos de descontração.

Agradecimentos

Ao professor Aquilino Senra Martinez, pela dedicação, paciência e ensinamentos transmitidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Fernando Carvalho da Silva, pela orientação, apoio e pelos ensinamentos e sugestões transmitidos ao longo desses anos.

Ao Programa de Engenharia Nuclear (PEN/COPPE/UFRJ) por sua estrutura e organização.

Ao Laboratório de Monitoração de Processos (LMP) pelo apoio e ajuda na elaboração deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro, concedendo a bolsa de estudos, permitindo a realização deste trabalho.

Aos meus amigos do Laboratório de Monitoração de Processos (LMP).

Aos meus Pais, pois sem a ajuda de vocês não conseguiria chegar tão longe.

"Se eu vi mais longe, foi por
estar de pé sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SIMULAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO SUBCRÍTICA DE NÊUTRONS ATRAVÉS
DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HÍBRIDA DA DIFUSÃO COM FONTES
EXTERNAS DE NÊUTRONS

Adilson Costa da Silva

Fevereiro/2011

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

Usamos a equação híbrida da difusão de nêutrons, em geometria cartesiana com fontes externas de nêutrons para prever a multiplicação subcrítica de nêutrons em um reator nuclear de água pressurizada, usando a curva $1/M$ para obtenção da condição de criticalidade. O método de diferenças finitas de malha grossa foi desenvolvido para calcular o fluxo adjunto e obter os valores da reatividade no reator. Os resultados obtidos foram comparados com os valores de referência para validar a metodologia apresentada nesta tese.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SIMULATION OF NEUTRON SUBCRITICAL MULTIPLICATION THROUGH
THE SOLUTION OF THE DIFFUSION HYBRID EQUATION WITH
EXTERNAL NEUTRON SOURCES

Adilson Costa da Silva

February/2011

Advisors: Fernando Carvalho da Silva
Aquilino Senra Martinez

Department: Nuclear Engineering

We used the neutron diffusion hybrid equation in cartesian geometry with external neutron sources to predict the subcritical multiplication in a pressurized water nuclear reactor, using $1/M$ curve in order to obtain the criticality condition. A coarse mesh finite difference method was developed for the adjoint flux calculation and to obtain the reactivity values of the reactor. The results obtained were compared with benchmark values in order to validate the methodology presented in this thesis.

Índice

1	Introdução	1
2	Método de Expansão Nodal	4
2.1	Coeficientes Primários	13
2.2	Coeficientes b_{kgu}^n da expansão de $d_{gu}^n(u)$	14
2.3	Coeficientes a_{kgu}^n da expansão de $L_{gu}^n(u)$	15
2.4	Coeficientes Secundários	18
2.5	Correntes Parciais de Saída	20
2.6	Equação de Balanço Nodal	21
3	Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa	22
4	Cálculo da Reatividade Subcrítica	31
4.1	Bancos de Barras de Controle totalmente inseridos no núcleo	32
4.2	Bancos de Barras de Controle parcialmente inseridos no núcleo	33
5	Cálculo do Fator Potência	35
6	Apresentação e Análise de Resultados	38
6.1	Problema Benchmark IAEA	38
6.2	Problema de Fonte Fixa	42
6.3	Equação Híbrida da Difusão de Nêutrons	43
6.4	Resultados obtidos pelo Método Proposto	46

7	Conclusões	51
A	Seção de Choque ponderada no fluxo	54
	Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

2.1	Dimensões do nodo n	7
2.2	Configuração de barra de controle no nodo n	8
2.3	Área transversal à direção u	9
2.4	Representação dos nodos vizinhos ao nodo n	17
3.1	Representação de nodos adjacentes ao nodo n	26
5.1	Fator de contribuição do nodo à potência do núcleo do reator.	36
5.2	Fator de contribuição do EC para o núcleo.	37
6.1	Plano bidimensional com simetria de 1/4 do núcleo do reator IAEA.	39
6.2	Configuração no núcleo reator IAEA no plano xz	39
6.3	Cálculo dos desvios relativos percentuais dos fatores de potência do EC.	41
6.4	Fluxo térmico	42
6.5	Fluxo rápido	42
6.6	Configuração de 1/4 de núcleo com EC e Refletor.	44
6.7	Configuração de 1/4 de núcleo com BBC.	44
6.8	Parâmetros α e β	47
6.9	Comparação da curva $1/M$	50
A.1	Barra de controle parcialmente inserida no nodo.	54

Lista de Tabelas

6.1	Parâmetros nucleares do reator IAEA	41
6.2	Parâmetros nucleares multigrupo	45
6.3	Problema de Autovalor	49
6.4	Problema de Fonte Fixa	49
6.5	Problema Híbrido	50

Capítulo 1

Introdução

A segurança da operação de uma usina nuclear, durante a partida do reator a cada novo início de ciclo, deve ser feita de forma precisa para garantir a subcriticalidade do núcleo do reator. O acompanhamento da multiplicação de nêutrons no núcleo do reator durante a operação de partida da usina nuclear pode ser realizado em função das retiradas dos bancos de barras de controle do núcleo do reator e/ou em função da diluição da concentração de boro solúvel no circuito primário no núcleo do reator até que a condição de criticalidade seja obtida. A monitoração da multiplicação de nêutrons no sistema, assim como a previsão da condição de criticalidade, pode ser acompanhada através da multiplicação subcrítica $1/M$ [1], em função das posições dos bancos de barras de controle durante a partida do reator.

Sabemos que no primeiro ciclo do reator não há nêutrons¹ presentes no núcleo para que se inicie o processo de geração de nêutrons através das fissões nucleares, isto se deve à presença de novos elementos combustíveis no carregamento do núcleo nesse novo ciclo. Logo, as fontes externas de nêutrons são de fundamental importância para dar início ao processo de geração de nêutrons no núcleo do reator.

As fontes externas de nêutrons existentes no núcleo emitem nêutrons isotropicamente a uma taxa S_o nêutrons/seg e ficam localizadas em regiões específicas do reator varrendo todo o núcleo. Na operação da usina nuclear, especialmente após a recarga do núcleo do reator, as fontes externas de nêutrons são responsáveis pela estabilização da operabilidade dos detectores externos de nêutrons,

¹Não contabilizando a fissão espontânea do urânio ^{238}U , cuja meia-vida é de aproximadamente 4,5 bilhões de anos.

que devem ter no mínimo 2cps (contagem/seg), ou seja, essas fontes são responsáveis pelas correções das flutuações das contagens de nêutrons na partida do reator, devido o fluxo de nêutrons no reator ser muito baixo.

As fontes secundárias, por exemplo, ^{124}Sb (Antimônio) e ^9_4Be (Berílio²), geralmente, são utilizadas após o primeiro ciclo para a geração de nêutrons no reator. Essas fontes são conhecidas como fontes regenerativas [2], para no caso de uma parada durante a operação da usina elas terem influência suficiente para se necessário sensibilizarem os detectores de nêutrons. Essas fontes emitem aproximadamente $2,7 \times 10^9$ nêutrons/seg/grama e têm uma meia-vida (nível de nêutrons) relativamente baixa de aproximadamente 60 dias. É importante destacar que as fontes primárias, por exemplo, ^{252}Cf (Califórnio³) geralmente são utilizadas no primeiro carregamento do núcleo do reator, cujas taxas de emissão de nêutrons são de aproximadamente $2,3 \times 10^{12}$ nêutrons/seg/grama e têm uma meia-vida (nível de nêutrons) relativamente alta de aproximadamente 2,65 anos.

Todo o desenvolvimento da teoria de reatores está relacionado com a produção de nêutrons no reator; com isso, os projetos desenvolvidos para reatores nucleares têm por finalidade sustentar e estabilizar as reações de fissão nuclear. Este balanço de nêutrons no reator é obtido em função da quantidade de nêutrons que é produzida e removida no reator. Para acompanharmos a multiplicação de nêutrons no reator, utilizaremos a equação da difusão de nêutrons tridimensional, em geometria cartesiana e com dois grupos de energia, considerando simultaneamente multiplicação de nêutrons no reator através dos processos de fissões nucleares e fontes externas de nêutrons em sistemas subcríticos.

A teoria da difusão multigrupo tem sido bastante usada em cálculos globais de reatores nucleares onde são feitas simulações utilizando dados específicos de um reator, para o acompanhamento da operação da usina nuclear em um dado ciclo do reator e para previsão da condição de criticalidade. Estes cálculos são obtidos resolvendo a equação da difusão para o problema de autovalor ou de fonte fixa [3].

O principal objetivo desta tese é o desenvolvimento de um método iterativo que permita resolver uma equação híbrida da difusão de nêutrons para o acompanhamento

²Cuja reação é: $^4_2\alpha + ^9_4\text{Be} \rightarrow ^{13}_6\text{C}^* \rightarrow ^{12}_6\text{C} + ^1_0n$.

³Fissão espontânea.

da multiplicação de nêutrons no reator, desde a partida do reator onde as fontes externas de nêutrons são responsáveis pela produção de nêutrons no núcleo do reator até a condição de criticalidade onde o termo de fissão nuclear é predominante nos processos de geração de nêutrons no núcleo do reator.

No capítulo 2 discutiremos detalhadamente os processos de produção e perda de nêutrons no reator. Para isso, apresentaremos o Método de Expansão Nodal (NEM) [4] usado para resolver a equação da difusão de nêutrons na formulação multigrupo de energia para a obtenção do fluxo escalar de nêutrons.

Com o objetivo de simplificar o cálculo da reatividade subcrítica, no capítulo 3, apresentaremos o Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa (DFMG) [5]. Este método trabalha com dados previamente calculados no método NEM, ou seja, parâmetros nucleares, fluxo de nêutrons e correntes líquidas.

Apresentaremos, no capítulo 4, o método utilizado para calcular a reatividade subcrítica em função da movimentação dos bancos de barras de controle no núcleo, ou seja, para o caso de bancos de barras de controle totalmente e parcialmente inseridos no núcleo do reator. No capítulo 5, apresentaremos o cálculo dos fatores de potência [5].

Para validarmos os programas numéricos desenvolvidos nesta tese de doutorado, comparamos os resultados obtidos no cálculo dos fatores de potência do elemento combustível $f_{Potencia}^{EC}$ com alguns resultados disponíveis na literatura. Os resultados obtidos pela equação híbrida da difusão de nêutron serão apresentados no capítulo 6.

No capítulo 7, apresentaremos as conclusões referentes a esta tese de doutorado.

Capítulo 2

Método de Expansão Nodal

Na década 70, iniciou-se um grande progresso no desenvolvimento de métodos nodais de malha grossa para resolver numericamente a equação da difusão de nêutrons multigrupo. Esses métodos foram capazes de calcular o autovalor e o fluxo de nêutrons médio no nodo com grande precisão, assim como, a distribuição de potência no núcleo do reator, considerando o nodo do tamanho do elemento combustível. Os resultados obtidos foram comparados a partir do cálculo de referência (geralmente cálculo de malha fina). Entre esses métodos, destacaremos o Método de Expansão Nodal (NEM) [4], que utiliza a equação da difusão integrada transversalmente, gerando um conjunto de três equações "unidimensionais" acopladas pelos termos de fuga transversal, cuja solução fornece uma relação entre os fluxos médios e as correntes líquidas médias nas faces do nodo. O método NEM tem seu ponto de partida na equação da continuidade de nêutrons modificada e na Lei de Fick, as quais em geometria cartesiana e estado estacionário, com dois grupos de energia são respectivamente:

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{\partial}{\partial u} J_{gu}(x, y, z) + \Sigma_{rg}(x, y, z)\phi_g(x, y, z) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_{gg'}(x, y, z)\phi_{g'}(x, y, z) + \\ + \alpha\chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu\Sigma_{fg'}(x, y, z)\phi_{g'}(x, y, z) + \beta S_g(x, y, z), \quad g = 1, 2 \quad (2.1)$$

e

$$J_{gu}(x, y, z) = -D_g(x, y, z)\frac{\partial}{\partial u}\phi_g(x, y, z), \quad u = x, y, z, \quad (2.2)$$

onde

$J_{gu}(x, y, z)$: a corrente líquida de nêutrons do grupo g ;

$\Sigma_{rg}(x, y, z)$: a seção de choque macroscópica de remoção do grupo g ;

$\Sigma_{gg'}(x, y, z)$: a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g ;

χ_g : o espectro de fissão do grupo g ;

$\nu\Sigma_{fg'}(x, y, z)$: o produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo g' ;

$S_g(x, y, z)$: a fonte externa de nêutrons do grupo g ;

$\phi_g(x, y, z)$: o fluxo de nêutrons do grupo g ;

$D_g(x, y, z)$: o coeficiente de difusão do grupo g ;

α e β : os parâmetros híbridos da equação.

Além disso, a corrente líquida é escrita em função das correntes parciais [6], ou seja,

$$J_{gu}(x, y, z) \equiv J_{gu}^+(x, y, z) - J_{gu}^-(x, y, z), \quad u = x, y, z. \quad (2.3)$$

A seção de choque macroscópica de espalhamento é representada por

$$\Sigma_{gg'}(x, y, z) = \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(x, y, z), \quad (2.4)$$

enquanto a seção de choque macroscópica de remoção é definida, sendo

$$\Sigma_{rg}(x, y, z) \equiv \Sigma_{ag}(x, y, z) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_s^{g \rightarrow g'}(x, y, z), \quad (2.5)$$

onde $\Sigma_{ag}(x, y, z)$ é a seção de choque macroscópica de absorção.

Os parâmetros α e β são definidos da seguinte forma:

$$\beta \equiv \frac{\rho}{\rho_o}, \quad (2.6)$$

e

$$\alpha \equiv 1 - \beta(1 - \beta), \quad (2.7)$$

onde ρ_o e ρ são, respectivamente, a reatividade inicial e a reatividade calculada no reator, cujo método para calculá-las será apresentado no capítulo 4. Esses parâmetros serão utilizados para ajustar a equação de acordo com o nível de subcriticalidade do núcleo do reator. Durante a partida do reator com os bancos de barras de controle totalmente inseridos no núcleo, esses parâmetros são tais que $\beta = 1$ e $\alpha = 1$, ou seja, teremos a equação da continuidade definida para um problema de fonte fixa. Resolvendo essa equação, podemos obter a reatividade ρ_o , conforme será descrito na seção 4.1. Próximo da condição de criticalidade, com bancos totalmente fora do núcleo do reator, esses parâmetros são tais que $\beta = 0$ e $\alpha = 1$, ou seja, teremos a equação da continuidade de nêutrons definida para um problema de autovalor. Na condição em que os bancos de barras de controle estão parcialmente inseridos no núcleo, a reatividade ρ será calculada de acordo com o que descreveremos na seção 4.2.

Os métodos nodais de malha grossa, como por exemplo, NEM, dividem o volume do núcleo reator em um conjunto de paralelepípedos contíguos, chamados de nodos, nos quais os parâmetros nucleares multigrupos são uniformes. Sendo assim, integrando a equação da continuidade de nêutrons modificada, dada pela Eq.(2.1), no volume $V_n = a_x^n a_y^n a_z^n$ do nodo n , obtemos

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{1}{a_u^n} \left[\bar{J}_{gur}^n - \bar{J}_{gul}^n \right] + \Sigma_{rg}^n \bar{\phi}_g^n = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \beta S_g^n, \quad (2.8)$$

onde o fluxo médio e a fonte externa de nêutrons no nodo são definidos como seguem:

$$\bar{\phi}_g^n \equiv \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \phi_g(x, y, z) dV, \quad (2.9)$$

$$S_g^n \equiv \frac{1}{V_n} \int_{V_n} S_g(x, y, z) dV. \quad (2.10)$$

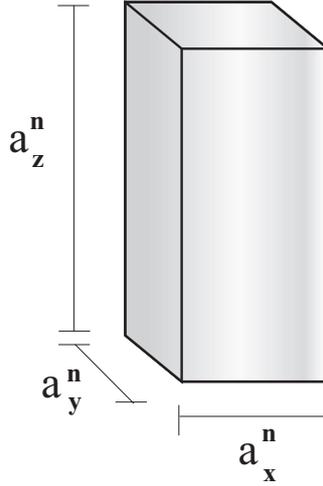


Figura 2.1: Dimensões do nó n .

A Fig.2.1 mostra as dimensões do nó. Os parâmetros nucleares multigrupos são uniformes dentro do nó, logo, são definidos da seguinte forma:

1) Média em volume do nó:

Trata apenas a variação espacial desses parâmetros com a movimentação dos bancos de barras de controle, isto é, apenas uma média em volume,

$$\bar{D}_g^n \equiv \frac{1}{V_n} \int_{V_n} D_g(x, y, z) dV, \quad (2.11)$$

onde \bar{D}_g^n é o coeficiente de difusão de nêutrons do grupo g médio no nó n . Analogamente, podemos definir a seção de choque macroscópica diferencial de espalhamento $\bar{\Sigma}_{gg'}^n$, como segue

$$\bar{\Sigma}_{gg'}^n \equiv \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \Sigma_{gg'}^n(x, y, z) dV.$$

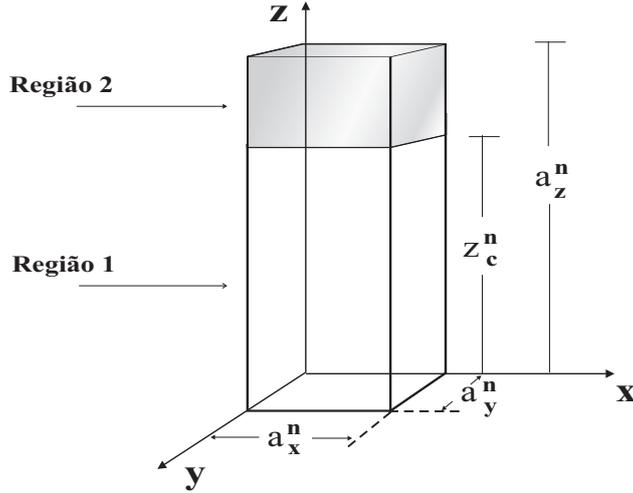


Figura 2.2: Configuração de barra de controle no nó n .

Utilizando a Fig.2.2 e a Eq.(2.11) o coeficiente de difusão médio no nó n , pode ser obtido da seguinte forma:

$$\bar{D}_g^n = \left(\frac{z_c^n}{a_z^n}\right)\bar{D}_g^{n,1} + \left(1 - \frac{z_c^n}{a_z^n}\right)\bar{D}_g^{n,2}, \quad (2.12)$$

onde $\bar{D}_g^{n,1}$ e $\bar{D}_g^{n,2}$ representam, respectivamente, os coeficientes de difusão médios dos materiais das regiões 1 e 2. Note que a seção de choque $\bar{\Sigma}_{gg'}^n$ pode ser calculada da mesma forma, ou seja,

$$\bar{\Sigma}_{gg'}^n = \left(\frac{z_c^n}{a_z^n}\right)\bar{\Sigma}_{gg'}^{n,1} + \left(1 - \frac{z_c^n}{a_z^n}\right)\bar{\Sigma}_{gg'}^{n,2}. \quad (2.13)$$

2) Média em volume do nó ponderada no fluxo:

Devido à movimentação dos bancos de barras de controle, as seções de choque macroscópicas de absorção Σ_{ag}^n e fissão $\nu\Sigma_{fg}^n$ são definidas em função da variação espacial no nó ponderada no fluxo, a qual pode ser representada pela seguinte equação,

$$\Sigma_{Xg}^n \equiv \frac{1}{V_n \bar{\phi}_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) \phi_g(x, y, z) dV, \quad (2.14)$$

onde Σ_{Xg}^n representa as seções de choque macroscópica de fissão e absorção. No apêndice A descreveremos o cálculo da seção de choque dada pela Eq.(2.14).

As correntes líquidas médias na face s da direção u do nodo n (\bar{J}_{gus}^n) são assim definidas:

$$\bar{J}_{gus}^n \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} J_{gu}(u_s^n, v, w) dv dw, \quad u = x, y, z \quad e \quad s = r, l \quad (2.15)$$

com

$$u_s^n = \begin{cases} 0, & \text{se } s = l \text{ (face esquerda do nodo)} \\ a_u^n, & \text{se } s = r \text{ (face direita do nodo)} \end{cases}$$

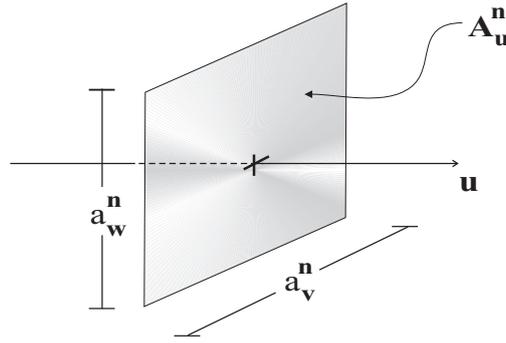


Figura 2.3: Área transversal à direção u .

Se utilizarmos a Lei de Fick na Eq.(2.15) e lembrarmos que o coeficiente de difusão é uniforme no nodo, podemos reescrever a Eq.(2.15) da seguinte forma:

$$\bar{J}_{gus}^n = -\bar{D}_g^n \frac{d}{du} \bar{\psi}_{gu}^n(u) \Big|_{u=u_s^n}, \quad (2.16)$$

onde o fluxo médio de nêutrons $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ numa área $A_u^n = a_v^n a_w^n$ transversal à direção u no nodo n , conforme mostra a Fig.2.3, é definido como:

$$\bar{\psi}_{gu}^n(u) \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} \phi_g(u, v, w) dv dw. \quad (2.17)$$

Para resolver a Eq.(2.8) torna-se necessário relacionar o fluxo médio de nêutrons $\bar{\phi}_g^n$ com as correntes líquidas médias nas faces do nodo \bar{J}_{gu}^n . Este acoplamento é feito através das funções $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$. Esta função é solução da equação unidimensional da difusão de nêutrons, que é resultado da substituição da Eq.(2.2) na Eq.(2.1) e integração da equação resultante numa seção transversal à direção u , obtendo assim, um conjunto de equações unidimensionais, como segue

$$-\bar{D}_g^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\psi}_{gu}^n(u) + \Sigma_{rgu}^n(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u) + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'u}^n(u) \bar{\psi}_{g'u}^n(u) - L_{gu}^n(u) + \beta S_{gu}^n(u), \quad (2.18)$$

onde $L_{gu}^n(u)$ é a fuga transversal à direção u , dada pela seguinte relação:

$$L_{gu}^n(u) \equiv \frac{1}{a_v^n a_w^n} \int_0^{a_v^n} \int_0^{a_w^n} \sum_{\xi=v,w} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-D_g(u, v, w) \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_g(u, v, w) \right] dv dw. \quad (2.19)$$

As seções de choque macroscópicas de remoção $\Sigma_{rgu}^n(u)$ e fissão $\nu \Sigma_{fg'u}^n(u)$ nas faces do nodo, são assim definidas:

$$\Sigma_{Xgu}^n(u) \equiv \frac{1}{A_u^n \bar{\psi}_{gu}^n(u)} \int_{A_u^n} \Sigma_{Xg}(u, v, w) \phi_g(u, v, w) dA. \quad (2.20)$$

Podemos reescrever a Eq.(2.18), em termos das seções de choque médias no volume do nodo, para isso, basta somarmos os seguintes termos nesta equação

$$\Sigma_{ag}^n \bar{\psi}_{gu}^n(u) - \Sigma_{ag}^n \bar{\psi}_{gu}^n(u),$$

e

$$\alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u) - \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u),$$

de onde tiramos que

$$\begin{aligned}
-\bar{D}_g^n \frac{d^2}{du^2} \bar{\psi}_{gu}^n(u) + \Sigma_{rg}^n \bar{\psi}_{gu}^n(u) &= \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u) + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u) - \\
&- L_{gu}^n(u) - d_{gu}^n(u) + \beta S_{gu}^n(u), \tag{2.21}
\end{aligned}$$

onde $d_{gu}^n(u)$ é a função que determina a diferença dos valores das seções de choque ponderadas em fluxo, no caso de barra de controle parcialmente inserida no nodo, dada por

$$d_{gu}^n(u) \equiv \left(\Sigma_{agu}^n(u) - \Sigma_{ag}^n \right) \bar{\psi}_{gu}^n(u) - \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \left(\nu \Sigma_{fg'u}^n(u) - \nu \Sigma_{fg'}^n \right) \bar{\psi}_{g'u}^n(u). \tag{2.22}$$

Na maioria dos métodos nodais, tanto $L_{gu}^n(u)$ quanto $d_{gu}^n(u)$ são aproximadas por funções polinomiais do segundo grau. Portanto, no método NEM, essas funções são escritas da seguinte forma,

$$L_{gu}^n(u) = \sum_{k=0}^2 a_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right), \quad u = x, y, z \tag{2.23}$$

e

$$d_{gu}^n(u) = \sum_{k=0}^2 b_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right), \quad u = x, y, z. \tag{2.24}$$

No método NEM, os fluxos unidimensionais são expressos por uma função polinomial do quarto grau da seguinte forma:

$$\bar{\psi}_{gu}^n(u) = \sum_{k=0}^4 c_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right), \quad u = x, y, z \tag{2.25}$$

onde as funções de base $h_k(\xi)$ [4], para $\xi = u/a_u^n$, são definidos assim:

$$h_0(\xi) = 1$$

$$h_1(\xi) = 2\xi - 1$$

$$h_2(\xi) = 6\xi(1 - \xi) - 1$$

$$h_3(\xi) = 6\xi(1 - \xi)(2\xi - 1)$$

$$h_4(\xi) = 6\xi(1 - \xi)(5\xi^2 - 5\xi + 1)$$

Esses polinômios possuem as seguintes propriedades:

$$h_k(0) = h_k(1) = 0 \quad ; \quad \forall \quad k \geq 3$$

e

$$\int_0^1 h_k(\xi) d\xi = 0 \quad ; \quad \forall \quad k \geq 1$$

$$\int_0^1 h_1(\xi) h_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 1/3, & \text{se } k = 1 \\ 0, & \text{se } k = 2 \\ 1/5, & \text{se } k = 3 \\ 0, & \text{se } k = 4 \end{cases}$$

$$\int_0^1 h_2(\xi) h_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 1 \\ 1/5, & \text{se } k = 2 \\ 0, & \text{se } k = 3 \\ -3/35, & \text{se } k = 4 \end{cases}$$

$$\int_0^1 h_1(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} h_k(\xi) d\xi = \begin{cases} -12, & \text{se } k = 3 \\ 0, & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 h_2(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} h_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 12, & \text{se } k = 4 \\ 0, & \text{se } k \neq 4 \end{cases}$$

A partir dessas definições, podemos determinar os coeficientes da expansão, denominados coeficientes primários (c_{0gu}^n, c_{1gu}^n e c_{2gu}^n) e secundários (c_{3gu}^n e c_{4gu}^n), da Eq.(2.25).

2.1 Coeficientes Primários

Usando as propriedades das funções de base $h_k(u/a_u^n)$ em $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ e impondo a condição de consistência, qual seja,

$$\bar{\phi}_g^n = \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \bar{\psi}_{gu}^n(u) du,$$

obtemos que

$$c_{0gu}^n = \bar{\phi}_g^n. \quad (2.26)$$

Os coeficientes c_{1gu}^n e c_{2gu}^n podem ser determinados em função das condições de contorno no nodo impostas na Eq.(2.25),

$$\bar{\psi}_{gu}^n(u_s^n) = \bar{\phi}_g^n + \sum_{k=1}^2 c_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right),$$

tal que,

$$\bar{\psi}_{gul}^n \equiv \bar{\psi}_{gu}^n(0) = \bar{\phi}_g^n - c_{1gu}^n - c_{2gu}^n, \quad (2.27)$$

$$\bar{\psi}_{gur}^n \equiv \bar{\psi}_{gu}^n(a_u^n) = \bar{\phi}_g^n + c_{1gu}^n - c_{2gu}^n. \quad (2.28)$$

Subtraindo a Eq.(2.28) pela Eq.(2.27), tem-se que

$$c_{1gu}^n = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_{gur}^n - \bar{\psi}_{gul}^n \right). \quad (2.29)$$

Somando as Eqs.(2.27) e (2.28), vem

$$c_{2gu}^n = \bar{\phi}_g^n - \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_{gur}^n + \bar{\psi}_{gul}^n \right). \quad (2.30)$$

Note que, a partir da aproximação da difusão, podemos escrever o fluxo médio na face do nodo em função das correntes parciais, da seguinte maneira:

$$\bar{\psi}_{gus}^n \equiv \bar{\psi}_{gus}^n(u_s^n) = 2 \left(\bar{J}_{gus}^{+n} + \bar{J}_{gus}^{-n} \right), \quad (2.31)$$

onde $u = x, y, z$ e $s = r, l$. Logo, poderíamos reescrever as Eqs.(2.29) e (2.30) em função das correntes parciais $\bar{J}_{gus}^{\pm n}$.

2.2 Coeficientes b_{kgu}^n da expansão de $d_{gu}^n(\mathbf{u})$

Por definição, o valor médio da função $d_{gu}^n(u)$, no volume do nodo é,

$$\bar{d}_{gu}^n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} d_{gu}^n(u) du, \quad (2.32)$$

substituindo a Eq.(2.22), na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \bar{d}_{gu}^n &= \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \Sigma_{agu}^n(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) du - \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \Sigma_{ag}^n \bar{\psi}_{gu}^n(u) du - \\ &- \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \left[\frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \nu \Sigma_{fg'u}^n(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) du - \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\psi}_{g'u}^n(u) du \right]. \end{aligned}$$

Podemos analisar cada termo separadamente, em função de uma seção de choque que represente tanto a absorção e fissão de nêutrons, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} \quad & \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \Sigma_{Xg}^n \bar{\psi}_{gu}^n(u) du = \Sigma_{Xg}^n \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \bar{\psi}_{gu}^n(u) du = \Sigma_{Xg}^n \bar{\phi}_g^n. \\ \mathbf{2)} \quad & \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \Sigma_{Xgu}^n(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) du = \Sigma_{Xg}^n \bar{\phi}_g^n, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} \Sigma_{Xgu}^n(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) du - \Sigma_{Xg}^n \bar{\phi}_g^n = 0,$$

consequentemente,

$$b_{0gu}^n = \bar{d}_{gu}^n = 0. \quad (2.33)$$

Os coeficientes b_{1gu}^n e b_{2gu}^n podem ser obtidos, usando as funções de base $h_k(u/a_u^n)$ e impondo as condições de contorno nas faces do nodo na Eq.(2.24), ou seja,

$$d_{gul}^n \equiv d_{gu}^n(0) = -b_{1gu}^n - b_{2gu}^n, \quad (2.34)$$

$$d_{gur}^n \equiv d_{gu}^n(a_u^n) = b_{1gu}^n - b_{2gu}^n. \quad (2.35)$$

Resolvendo este sistema de equações, concluímos que

$$b_{1gu}^n = \frac{1}{2} \left(d_{gur}^n - d_{gul}^n \right), \quad (2.36)$$

e

$$b_{2gu}^n = -\frac{1}{2} \left(d_{gur}^n + d_{gul}^n \right). \quad (2.37)$$

2.3 Coeficientes a_{kgu}^n da expansão de $L_{gu}^n(\mathbf{u})$

Para determinar os coeficientes a_{kgu}^n , primeiramente, usaremos a definição de valor médio da fuga transversal $L_{gu}^n(u)$, qual seja,

$$\bar{L}_{gu}^n \equiv \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} L_{gu}^n(u) du, \quad (2.38)$$

substituindo a Eq.(2.19) na Eq.(2.38) e fazendo uso da Lei de Fick, dada pela Eq.(2.2), obtemos

$$\bar{L}_{gu}^n = \frac{1}{a_v^n} \left[\frac{1}{a_u^n a_w^n} \int_0^{a_u^n} \int_0^{a_w^n} \left(\int_0^{a_v^n} \frac{\partial}{\partial v} J_{gv}(u, v, w) dv \right) dudw \right] +$$

$$+ \frac{1}{a_w^n} \left[\frac{1}{a_u^n a_v^n} \int_0^{a_u^n} \int_0^{a_v^n} \left(\int_0^{a_w^n} \frac{\partial}{\partial w} J_{gw}(u, v, w) dw \right) dudv \right],$$

onde,

$$\int_0^{a_v^n} \frac{\partial}{\partial v} J_{gv}(u, v, w) dv = J_{gv}(u, a_v^n, w) - J_{gv}(u, 0, w),$$

e

$$\int_0^{a_w^n} \frac{\partial}{\partial w} J_{gw}(u, v, w) dw = J_{gw}(u, v, a_w^n) - J_{gw}(u, v, 0).$$

Substituindo estes resultados na Eq.(2.38), temos:

$$\begin{aligned} \bar{L}_{gu}^n &= \frac{1}{a_v^n} \left[\frac{1}{a_u^n a_w^n} \int_0^{a_u^n} \int_0^{a_w^n} \left(J_{gv}(u, a_v^n, w) - J_{gv}(u, 0, w) \right) dudw \right] + \\ &+ \frac{1}{a_w^n} \left[\frac{1}{a_u^n a_v^n} \int_0^{a_u^n} \int_0^{a_v^n} \left(J_{gw}(u, v, a_w^n) - J_{gw}(u, v, 0) \right) dudv \right]. \end{aligned}$$

Fazendo uso da definição das correntes líquidas médias nas faces do nodo, dada pela Eq.(2.15), tem-se que

$$\bar{L}_{gu}^n = \frac{1}{a_v^n} \left(\bar{J}_{gvr}^n - \bar{J}_{gvl}^n \right) + \frac{1}{a_w^n} \left(\bar{J}_{gwr}^n - \bar{J}_{gwL}^n \right), \quad (2.39)$$

ou seja,

$$a_{0gu}^n = \bar{L}_{gu}^n = \sum_{\xi=v,w} \frac{1}{a_\xi^n} \left(\bar{J}_{g\xi r}^n - \bar{J}_{g\xi l}^n \right). \quad (2.40)$$

Os coeficientes a_{1gu}^n e a_{2gu}^n podem ser obtidos, através das funções $h_k(u/a_u^n)$ e impondo as condições de contorno nas faces do nodo, na Eq.(2.23),

$$L_{gul}^n \equiv L_{gu}^n(0) = \bar{L}_{gu}^n - a_{1gu}^n - a_{2gu}^n, \quad (2.41)$$

$$L_{gur}^n \equiv L_{gu}^n(a_u^n) = \bar{L}_{gu}^n + a_{1gu}^n - a_{2gu}^n. \quad (2.42)$$

Resolvendo as Eqs.(2.41) e (2.42), obtemos

$$a_{1gu}^n = \frac{1}{2} \left(L_{gur}^n - L_{gul}^n \right), \quad (2.43)$$

e

$$a_{2gu}^n = \bar{L}_{gu}^n - \frac{1}{2} \left(L_{gur}^n + L_{gul}^n \right). \quad (2.44)$$

Para determinar as fugas transversais L_{gu}^n nas faces do nodo n , usaremos a Fig.2.4 para representar os nodos vizinhos ao nodo n e vamos impor as seguintes condições:

1) **As funções são contínuas nas interfaces entre nodos,**

$$L_{gu}^n(u_l^n) = L_{gu}^{n-1}(u_r^{n-1}), \quad (2.45)$$

e

$$L_{gu}^n(u_r^n) = L_{gu}^{n+1}(u_l^{n+1}). \quad (2.46)$$

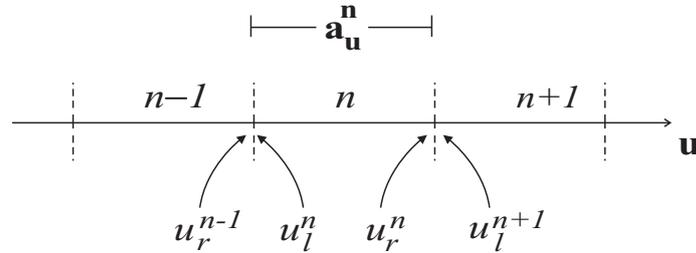


Figura 2.4: Representação dos nodos vizinhos ao nodo n .

2) **As derivadas das funções são contínuas nas interfaces entre nodos,**

$$\left. \frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \right|_{u=u_l^n} = \left. \frac{d}{du} L_{gu}^{n-1}(u) \right|_{u=u_r^{n-1}}, \quad (2.47)$$

e

$$\left. \frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \right|_{u=u_r^n} = \left. \frac{d}{du} L_{gu}^{n+1}(u) \right|_{u=u_l^{n+1}}. \quad (2.48)$$

Usando a aproximação de diferenças finitas para a derivada, podemos escrever:

$$\left. \frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \right|_{u=u_l^n} \simeq \frac{2}{a_u^n} (\bar{L}_{gu}^n - L_{gu}^n(u_l^n)), \quad (2.49)$$

e

$$\left. \frac{d}{du} L_{gu}^n(u) \right|_{u=u_r^n} \simeq \frac{2}{a_u^n} (L_{gu}^n(u_r^n) - \bar{L}_{gu}^n), \quad (2.50)$$

então, fazendo na Eq.(2.50) $n = n - 1$, vem

$$\left. \frac{d}{du} L_{gu}^{n-1}(u) \right|_{u=u_r^{n-1}} \simeq \frac{2}{a_u^{n-1}} (L_{gu}^{n-1}(u_r^{n-1}) - \bar{L}_{gu}^{n-1}), \quad (2.51)$$

comparando a Eq.(2.51) com a Eq.(2.49) e usando a Eq.(2.45), obtemos

$$L_{gul}^n \equiv L_{gu}^n(u_l^n) = \frac{a_u^{n-1} \bar{L}_{gu}^n + a_u^n \bar{L}_{gu}^{n-1}}{a_u^n + a_u^{n-1}}. \quad (2.52)$$

Analogamente, fazendo na Eq.(2.49) $n = n + 1$, comparando com a Eq.(2.50) e fazendo uso da Eq.(2.46), resulta

$$L_{gur}^n \equiv L_{gu}^n(u_r^n) = \frac{a_u^{n+1} \bar{L}_{gu}^n + a_u^n \bar{L}_{gu}^{n+1}}{a_u^n + a_u^{n+1}}. \quad (2.53)$$

2.4 Coeficientes Secundários

Para determinar os coeficientes do terceiro (c_{3gu}^n) e quarto (c_{4gu}^n) grau adota-se uma técnica de resíduos ponderados aplicada à Eq.(2.21), usando a expansão da função $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ dada pela Eq.(2.25), obtendo a seguinte equação:

$$-\bar{D}_g^n \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) \frac{d^2}{du^2} \bar{\psi}_{gu}^n(u) du + \Sigma_{rg}^n \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) \bar{\psi}_{gu}^n(u) du -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) \bar{\psi}_{g'u}^n(u) du - \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) \bar{\psi}_{g'u}^n(u) du + \\
& + \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) [L_{gu}^n(u) + d_{gu}^n(u)] du - \beta \frac{1}{a_u^n} \int_0^{a_u^n} w(u) S_{gu}^n(u) du = 0. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

As funções peso $w(u)$ são escolhidas de acordo com uma das técnicas de resíduos ponderados [4]. Nesta tese de doutorado, usamos o Método dos Momentos¹ para o cálculo dos coeficientes secundários.

• **Método dos Momentos**

Neste método as funções peso $w(u)$, também são expressas em função das funções de base $h_k(u/a_u^n)$:

- 1) Para o cálculo de c_{3gu}^n : $w(u) = h_1(u/a_u^n)$;
- 2) Para o cálculo de c_{4gu}^n : $w(u) = h_2(u/a_u^n)$.

Substituindo as funções peso $w(u)$, na Eq.(2.54) e usando as propriedades das funções de base $h_k(u/a_u^n)$ na expansão da função $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ e os coeficientes das funções $L_{gu}^n(u)$ e $d_{gu}^n(u)$ obtém-se os seguintes sistemas de equações a partir dos quais os coeficientes secundários são, respectivamente, calculados:

$$\begin{aligned}
\left[12 \frac{\bar{D}_g^n}{(a_u^n)^2} + \frac{1}{5} \Sigma_{rg}^n \right] c_{3gu}^n - \frac{1}{5} \sum_{g'=1}^2 \left[\bar{\Sigma}_{gg'}^n + \alpha \chi_g \nu \Sigma_{fg'}^n \right] c_{3g'u}^n &= -\frac{1}{3} \Sigma_{rg}^n c_{1gu}^n - \frac{1}{3} [a_{1gu}^n + b_{1gu}^n] + \\
& + \frac{1}{3} \sum_{g'=1}^2 \left[\bar{\Sigma}_{gg'}^n + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \right] c_{1g'u}^n, \quad (2.55)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left[12 \frac{\bar{D}_g^n}{(a_u^n)^2} + \frac{3}{35} \Sigma_{rg}^n \right] c_{4gu}^n - \frac{3}{35} \sum_{g'=1}^2 \left[\bar{\Sigma}_{gg'}^n + \alpha \chi_g \nu \Sigma_{fg'}^n \right] c_{4g'u}^n &= \frac{1}{5} \Sigma_{rg}^n c_{2gu}^n + \frac{1}{5} [a_{1gu}^n + b_{1gu}^n] - \\
& - \frac{1}{5} \sum_{g'=1}^2 \left[\bar{\Sigma}_{gg'}^n + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \right] c_{2g'u}^n. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

¹No método dos momentos as funções de base usadas no cálculo de c_{3gu}^n e c_{4gu}^n é de grau $k - 2$.

2.5 Correntes Parciais de Saída

Uma das vantagens dos métodos nodais, como por exemplo o método NEM, é que esses métodos usam as correntes parciais nas interfaces do nodo; por isso, trabalham com a Lei de Fick e com a Aproximação da Difusão. Substituindo a expansão da função $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ na Eq.(2.16) e reescrevendo em função da definição de correntes parciais, obtém-se as seguintes equações:

$$\bar{J}_{gul}^{+n} - \bar{J}_{gul}^{-n} = -\bar{D}_g^n \sum_{k=1}^4 c_{kgu}^n \frac{d}{du} h_k(u/a_u^n) \Big|_{u=0}, \quad (2.57)$$

e

$$\bar{J}_{gur}^{+n} - \bar{J}_{gur}^{-n} = -\bar{D}_g^n \sum_{k=1}^4 c_{kgu}^n \frac{d}{du} h_k(u/a_u^n) \Big|_{u=a_u^n}. \quad (2.58)$$

Fazendo uso das definições dos coeficientes primários e secundários e das funções de base, podemos obter as correntes parciais de saída do nodo a partir de algumas manipulações algébricas, ou seja,

$$\bar{J}_{gul}^{-n} = A_{0gu}^n (\bar{\phi}_g^n + c_{4gu}^n) + A_{1gu}^n \bar{J}_{gul}^{+n} + A_{2gu}^n \bar{J}_{gur}^{-n} - A_{3gu}^n c_{3gu}^n, \quad (2.59)$$

e

$$\bar{J}_{gur}^{+n} = A_{0gu}^n (\bar{\phi}_g^n + c_{4gu}^n) + A_{2gu}^n \bar{J}_{gul}^{+n} + A_{1gu}^n \bar{J}_{gur}^{-n} + A_{3gu}^n c_{3gu}^n, \quad (2.60)$$

onde, os coeficientes A_{kgu}^n são assim definidos:

$$A_{0gu}^n \equiv \frac{6(\bar{D}_g^n/a_u^n)}{1 + 12(\bar{D}_g^n/a_u^n)}, \quad (2.61)$$

$$A_{1gu}^n \equiv \frac{1 - 48(\bar{D}_g^n/a_u^n)^2}{\left[1 + 12(\bar{D}_g^n/a_u^n)\right] \left[1 + 4(\bar{D}_g^n/a_u^n)\right]}, \quad (2.62)$$

$$A_{2gu}^n \equiv \frac{-8(\bar{D}_g^n/a_u^n)}{\left[1 + 12(\bar{D}_g^n/a_u^n)\right] \left[1 + 4(\bar{D}_g^n/a_u^n)\right]}, \quad (2.63)$$

$$A_{3gu}^n \equiv \frac{6(\bar{D}_g^n/a_u^n)}{1 + 4(\bar{D}_g^n/a_u^n)}. \quad (2.64)$$

2.6 Equação de Balanço Nodal

Uma vez determinadas as correntes parciais médias nas faces do nodo, o fluxo médio de nêutrons no nodo pode ser obtido substituindo as Eqs.(2.59) e (2.60) na Eq.(2.8), da qual obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{u=x,y,z} 2 \frac{A_{0gu}^n}{a_u^n} + \Sigma_{rg}^n \right) \bar{\phi}_g^n - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n - \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n &= \\ &= \sum_{u=x,y,z} 2 \frac{A_{0gu}^n}{a_u^n} \left(2 [\bar{J}_{gur}^{-n} + \bar{J}_{gul}^{+n}] - c_{4gu}^n \right) + \beta S_g^n. \end{aligned} \quad (2.65)$$

As equações apresentadas neste capítulo constituem um conjunto de equações do qual o fluxo médio de nêutrons pode ser determinado usando condições de contorno e de interface nos nodos. Note que, pelo fato de o método NEM usar uma expansão polinomial para o fluxo na face do nodo $\bar{\psi}_{gu}^n(u)$ e por utilizar a equação da difusão integrada transversalmente, essa formulação gerou um conjunto de equações para os quais foram definidos os coeficientes primários (c_{0gu}^n , c_{1gu}^n e c_{2gu}^n) e secundários (c_{3gu}^n e c_{4gu}^n) e também a fuga transversal $L_{gu}^n(u)$ e a função $d_{gu}^n(u)$ que trata a diferença de seções de choque para o caso de barra de controle parcialmente inserida no nodo. Usando a expansão do fluxo na face do nodo na Lei de Fick, as correntes parciais de saída do nodo (\bar{J}_{gur}^{+n} e \bar{J}_{gul}^{-n}) foram expressas em função de quantidades previamente conhecidas, a qual acoplada com a equação da difusão integrada no volume do nodo resultou na equação de balanço nodal, das quais resultará um método iterativo para determinar os fluxos médios nos nodos e as correntes parciais médias nas faces dos nodos, para assim obter a reatividade subcrítica do sistema.

Capítulo 3

Método de Diferenças Finitas de Malha Grossa

Os métodos nodais consistentes, entre eles o NEM, são bastante eficientes tanto em relação à precisão dos resultados no cálculo do fluxo de nêutrons quanto ao tempo computacional gasto nesses cálculos. No entanto, esses métodos podem apresentar um elevado tempo computacional na execução de cálculos repetitivos, como por exemplo, na movimentação de bancos de barras de controle, na pesquisa da concentração crítica de boro solúvel e também nos cálculos de queima de combustível. O método de Diferenças Finitas de Malha Grossa (DFMG) vem sendo uma ferramenta muito útil na busca de alternativas que permitam aumentar a velocidade dos cálculos executados com os métodos nodais de malha grossa [5, 7, 8]. Nesta tese de doutorado, usaremos a formulação matricial do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa (DFMG) para calcular o fluxo adjunto matemático $\bar{\phi}_g^*$ e para simplificar o cálculo da reatividade subcrítica usando a Teoria da Perturbação. A formulação desse método utiliza como dados de entrada os parâmetros nucleares previamente calculados no NEM, que são:

\bar{D}_g^n	Coefficiente médio de difusão;
Σ_{rg}^n	Seção de choque média de remoção;
$\bar{\Sigma}_{gg'}^n$	Seção de choque média de espalhamento do grupo $g' \rightarrow g$;
$\nu\Sigma_{fg'}^n$	Seção de choque média de fissão.

As correntes médias \bar{J}_{gus}^n , os fluxos médios $\bar{\psi}_{gus}^n$ nas faces e o fluxo médio no nodo $\bar{\phi}_g^n$, que são obtidos nos cálculos do NEM, são utilizados nos cálculos dos fatores de correção de malha grossa f_{gus}^n no DFMG [9], que alteram a formulação do método de

Diferenças Finitas (malha fina). É importante destacar que se fizermos os coeficientes de correção de malha grossa nulos, recairemos na metodologia clássica do método de Diferenças Finitas.

Neste capítulo apresentaremos a formulação matricial do método de Diferenças Finitas de Malha Grossa (DFMG). De acordo com esta formulação, os fatores de correção de malha grossa, que modificam a formulação clássica do método de diferenças finitas, são usados para corrigir as correntes líquidas nas interfaces do nodo, isto é,

$$\bar{J}_{gul}^n = -2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} (\bar{\phi}_g^n - \bar{\psi}_{gul}^n) + f_{gul}^n (\bar{\phi}_g^n + \bar{\psi}_{gul}^n), \quad (3.1)$$

e

$$\bar{J}_{gur}^n = -2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} (\bar{\psi}_{gur}^n - \bar{\phi}_g^n) - f_{gur}^n (\bar{\phi}_g^n + \bar{\psi}_{gur}^n), \quad (3.2)$$

onde representaremos o nodo n e seus respectivos vizinhos nas direções ($u \equiv x, y, z$), com a_u^n sendo a dimensão do nodo n na direção u .

Sendo conhecido o coeficiente médio de difusão \bar{D}_g^n , as correntes líquidas nas faces do nodo \bar{J}_{gus}^n , o fluxo médio de nêutrons $\bar{\phi}_g^n$ e os fluxos nas faces do nodo $\bar{\psi}_{gus}^n$, previamente calculados no NEM, podemos obter os fatores de correção da seguinte forma:

$$f_{gul}^n = \frac{\bar{J}_{gul}^n + 2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} (\bar{\phi}_g^n - \bar{\psi}_{gul}^n)}{\bar{\phi}_g^n + \bar{\psi}_{gul}^n}, \quad (3.3)$$

e

$$f_{gur}^n = - \frac{\bar{J}_{gur}^n - 2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} (\bar{\phi}_g^n - \bar{\psi}_{gur}^n)}{\bar{\phi}_g^n + \bar{\psi}_{gur}^n}. \quad (3.4)$$

Sabe-se que o núcleo de um reator nuclear é heterogêneo, ou seja, contém regiões como combustíveis, material estrutural, barras de controle, refrigerante e outros. Desta forma, ao resolver a equação da difusão precisamos impor a condição de continuidade tanto no fluxo de nêutrons quanto na corrente na interface entre duas regiões.

As condições de continuidade de fluxo e de corrente na interface entre nodos, como por exemplo, para a direção x , é tal que:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{gxr}^{n_e} &= \bar{\psi}_{gxl}^n & e & & \bar{J}_{gxr}^{n_e} &= \bar{J}_{gxl}^n & , \\ \bar{\psi}_{gxl}^{n_d} &= \bar{\psi}_{gxr}^n & e & & \bar{J}_{gxl}^{n_d} &= \bar{J}_{gxr}^n & ,\end{aligned}$$

onde n_e e n_d representam respectivamente, os nodos vizinhos à esquerda e à direita do nodo n . Então, reescrevendo a Eq.(3.1) e mudando os índices (n) por (n_d) e comparando com a Eq.(3.2) e usando a condição continuidade de fluxo, vem

$$\bar{J}_{gxl}^n = -D_{gxl}^n \bar{\phi}_g^n + D_{gxr}^{n_e} \bar{\phi}_g^{n_e}, \quad (3.5)$$

e

$$\bar{J}_{gxr}^n = D_{gxr}^n \bar{\phi}_g^n - D_{gxl}^{n_d} \bar{\phi}_g^{n_d}, \quad (3.6)$$

onde os coeficientes de difusão, para a direção x , nas faces do nodo são assim definidos:

$$D_{gxl}^n = \frac{\left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_x^n} - f_{gxl}^n\right) \left(2 \frac{\bar{D}_g^{n_e}}{a_x^{n_e}} + f_{gxr}^{n_e}\right)}{\left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_x^n} + f_{gxl}^n\right) + \left(2 \frac{\bar{D}_g^{n_e}}{a_x^{n_e}} + f_{gxr}^{n_e}\right)}, \quad (3.7)$$

e

$$D_{gxr}^n = \frac{\left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_x^n} - f_{gxr}^n\right) \left(2 \frac{\bar{D}_g^{n_d}}{a_x^{n_d}} + f_{gxl}^{n_d}\right)}{\left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_x^n} + f_{gxr}^n\right) + \left(2 \frac{\bar{D}_g^{n_d}}{a_x^{n_d}} + f_{gxl}^{n_d}\right)}. \quad (3.8)$$

As correntes líquidas e os coeficientes de difusão médios nas faces dos nodos podem ser obtidos, analogamente, conforme apresentado nas Eqs.(3.5) à (3.8) para as direções y e z .

Se substituirmos as Eqs.(3.5) e (3.6), generalizando para as direções y e z , na Eq.(2.8), obtém-se a seguinte equação para o fluxo médio no nodo,

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{gxr}^n}{a_x^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gxl}^{n_d}}{a_x^n} \bar{\phi}_g^{n_d} + \frac{D_{gxl}^n}{a_x^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gxr}^{n_e}}{a_x^n} \bar{\phi}_g^{n_e} + \\
& \frac{D_{gyr}^n}{a_y^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gyl}^{n_f}}{a_y^n} \bar{\phi}_g^{n_f} + \frac{D_{gyl}^n}{a_y^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gyr}^{n_t}}{a_y^n} \bar{\phi}_g^{n_t} + \\
& \frac{D_{gxr}^n}{a_z^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gzl}^{n_c}}{a_z^n} \bar{\phi}_g^{n_c} + \frac{D_{gzl}^n}{a_z^n} \bar{\phi}_g^n - \frac{D_{gxr}^{n_b}}{a_z^n} \bar{\phi}_g^{n_b} + \\
& \Sigma_{rg}^n \bar{\phi}_g^n = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \alpha \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \beta S_g^n. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

A equação acima pode ser reescrita na seguinte forma matricial,

$$\begin{aligned}
& -A_{n,n_b} \Phi^{n_b} - A_{n,n_t} \Phi^{n_t} - A_{n,n_e} \Phi^{n_e} + A_{n,n} \Phi^n - \\
& - A_{n,n_d} \Phi^{n_d} - A_{n,n_f} \Phi^{n_f} - A_{n,n_c} \Phi^{n_c} = \alpha F_n \Phi^n + \beta S^n, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

onde n_e , n_t , n_b , n_d , n_f e n_c representam, respectivamente, os nodos vizinhos ao nodo n , à esquerda, atrás, embaixo, à direita, na frente e em cima, conforme mostra a Fig.3.1, e as matrizes estão definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Phi^n &\equiv \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1^n \\ \bar{\phi}_2^n \end{bmatrix}, & S^n &\equiv \begin{bmatrix} S_1^n \\ S_2^n \end{bmatrix}. \\
F_n &\equiv \begin{bmatrix} \chi_1 \nu \Sigma_{f1}^n & \chi_1 \nu \Sigma_{f2}^n \\ \chi_2 \nu \Sigma_{f1}^n & \chi_2 \nu \Sigma_{f2}^n \end{bmatrix}. \\
A_{n,m} &\equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{a_u^n} D_{1ur}^m & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_u^n} D_{2ur}^m \end{bmatrix}; \text{ para } m = \begin{cases} n_e, & \text{se } u = x \\ n_t, & \text{se } u = y \\ n_b, & \text{se } u = z \end{cases}
\end{aligned}$$

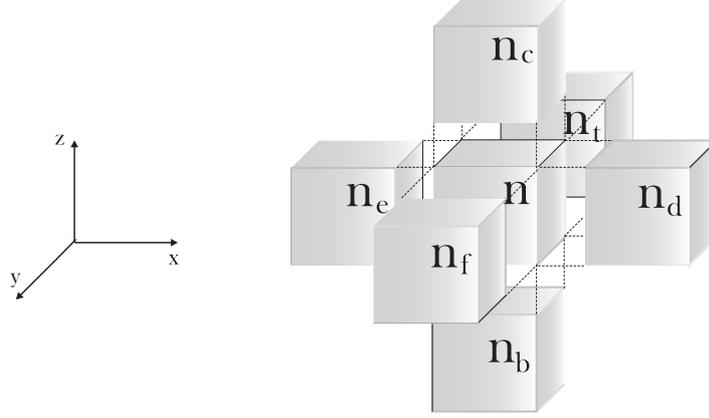


Figura 3.1: Representação de nodos adjacentes ao nodo n .

$$A_{n,m} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{a_u^n} D_{1ul}^m & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_u^n} D_{2ul}^m \end{bmatrix}; \text{ para } m = \begin{cases} n_d, & \text{se } u = x \\ n_f, & \text{se } u = y \\ n_c, & \text{se } u = z \end{cases}$$

$$A_{n,n} \equiv \begin{bmatrix} A_1^n & -\bar{\Sigma}_{12}^n \\ -\bar{\Sigma}_{21}^n & A_2^n \end{bmatrix},$$

sendo

$$A_g^n \equiv \Sigma_{rg}^n + \sum_{u=x,y,z} \frac{1}{a_u^n} [D_{gul}^n + D_{gur}^n].$$

Note-se que a Eq.(3.10), contabilizando todos os nodos em que o núcleo do reator foi dividido, forma assim, um sistema heptadiagonal, semelhante ao método clássico de diferenças finitas. Por conveniência, escreveremos a equação anterior em uma matriz heptadiagonal, como segue

$$A\Phi = \alpha F\Phi + \beta S, \quad (3.11)$$

com a matriz do fluxo médio de nêutrons expressa da seguinte forma,

consiste em considerar um parâmetro real ω não nulo, para o cálculo das iterações internas, acelerando a convergência no cálculo do fluxo de nêutrons dado pela seguinte equação:

$$\bar{\phi}_g^{n(l')} = \omega \bar{\phi}_g^{n(l)} + (1 - \omega) \bar{\phi}_g^{n(l-1)}, \quad (3.12)$$

onde

- $\bar{\phi}_g^{n(l-1)}$ Fluxo médio no nodo obtido na iteração anterior;
- $\bar{\phi}_g^{n(l)}$ Fluxo médio no nodo obtido na iteração atual;
- $\bar{\phi}_g^{n(l')}$ Fluxo médio no nodo obtido pelo método SOR na iteração l ;
- ω Parâmetro de relaxação otimizado.

Note que, no caso em que $w = 1$ obtemos o método de Gauss-Seidel [10]. A utilização deste parâmetro permite obter uma convergência mais rápida.

A teoria da difusão multigrupo tem sido usada em cálculos de reatores nucleares onde são feitas simulações utilizando dados específicos de um reator, tanto para o acompanhamento da operação do reator quanto para previsão da condição de criticalidade. Esses cálculos são obtidos resolvendo a Eq.(3.10), tanto para problema de autovalor quanto para problema de fonte fixa.

É notório que a equação da difusão multigrupo apresenta dependência espacial, logo, necessita de condições de contorno apropriadas para a sua solução.

Condição Contorno:

1) Fluxo nulo

Se assumirmos que o fluxo na face do nodo seja nulo, ou seja, $\bar{\psi}_{gus}^n = 0$. As correntes líquidas nas faces desse nodo, dada pelas Eqs.(3.1) e (3.2), podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\bar{J}_{gul}^n = - \left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} - f_{gul}^n \right) \bar{\phi}_g^n, \quad (3.13)$$

e

$$\bar{J}_{gur}^n = \left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} - f_{gur}^n \right) \bar{\phi}_g^n. \quad (3.14)$$

2) Corrente de entrada nula

Para obtermos uma expressão para a corrente líquida na face do nodo, faremos uma abordagem separada para cada face do nodo voltada para o contorno.

2.a) Corrente de entrada nula na face direita do nodo

Se assumirmos que, $\bar{J}_{gur}^{-n} = 0$, então, a corrente líquida na face direita do nodo expressa em função das correntes parciais fica

$$\bar{J}_{gur}^n = \bar{J}_{gur}^{+n} - \bar{J}_{gur}^{-n} = \bar{J}_{gur}^{+n}.$$

A partir da aproximação da difusão, dada pela Eq.(2.31), podemos relacionar o fluxo médio na face direita do nodo em função das correntes parciais, da seguinte maneira:

$$\bar{\psi}_{gur}^n = 2 \left(\bar{J}_{gur}^{+n} + \bar{J}_{gur}^{-n} \right) = 2 \bar{J}_{gur}^{+n},$$

combinando as equações acima, tem-se que

$$\bar{\psi}_{gur}^n = 2 \bar{J}_{gur}^n,$$

substituindo o resultado acima na Eq.(3.2) e fazendo algumas manipulações algébricas, a corrente líquida na face direita do nodo é expressa da seguinte forma:

$$\bar{J}_{gur}^n = \frac{\left(2 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} - f_{gur}^n \right) \bar{\phi}_g^n}{1 + 4 \frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} + 2 f_{gur}^n}, \quad (3.15)$$

onde $u = x, y, z$ e a_u^n sendo a dimensão do nodo n na direção u .

2.b) Corrente de entrada nula na face esquerda do nodo

Assumindo que, $\bar{J}_{gul}^{+n} = 0$, então, a corrente líquida na face esquerda do nodo expressa em função das correntes parciais fica

$$\bar{J}_{gul}^n = \bar{J}_{gul}^{+n} - \bar{J}_{gul}^{-n} = -\bar{J}_{gul}^{-n}.$$

Fazendo uso da aproximação da difusão e da definição da corrente líquida na face esquerda em função das correntes parciais, tem-se que

$$\bar{\psi}_{gul}^n = -2\bar{J}_{gul}^n,$$

substituindo o resultado acima na Eq.(3.1) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se a corrente líquida na face esquerda do nodo

$$\bar{J}_{gul}^n = \frac{-\left(2\frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} - f_{gul}^n\right)\bar{\phi}_g^n}{1 + 4\frac{\bar{D}_g^n}{a_u^n} + 2f_{gul}^n}, \quad (3.16)$$

onde $u = x, y, z$ e a_u^n sendo a dimensão do nodo n na direção u .

Capítulo 4

Cálculo da Reatividade Subcrítica

O nível de subcriticalidade do núcleo do reator pode ser estimado a partir do cálculo da reatividade que é obtido em função das posições dos bancos de barras de controle, resolvendo a Eq.(3.11). Com o objetivo de simplificar esse cálculo, usaremos a formulação matricial do método DFMG na equação da difusão, da qual temos:

$$A\Phi = \alpha F\Phi + \beta S, \quad (4.1)$$

com a matriz A contabilizando fuga, absorção e espalhamento, F fissão de nêutrons, S fonte externa e Φ o fluxo médio de nêutrons. Na condição de sistema crítico, ou seja, com os bancos de barras de controle totalmente retirados do núcleo, tem-se que

$$A\phi = F\phi, \quad (4.2)$$

e

$$A^\dagger \phi^\dagger = F^\dagger \phi^\dagger, \quad (4.3)$$

onde A^\dagger e F^\dagger são, respectivamente, as matrizes transpostas das matrizes A e F , ϕ o fluxo de nêutrons sem a presença da fonte externa e ϕ^\dagger o fluxo adjunto de nêutrons para o problema crítico.

4.1 Bancos de Barras de Controle totalmente inseridos no núcleo

Na condição em que o sistema é subcrítico com os bancos de barras de controle totalmente inseridos no núcleo, tem-se que:

$$(A + \Delta A)\Psi = (F + \Delta F)\Psi + S, \quad (4.4)$$

onde ΔA e ΔF representam as perturbações devido à inserção de barras de controle no núcleo do reator.

Multiplicando a Eq.(4.4) pelo fluxo adjunto transposto $\phi^{\dagger T}$ e integrando sobre todo volume do reator, temos

$$\langle \phi^{\dagger T}, (A - F)\Psi \rangle = \langle \phi^{\dagger T}, (\Delta F - \Delta A)\Psi \rangle + \langle \phi^{\dagger T}, S \rangle. \quad (4.5)$$

Da mesma forma, multiplicando a Eq.(4.3) por Ψ^T e integrando sobre todo volume do reator, vem

$$\langle \Psi^T, (A^\dagger - F^\dagger)\phi^\dagger \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Usando a definição de operador adjunto, sabe-se que

$$\langle \phi^{\dagger T}, (A - F)\Psi \rangle = \langle \Psi^T, (A^\dagger - F^\dagger)\phi^\dagger \rangle. \quad (4.7)$$

Agora, combinando as Eqs.(4.5), (4.6) e (4.7), tem-se que

$$\langle \phi^{\dagger T}, (\Delta A - \Delta F)\Psi \rangle = \langle \phi^{\dagger T}, S \rangle, \quad (4.8)$$

dividindo este resultado por $\langle \phi^{\dagger T}, (F + \Delta F)\Psi \rangle$, obtém-se a seguinte definição de reatividade [11]:

$$\rho_o \equiv -\frac{\langle \phi^{\dagger T}, (\Delta A - \Delta F)\Psi \rangle}{\langle \phi^{\dagger T}, (F + \Delta F)\Psi \rangle} = -\frac{\langle \phi^{\dagger T}, S \rangle}{\langle \phi^{\dagger T}, (F + \Delta F)\Psi \rangle}, \quad (4.9)$$

onde ρ_o é a reatividade inicial calculada no sistema para o caso em que os bancos de barras de controle estão totalmente inseridos no núcleo, $\phi^{\dagger T}$ o fluxo adjunto transposto, F o termo de fissão e ΔA e ΔF representando as perturbações devido à inserção das barras de controle no núcleo do reator.

4.2 Bancos de Barras de Controle parcialmente inseridos no núcleo

Analogamente, na condição em que o reator é subcrítico, com os bancos de barras de controle parcialmente inseridos no núcleo do reator, tem-se a seguinte equação:

$$(A + \delta A)\Phi = (F + \delta F)\Phi + S, \quad (4.10)$$

onde δA e δF representam as perturbações devido à movimentação das barras de controle no núcleo do reator.

Multiplicando a Eq.(4.10) pelo fluxo adjunto transposto $\phi^{\dagger T}$ e integrando sobre todo volume do reator, temos

$$\langle \phi^{\dagger T}, (A - F)\Phi \rangle = \langle \phi^{\dagger T}, (\delta F - \delta A)\Phi \rangle + \langle \phi^{\dagger T}, S \rangle. \quad (4.11)$$

Da mesma forma, multiplicando a Eq.(4.3) por Φ^T e integrando sobre todo volume do reator, vem

$$\langle \Phi^T, (A^\dagger - F^\dagger)\phi^\dagger \rangle = 0. \quad (4.12)$$

Usando a definição de operador adjunto, sabe-se que

$$\langle \phi^{\dagger T}, (A - F)\Phi \rangle = \langle \Phi^T, (A^\dagger - F^\dagger)\phi^\dagger \rangle. \quad (4.13)$$

Agora, combinando as Eqs.(4.11), (4.12) e (4.13), tem-se que

$$\langle \phi^{\dagger T}, (\delta A - \delta F)\Phi \rangle = \langle \phi^{\dagger T}, S \rangle, \quad (4.14)$$

dividindo este resultado por $\langle \phi^{\dagger T}, (F + \delta F)\Phi \rangle$, obtém-se a seguinte definição de reatividade [11]:

$$\rho \equiv -\frac{\langle \phi^{\dagger T}, (\delta A - \delta F)\Phi \rangle}{\langle \phi^{\dagger T}, (F + \delta F)\Phi \rangle} = -\frac{\langle \phi^{\dagger T}, S \rangle}{\langle \phi^{\dagger T}, (F + \delta F)\Phi \rangle}, \quad (4.15)$$

onde ρ é a reatividade calculada no sistema para o caso em que os bancos de barras de controle estão parcialmente inseridos no núcleo, $\phi^{\dagger T}$ o fluxo adjunto transposto, F o termo de fissão e δA e δF representando as perturbações devido à movimentação das barras de controle no núcleo do reator.

Para acompanharmos a multiplicação subcrítica de nêutrons no reator, adotaremos como ponto de partida a configuração do núcleo do reator com os bancos de barras de controle totalmente inseridos no núcleo. Assumiremos como estado de referência a configuração do núcleo do reator com os bancos de barra de controle totalmente fora do núcleo, ou seja, sistema crítico.

Capítulo 5

Cálculo do Fator Potência

Um dos principais objetivos nos cálculos globais de reatores nucleares é a determinação da distribuição de potência no núcleo do reator, para cada elemento combustível. A partir do cálculo do fluxo médio de nêutrons obtido pela solução da equação da difusão de nêutrons, podemos determinar a densidade de potência média no nodo usando a seguinte relação:

$$\bar{p}^n \equiv \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \sum_{g=1}^2 \gamma_g \Sigma_{fg}(x, y, z) \phi_g(x, y, z) dV = \sum_{g=1}^2 \gamma_g \Sigma_{fg}^n \bar{\phi}_g^n, \quad (5.1)$$

onde γ_g é a energia revertida por fissão do grupo g e V_n o volume do nodo. A densidade potência média do núcleo, medida pelos detectores de nêutrons, pode ser determinada a partir da densidade de potência média no nodo,

$$\bar{P}^{Nucleo} = \frac{1}{V_{Nucleo}} \sum_{n=1}^N \bar{p}^n V_n, \quad (5.2)$$

onde N é o número total de nodos e V_{Nucleo} o volume total do núcleo do reator.

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos nesta tese com os resultados disponíveis na literatura, calcularemos o fator de potência $f_{Potencia}^{EC}$ para cada elemento combustível (EC). Primeiramente, determinaremos a densidade de potência média no elemento combustível \bar{P}^{EC} , definida pela soma do produto da densidade média de potência pelo volume do nodo, para todos os nodos pertencentes ao elemento combustível, dividindo pelo volume do elemento combustível, expresso da seguinte

forma:

$$\bar{P}^{EC} = \frac{1}{V_{EC}} \sum_{n \in EC} \bar{p}^n V_n = \frac{1}{\sum_{n \in EC} V_n f^n} \sum_{n \in EC} \bar{p}^n V_n f^n, \quad (5.3)$$

onde V_{EC} é o volume total do elemento combustível, V_n o volume do nodo e f^n o fator de contribuição do volume do nodo (no caso de simetria de 1/4 de núcleo), conforme ilustra a Fig.5.1.

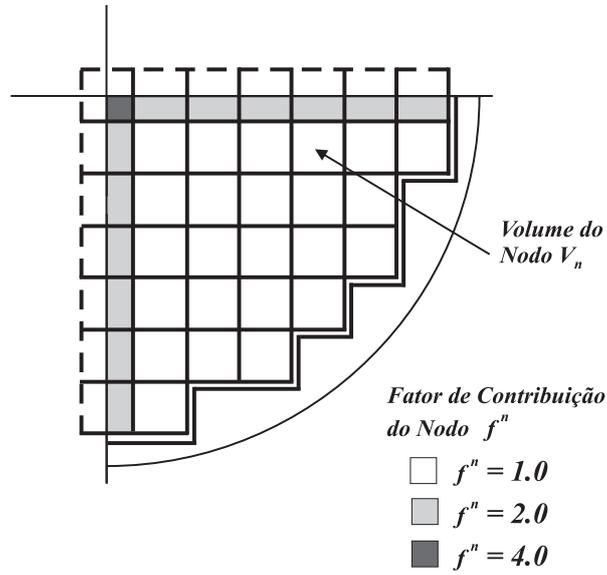


Figura 5.1: Fator de contribuição do nodo à potência do núcleo do reator.

É importante destacar que no caso de núcleo inteiro, $f^n = 1$ para qualquer nodo.

Note que para o cálculo da potência do núcleo, podemos definir um fator de contribuição do elemento combustível f^{EC} para o núcleo, de modo que

$$\sum_{EC} V_{EC} f^{EC} = V_{Nucleo},$$

com isso, a Eq.(5.2) pode ser escrita em função da potência média do EC da seguinte forma

$$\bar{P}^{Nucleo} = \frac{1}{\sum_{EC} V_{EC} f^{EC}} \sum_{EC} \bar{P}^{EC} V_{EC} f^{EC}, \quad (5.4)$$

onde f^{EC} é o fator de contribuição do EC para o volume do núcleo do reator, conforme ilustra a Fig.5.2.

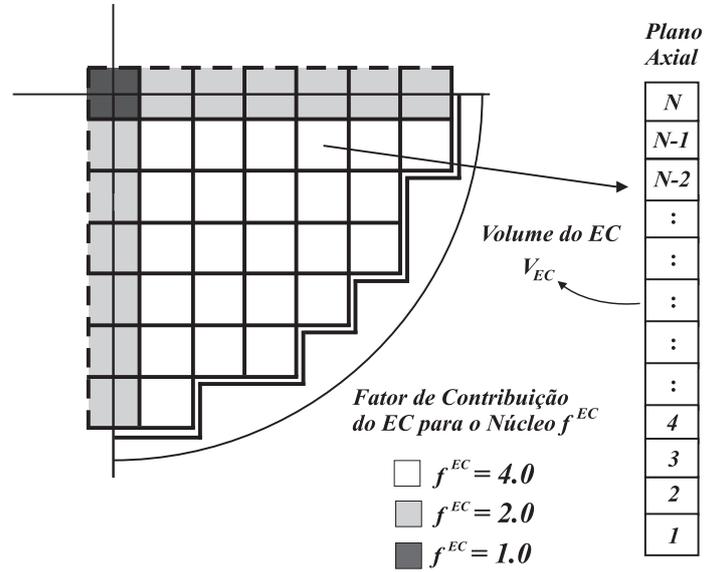


Figura 5.2: Fator de contribuição do EC para o núcleo.

O fator de potência $f_{Potencia}^{EC}$ é definido pela razão da potência média do EC pela densidade de potência média do núcleo, dada pela seguinte equação:

$$f_{Potencia}^{EC} \equiv \frac{\bar{P}^{EC}}{\bar{P}^{Nucleo}} = \frac{\bar{P}^{EC} \sum_{EC} V_{EC} f^{EC}}{\sum_{EC} \bar{P}^{EC} V_{EC} f^{EC}}. \quad (5.5)$$

Capítulo 6

Apresentação e Análise de Resultados

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos no cálculo do fluxo de nêutrons usando a equação híbrida da difusão de nêutrons e os procedimentos de validação da solução da equação da difusão, definida tanto para problema de autovalor quanto para problema de fonte fixa.

6.1 Problema Benchmark IAEA

Em um dos testes de validação do método proposto, resolvemos a equação da difusão de nêutrons definida para um problema de autovalor, para o reator IAEA [12] com configuração do núcleo em geometria tridimensional e simetria de 1/4 de núcleo. Para isso, utilizamos a Eq.(2.8), redefinindo os parâmetros α e β da seguinte forma, ou seja,

$$\alpha = \frac{1}{k_{eff}},$$

e

$$\beta = 0,$$

chegando na seguinte equação de autovalor:

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{1}{a_u^n} [\bar{J}_{gur}^n - \bar{J}_{gul}^n] + \Sigma_{rg}^n \bar{\phi}_g^n = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n + \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n. \quad (6.1)$$

A Fig.6.1 mostra a configuração do núcleo com simetria no plano xy do núcleo do reator, bem como as dimensões dos nodos.

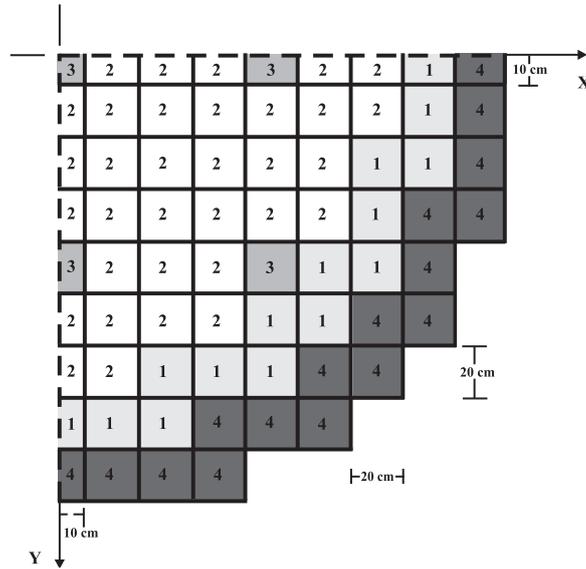


Figura 6.1: Plano bidimensional com simetria de 1/4 do núcleo do reator IAEA.

Na Fig.6.2 é mostrada a distribuição axial de elementos combustíveis e dos refletores no plano xz, com as posições dos bancos de barra de controle (BBC) e também as condições de contorno e de simetria usadas neste problema.

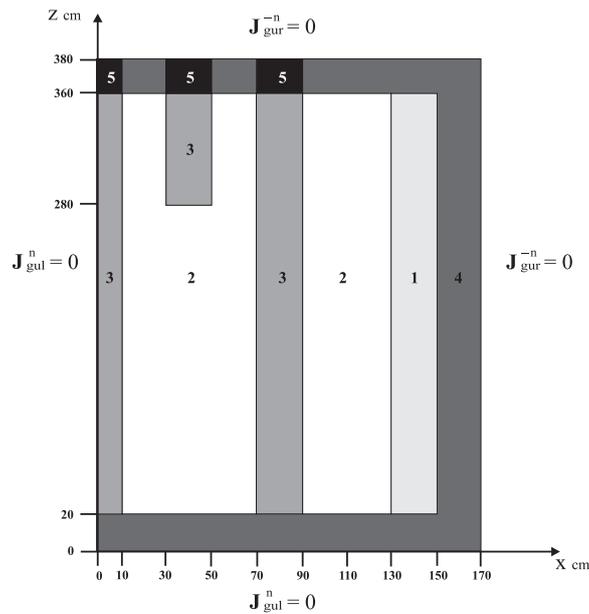


Figura 6.2: Configuração no núcleo reator IAEA no plano xz.

Nesse cálculo o núcleo foi dividido, nas direções x e y, conforme mostra a Fig.6.1, com nodos de material físsil (combustível nuclear) e de refletor, e 19 camadas na direção z, das quais a primeira e última são de refletores, com dimensões de 20 cm, e as demais camadas, constituídas por material físsil, empilhados conforme a distribuição bidimensional de elementos combustíveis da Fig.6.1, com dimensão de 20 cm cada uma. Neste caso, o número total de nodos distribuídos sobre todo o volume do núcleo do reator é de 1311 nodos.

Além disso, consideramos para esses cálculos dois grupos de energia com $\chi_1 = 1.0$ e $\chi_2 = 0.0$. Usamos o critério de convergência para o k_{eff} (nos problemas de autovalor):

$$\left| \frac{k_{eff}^{(i)} - k_{eff}^{(i-1)}}{k_{eff}^{(i)}} \right| \leq \epsilon_k.$$

O critério de convergência para o fluxo de nêutrons (nas iterações externas), foi:

$$\text{Max}_{n,g} \left| \frac{\bar{\phi}_g^{n(i)} - \bar{\phi}_g^{n(i-1)}}{\bar{\phi}_g^{n(i)}} \right| \leq \epsilon_\phi,$$

onde i é o índice representando a i -ésima iteração.

Para este problema usamos os parâmetros de convergência para o autovalor $\epsilon_k = 10^{-7}$ e para o fluxo de nêutrons $\epsilon_\phi = 10^{-6}$ para as iterações externas no método NEM.

Os parâmetros nucleares médios nos nodos utilizados no cálculo do fluxo de nêutrons estão indicados na Tab.6.1.

Na Fig.6.3 são mostrados os valores dos fatores de potência de referência para cada elemento combustível (EC) [12] do reator IAEA, assim como, os desvios relativos percentuais obtidos. O desvio relativo percentual obtido no cálculo de k_{eff} foi de 0.0026%, onde o autovalor de referência é $k_{eff}^{Ref} = 1.02903$. O desvio relativo para os fatores de potência foi obtido usando a seguinte expressão:

$$\Delta f_{Potencia}(\%) = \left[\frac{f_{Potencia}^{Ref} - f_{Potencia}^{EC}}{f_{Potencia}^{Ref}} \right] \times 100, \quad (6.2)$$

onde $f_{Potencia}^{Ref}$ é o fator de potência de referência do problema de autovalor.

Tabela 6.1: Parâmetros nucleares do reator IAEA

Tipo	g	Σ_{ag} (cm^{-1})	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm^{-1})	D_g (cm)	$\Sigma_{\substack{gg' \\ g \neq g'}}$ (cm^{-1})
1 ^a	1	0.01	0.00	1.50	0.00
	2	0.08	0.135	0.40	0.02
2 ^a	1	0.01	0.00	1.50	0.00
	2	0.085	0.135	0.40	0.02
3 ^b	1	0.01	0.00	1.50	0.00
	2	0.13	0.135	0.40	0.02
4 ^c	1	0.00	0.00	2.00	0.00
	2	0.01	0.00	0.30	0.04
5 ^d	1	0.00	0.00	2.00	0.00
	2	0.055	0.00	0.30	0.04

a - Elemento combustível sem barra de controle

b - Elemento combustível com barra de controle

c - Refletor lateral, inferior e superior sem barra de controle

d - Refletor superior com barra de controle

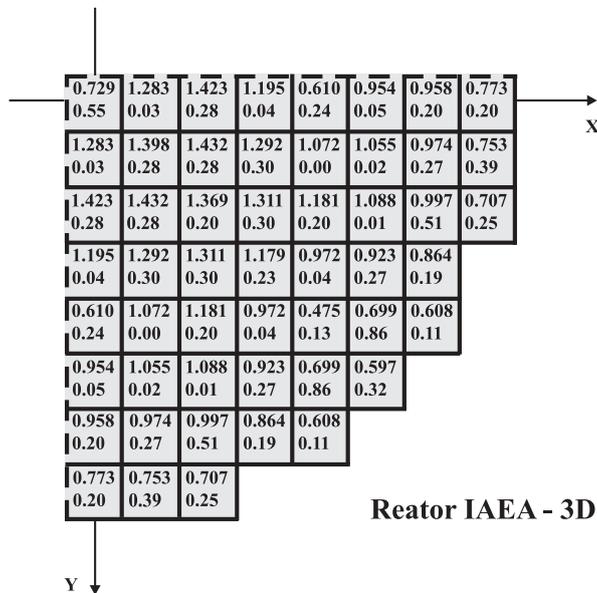


Figura 6.3: Cálculo dos desvios relativos percentuais dos fatores de potência do EC.

As Figs. 6.4 e 6.5 mostram os gráficos dos fluxos térmicos e rápidos no plano central do núcleo do reator IAEA, obtido no cálculo dos testes de validação.

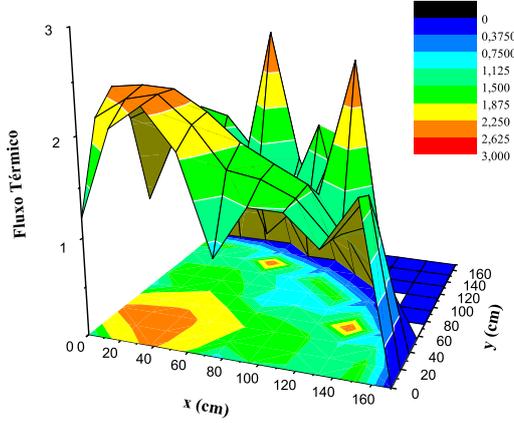


Figura 6.4: Fluxo térmico

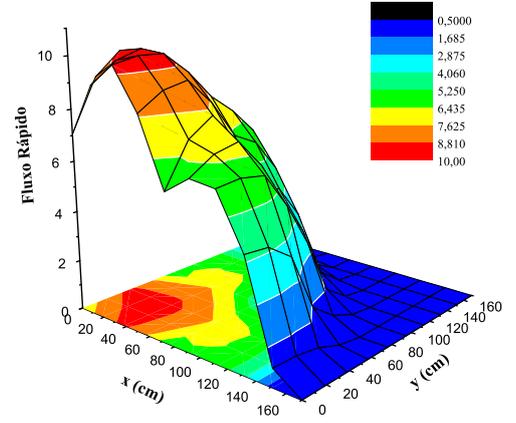


Figura 6.5: Fluxo rápido

6.2 Problema de Fonte Fixa

Nesta seção, apresentaremos os testes de validação da equação da difusão de nêutrons definida para um problema de fonte fixa. Para isso, usaremos a Eq.(2.8) e redefiniremos os parâmetros α e β da seguinte forma:

$$\alpha = 1,$$

e

$$\beta = 1,$$

resultando na seguinte equação de fonte fixa:

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{1}{\alpha_u^n} \left[\bar{J}_{gur}^n - \bar{J}_{gul}^n \right] + \Sigma_{rg}^n \bar{\varphi}_g^n = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \bar{\Sigma}_{gg'}^n \bar{\varphi}_{g'}^n + \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\varphi}_{g'}^n + S_g^n. \quad (6.3)$$

Para validar a solução numérica da Eq.(6.3), usamos os resultados obtidos pela solução da Eq.(6.1). Para isso, definimos a fonte externa de nêutrons a partir da fonte de fissão do problema de autovalor convergido, isto é, usando os fluxos médios nos nodos $\bar{\phi}_g^n$ e o fator de multiplicação efetivo k_{eff} que foram previamente calculados no problema de autovalor, da seguinte forma:

$$S_g^n \equiv \left(\frac{1}{k_{eff}} - 1 \right) \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}^n \bar{\phi}_{g'}^n. \quad (6.4)$$

O desvio relativo percentual máximo, que foi de 3%, foi obtido pela comparação no cálculo do fluxo de nêutrons expresso pela seguinte relação:

$$\epsilon \equiv \left| \frac{\bar{\phi}_g^n - \bar{\varphi}_g^n}{\bar{\phi}_g^n} \right| \times 100, \quad (6.5)$$

onde $\bar{\varphi}_g^n$ é o fluxo médio de nêutrons obtido pela solução do problema de fonte fixa e $\bar{\phi}_g^n$ o fluxo médio de nêutrons do problema de autovalor.

6.3 Equação Híbrida da Difusão de Nêutrons

Uma vez verificada a acurácia da solução numérica, tanto para o problema de autovalor quanto para o problema de fonte fixa, apresentaremos os resultados obtidos na previsão da multiplicação subcrítica de nêutrons no núcleo de um reator PWR.

Utilizamos a configuração do núcleo de um reator PWR com geometria tridimensional e simetria de 1/4 de núcleo. As Figs.6.6 e 6.7 mostram respectivamente a configuração do núcleo com simetria no plano xy do núcleo do reator, sem e com os bancos da barras de controle, assim como as dimensões dos nodos.

Nesta seção o núcleo foi dividido, nas direções x e y, conforme mostra a Fig.6.6, com nodos de material físsil (combustível nuclear) e de refletor. Na direção z o núcleo foi dividido em 19 camadas das quais a primeira e a última são de refletores (com dimensões de 20 cm) e as demais camadas, constituídas por material físsil, conforme mostramos na Fig.6.6, com dimensão de 20 cm cada uma. Neste caso, o número total

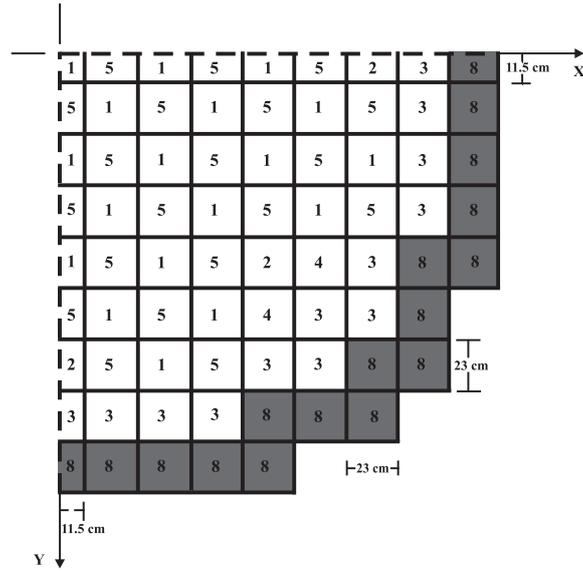


Figura 6.6: Configuração de 1/4 de núcleo com EC e Refletor.

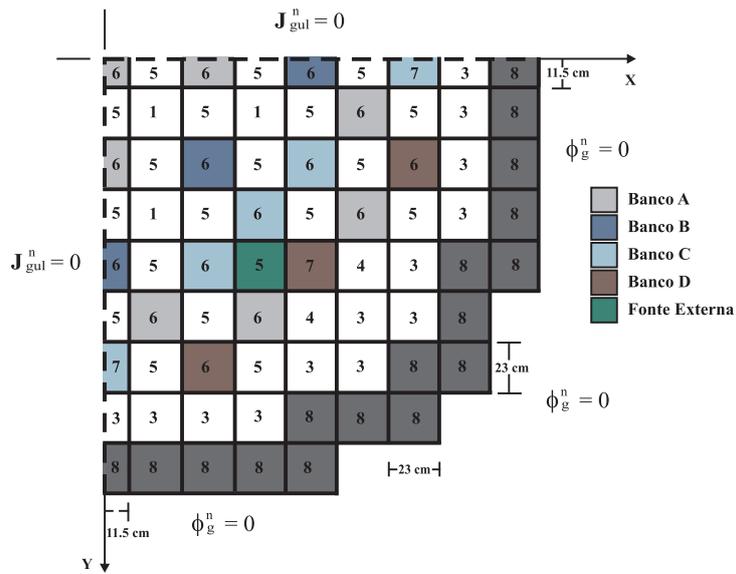


Figura 6.7: Configuração de 1/4 de núcleo com BBC.

de nodos em todo o núcleo do reator é de 1387 nodos.

Os parâmetros nucleares médios nos nodos utilizados no cálculo do fluxo de nêutrons são mostrados na Tab.6.2. Na Fig.6.8 são mostrados os parâmetros de ajuste da equação híbrida da difusão de nêutrons.

A fonte externa de nêutrons, para o grupo $g = 1$, foi obtida usando a seguinte relação:

Tabela 6.2: Parâmetros nucleares multigrupo

Tipo	g	Σ_{ag} (cm^{-1})	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm^{-1})	D_g (cm)	$\Sigma_{\substack{gg' \\ g \neq g'}}$ (cm^{-1})
1 ^a	1	9.85225E-03	5.87080E-03	1.43600	0.00000
	2	7.64554E-02	9.60670E-02	0.36350	1.77570E-02
2 ^a	1	1.002865E-02	6.19080E-003	1.43660	0.00000
	2	7.990537E-02	0.10358	0.36360	1.76210E-002
3 ^a	1	1.07216E-02	7.45270E-03	1.43890	0.00000
	2	9.29434E-02	0.13236	0.36380	1.71010E-02
4 ^a	1	1.03696E-02	6.19080E-03	1.43810	0.00000
	2	8.66174E-02	0.10358	0.36650	1.72900E-02
5 ^a	1	1.05006E-02	6.42850E-03	1.43850	0.00000
	2	8.91154E-02	0.10911	0.36650	1.71920E-02
6 ^b	1	1.05396E-02	6.19080E-03	1.43890	0.00000
	2	8.99734E-02	0.10358	0.36790	1.71250E-02
7 ^b	1	1.06686E-02	6.42850E-03	1.43930	0.00000
	2	9.24714E-02	0.10911	0.36800	1.70270E-02
8 ^c	1	2.78065E-03	0.00000	1.32000	0.00000
	2	7.48204E-02	0.00000	0.27720	2.31060E-02

a - Elemento combustível sem barra de controle

b - Elemento combustível com barra de controle

c - Refletor lateral, inferior e superior sem barra de controle

$$S_g^n = \frac{1}{4} \frac{I_{Total}}{\sum_{n \in Fonte} V_n}, \quad (6.6)$$

onde $I_{Total} = 1.0 \times 10^9$ nêutrons/seg é a intensidade total da fonte externa de nêutrons. Neste caso consideramos como sendo nula a fonte para $g = 2$. Essa fonte tem altura de 300 cm e está localizada simetricamente na direção z e sua localização no plano bidimensional é mostrada na Fig.6.7.

6.4 Resultados obtidos pelo Método Proposto

O método proposto para esta tese de doutorado tem como objetivo prever a partida de um reator através do acompanhamento da multiplicação subcrítica $1/M$, a partir da solução da equação híbrida da difusão de nêutrons com fonte externa, até a condição de criticalidade.

Sabemos que a equação da difusão para problema de fonte fixa não tem solução numérica próximo da criticalidade¹ [13, 14] e também sabemos da importância do termo de fonte externa na produção de nêutrons no núcleo do reator após a recarga do núcleo em um novo ciclo. A utilização da equação da difusão para problema de autovalor durante a partida do reator não contabilizaria a produção de nêutrons devido às fontes externas de nêutrons presentes no núcleo do reator, ou seja, contabilizará somente a contribuição do termo de fissão nuclear. Vale lembrar que durante a partida do reator as fontes externas são responsáveis pela operabilidade dos detectores externos de nêutrons e pelas correções das flutuações das contagens de nêutrons durante a partida do reator, devido o fluxo de nêutrons nesse instante ser muito baixo. Para contornar esses problemas, definimos alguns parâmetros que serviriam de ajuste para a equação da difusão de nêutrons, tal que durante a partida do reator tenhamos a equação da difusão para problema de fonte fixa e próximo da criticalidade tenhamos a equação da difusão para problema de autovalor.

Os parâmetros de ajuste da equação β e α foram definidos em função da reatividade do sistema para que tenhamos a equação da difusão de nêutrons de acordo com o nível de subcriticalidade do núcleo. Esses parâmetros permitiram a transição da equação da difusão do problema de fonte fixa, durante a partida do reator, para a equação da difusão do problema de autovalor, próximo da criticalidade.

As condições para as quais esses parâmetros β e α foram definidos é tal que não fossem superior a 1 e não negativos. Sendo assim, o termo de fissão e a fonte externa de nêutrons não contribuiriam mais do que 100% com a produção de nêutrons no núcleo do reator.

Os métodos propostos para calcular esses parâmetros foram apresentados no capítulo 4, para os casos de bancos de barras de controle totalmente e parcialmente

¹Pois não satisfaz a Alternativa de Fredholm, tal que $\langle \phi^\dagger{}^T, S \rangle = 0$.

inseridos no núcleo do reator. Em ambos os casos, a reatividade subcrítica pode ser determinada após a convergência no cálculo do fluxo de nêutrons usando o método NEM. Os parâmetros nucleares, fluxos e correntes obtidos nos cálculos no método NEM foram utilizados para montar as matrizes no DFMG. Para a obtenção desses parâmetros tornou-se necessário obter o fluxo adjunto matemático para o problema crítico que foi utilizado no cálculo da reatividade subcrítica em cada configuração de BBC.

Devido à movimentação dos bancos de barras de controle os parâmetros β e α foram recalculados, usando a formulação matricial do DFMG. Uma vez determinada a reatividade subcrítica, os parâmetros β e α foram recalculados e utilizados na equação de balanço nodal para a obtenção do novo fluxo. Na Fig.6.8 mostramos os valores desses parâmetros em função do número de passos retirados no núcleo do reator usando a Eq.(2.8).

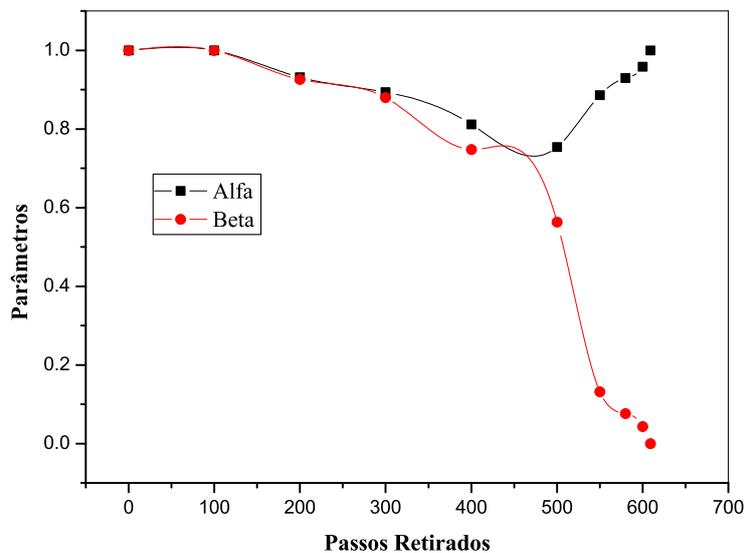


Figura 6.8: Parâmetros α e β .

Nas Tabs. 6.3, 6.4 e 6.5, as letras (A, B, C e D) representam os bancos de barras de controle seguidos dos números de passos retirados de cada banco, onde o número máximo de passos é 225. Nessas tabelas também são mostrados os resultados obtidos no cálculo da curva $1/M$ para a equação de autovalor, equação de fonte fixa e para

equação híbrida da difusão de nêutrons.

Na Tab.6.3 mostramos a configuração dos bancos de barras de controle seguidos dos números de passos retirados do núcleo do reator, assim como os valores de k_{eff} obtidos pela solução numérica da Eq.(6.1). A multiplicação subcrítica $1/M$ [3] foi obtida usando a seguinte equação:

$$\frac{1}{M} = 1 - k_{eff}. \quad (6.7)$$

Os valores de $1/M$ obtidos usando a Eq.(6.7) corresponde a diferentes posições dos bancos de barras de controle que foram considerados na solução da Eq.(6.1), e foram usados para obter a curva $1/M$ em função das posições dos BBC.

Os valores da curva $1/M$ mostrados nas Tab. 6.4 foram obtidos através do cálculo numérico do fluxo de nêutrons pela solução da Eq.(6.3). A reatividade subcrítica no núcleo do reator foi calculada usando as Eqs.(4.9) e (4.15), para bancos de barras de controle totalmente e parcialmente inseridos no núcleo do reator, respectivamente. Usando a definição de autovalor em função reatividade [15], dada por:

$$k = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (6.8)$$

A multiplicação subcrítica $1/M$ pode ser obtida pela seguinte equação:

$$\frac{1}{M} = \frac{-\rho}{1 - \rho}. \quad (6.9)$$

Os valores da curva $1/M$ mostrados na Tab.6.5 foram obtidos usando a Eq.(6.9) para diferentes posições dos bancos de barras de controle inseridos no núcleo do reator.

Na Fig.6.9 mostramos os resultados obtidos pela equação híbrida da difusão de nêutrons. Podemos observar que os resultados obtidos pela equação híbrida durante a partida do reator aproximam-se consideravelmente dos resultados obtidos pelo problema de fonte fixa. Próximo da criticalidade os resultados são também bastante satisfatórios quando comparados com o problema de autovalor.

Tabela 6.3: Problema de Autovalor

Configurações BBC	Passos	Resultados	
		k_{eff}	$1/M$
A000B000C000D000	0	0.9740960	2.5904000E-02
A100B000C000D000	100	0.9763185	2.3681462E-02
A200B072C000D000	200	0.9823781	1.7621934E-02
A225B172C044D000	300	0.9872128	1.2787163E-02
A225B225C144D016	400	0.9921207	7.8792572E-03
A225B225C225D116	500	0.9968941	3.1059384E-03
A225B225C225D166	550	0.9980280	1.9720197E-03
A225B225C225D196	580	0.9986774	1.3225675E-03
A225B225C225D216	600	0.9990476	9.5236301E-04
A225B225C225D225	609	0.9999990	1.0132790E-06

Tabela 6.4: Problema de Fonte Fixa

Configurações BBC	Passos	Resultados	
		$\rho(pcm)$	$1/M$
A000B000C000D000	0	-2903.06	2.8211534E-02
A100B000C000D000	100	-2688.20	2.6178241E-02
A200B072C000D000	200	-2103.34	2.0600140E-02
A225B172C044D000	300	-1546.90	1.5233397E-02
A225B225C144D016	400	-942.66	9.3385577E-03
A225B225C225D116	500	-326.03	3.2497048E-03
A225B225C225D166	550	-203.57	2.0315647E-03
A225B225C225D196	580	-134.66	1.3447404E-03
A225B225C225D216	600 ^a	-95.33	9.5236301E-04
A225B225C225D225	609 ^a	-0.10	1.0132790E-06

^a - Resultados obtidos pelo problema de autovalor

Tabela 6.5: Problema Híbrido

Configurações BBC	Passos	Resultados	
		$\rho(pcm)$	$1/M$
A000B000C000D000	0	-2903.06	2.8211534E-02
A100B000C000D000	100	-2688.20	2.6178241E-02
A200B072C000D000	200	-2552.98	2.4894238E-02
A225B172C044D000	300	-2171.69	2.1255314E-02
A225B225C144D016	400	-1634.83	1.6085327E-02
A225B225C225D116	500	-381.38	3.7993193E-03
A225B225C225D166	550	-221.26	2.2076964E-03
A225B225C225D196	580	-125.72	1.2555718E-03
A225B225C225D216	600	-78.97	7.8910589E-04
A225B225C225D225	609 ^a	-0.10	1.0132790E-06

a - Resultado obtido pelo problema de autovalor

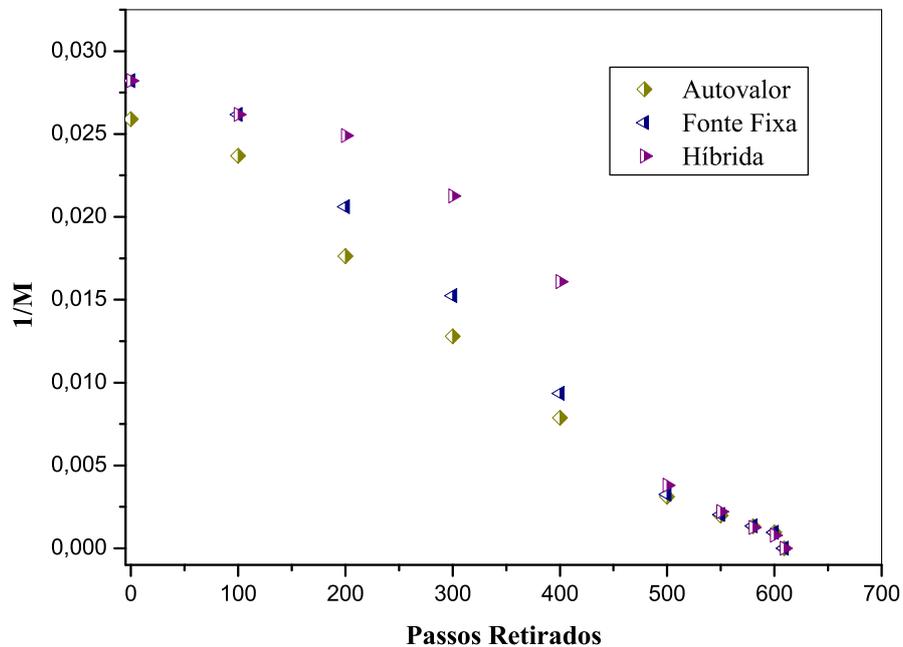


Figura 6.9: Comparação da curva $1/M$.

Capítulo 7

Conclusões

O método apresentado nesta tese permite prever a partida de um reator através do acompanhamento da multiplicação subcrítica $1/M$, a partir da solução da equação híbrida da difusão de nêutrons com fonte externa usando o método de expansão nodal NEM. Nesse método foram definidos os parâmetros de ajuste da equação β e α , que foram obtidos através do cálculo da reatividade subcrítica usando a formulação matricial do método de diferenças finitas de malha grossa DFMG. O comportamento desses parâmetros para diferentes configurações de bancos de barras de controle no núcleo do reator, foi avaliado nesta tese de doutorado.

Os resultados obtidos com o formalismo apresentado nesta tese aproximam-se consideravelmente dos resultados obtidos pelo problema de fonte fixa, durante a partida do reator, onde o termo de fonte externa é extremamente importante nos processos de produção de nêutrons no núcleo do reator. Os resultados também são bastante satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos pelo problema de autovalor, para configurações do núcleo do reator próximo da criticalidade.

Nos cálculos de acompanhamento de recarga do núcleo ou de operação do reator, geralmente utiliza-se a equação da difusão definida para problema de autovalor. Porém, durante a partida do reator, às fontes externas de nêutrons presentes no núcleo são responsáveis pelas correções das flutuações das contagens de nêutrons, devido o fluxo de nêutrons ser muito baixo, assim como pela produção de nêutrons no reator nessa faixa de subcriticalidade. Próximo da condição de criticalidade, o termo de fissão passa a ser predominante nos processos de produção de nêutrons no núcleo do reator. Com isso, a proposta desta tese de doutorado consistiu no desenvolvimento de um

modelo de equação que destaque os processos de produção de nêutrons durante a partida do reator explicitando o termo de fonte externa, usando assim a equação da difusão de nêutrons definida para problema de fonte fixa. Próximo da criticalidade os processos de produção de nêutrons no núcleo tem a predominância do termo de fissão nuclear, usando assim a equação da difusão de nêutrons definida para problema de autovalor.

Através do modelo híbrido foi possível acompanhar a multiplicação subcrítica de nêutrons no núcleo do reator usando a curva $1/M$ para diferentes configurações dos bancos de barras de controle retirados do núcleo do reator. A reatividade subcrítica foi obtida em função da movimentação dos BBC permitindo assim a obtenção dos parâmetros de ajuste da equação β e α .

Vale lembrar que a definição desses parâmetros em função da reatividade do sistema permitiu o acompanhamento contínuo da multiplicação de nêutrons no núcleo do reator sem estabelecer valores para os quais o termo de fonte de fissão e de fonte externa fossem predominantes de acordo com o nível de subcriticalidade. Podemos observar que à medida que aproximamos da condição de criticalidade o parâmetro β diminui fazendo com que a contribuição do termo de fissão passe a ser predominante nos processos de produção de nêutrons quando comparados com o termo de fonte externa.

Um ponto importante a ser destacado foi a utilização do método de diferenças finitas de malha grossa DFMG, acoplado ao método NEM, no cálculo da reatividade subcrítica. Esse acoplamento permitiu uma redução do tempo computacional gasto nesses processos. Uma vez determinado o fluxo de nêutrons no método NEM, a reatividade subcrítica do sistema pode ser obtida a partir dos dados previamente calculados no NEM e utilizados no DFMG para cada configuração do núcleo do reator; com isso os parâmetros de ajuste da equação da difusão β e α foram calculados e utilizados novamente no método NEM para uma outra configuração de bancos de barras de controle. Esse processo foi repetido desde a partida do reator até a condição de criticalidade.

Como sugestões de trabalhos futuros, poderíamos reavaliar a definição dos parâmetros β e α , permitindo assim um melhor comportamento da curva $1/M$ na

transição do problema de fonte fixa (partida do reator) para o problema de autovalor (reator crítico). Uma outra sugestão seria encontrar uma nova função importância de acordo com o nível de subcriticalidade; com isso, ao invés de utilizar o fluxo adjunto matemático para o problema crítico, passaríamos a utilizar uma função peso calculada em função da perturbação do sistema.

Apêndice A

Seção de Choque ponderada no fluxo

A Fig. A1 mostra o nodo com barra de controle parcialmente inserida. Então, partindo da Eq.(2.14), temos:

$$\Sigma_{Xg}^n \equiv \frac{1}{V_n \bar{\phi}_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) \phi_g(x, y, z) dV, \quad (\text{A.1})$$

onde Σ_{Xg}^n representa as seções de choque macroscópica de fissão e absorção. Para obtermos a seção de choque média no volume do nodo, escreveremos o fluxo de nêutrons em função das funções de base $h_k(u/a_u^n)$ da seguinte forma:

$$\phi_g(x, y, z) = \bar{\phi}_g^n + \sum_{u=x,y,z} \sum_{k=1}^2 c_{kgu}^n h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right). \quad (\text{A.2})$$

Substituindo o fluxo da Eq.(A.2) na (A.1), vem:

$$\Sigma_{Xg}^n = \frac{1}{V_n \bar{\phi}_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) \left[\bar{\phi}_g^n + \sum_{u=x,y,z} c_{1gu}^n h_1\left(\frac{u}{a_u^n}\right) + c_{2gu}^n h_2\left(\frac{u}{a_u^n}\right) \right] dV. \quad (\text{A.3})$$

Lembrando das propriedades das funções de base, apresentadas no capítulo 2, qual seja:

$$\int_0^{a_u^n} h_k\left(\frac{u}{a_u^n}\right) du = 0 ; \quad \forall \quad k \geq 1.$$

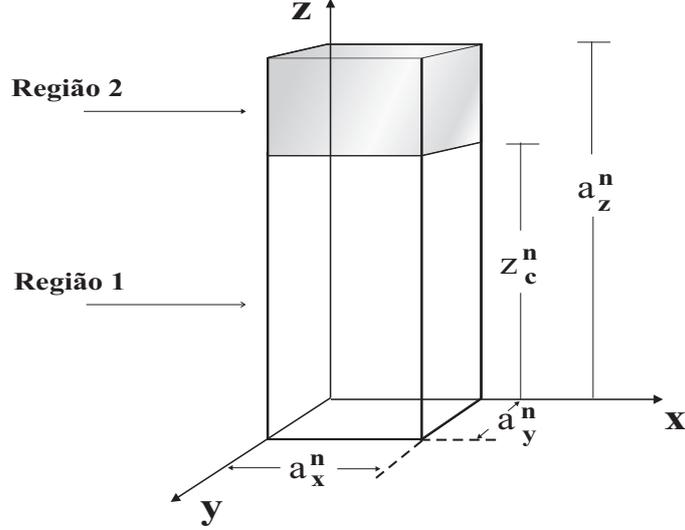


Figura A1: Barra de controle parcialmente inserida no nodo.

Logo, podemos verificar que os termos $h_1(u/a_u^n)$ e $h_2(u/a_u^n)$ para $u = x, y$ são nulos. Com isso, a Eq.(A.3), reduz a:

$$\Sigma_{Xg}^n = \frac{1}{V_n \bar{\phi}_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) \left[\bar{\phi}_g^n + c_{1gz}^n h_1\left(\frac{z}{a_z^n}\right) + c_{2gz}^n h_2\left(\frac{z}{a_z^n}\right) \right] dV. \quad (\text{A.4})$$

Para obter a seção de choque média no volume do nodo, analisaremos cada termo separadamente:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{V_n \bar{\phi}_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) \bar{\phi}_g^n dV &= \frac{1}{a_z^n} \int_0^{z_c^n} \left(\frac{1}{a_x^n a_y^n} \int_0^{a_x^n} \int_0^{a_y^n} \Sigma_{Xg}^1(x, y, z) dy dx \right) dz + \\ &\frac{1}{a_z^n} \int_{z_c^n}^{a_z^n} \left(\frac{1}{a_x^n a_y^n} \int_0^{a_x^n} \int_0^{a_y^n} \Sigma_{Xg}^2(x, y, z) dy dx \right) dz \\ &= \frac{1}{a_z^n} \int_0^{z_c^n} \Sigma_{Xg}^1(z) dz + \frac{1}{a_z^n} \int_{z_c^n}^{a_z^n} \Sigma_{Xg}^2(z) dz \\ &= \Sigma_{Xg}^{n,1} \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} \right) + \Sigma_{Xg}^{n,2} \left(1 - \frac{z_c^n}{a_z^n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2)} \quad \frac{1}{V_n \phi_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) c_{1gz}^n h_1\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dV &= \frac{c_{1gz}^n}{\phi_g^n} \frac{1}{a_z^n} \int_0^{z_c^n} \Sigma_{Xg}^1(z) h_1\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dz \quad + \\
&\quad \frac{c_{1gz}^n}{\phi_g^n} \frac{1}{a_z^n} \int_{z_c^n}^{a_z^n} \Sigma_{Xg}^2(z) h_1\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dz \\
&= \frac{c_{1gz}^n}{\phi_g^n} \left(\Sigma_{Xg}^{n,1} - \Sigma_{Xg}^{n,2} \right) \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} - 1 \right) \frac{z_c^n}{a_z^n} \\
\mathbf{3)} \quad \frac{1}{V_n \phi_g^n} \int_{V_n} \Sigma_{Xg}(x, y, z) c_{2gz}^n h_2\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dV &= \frac{c_{2gz}^n}{\phi_g^n} \frac{1}{a_z^n} \int_0^{z_c^n} \Sigma_{Xg}^1(z) h_2\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dz \quad + \\
&\quad \frac{c_{2gz}^n}{\phi_g^n} \frac{1}{a_z^n} \int_{z_c^n}^{a_z^n} \Sigma_{Xg}^2(z) h_2\left(\frac{z}{a_z^n}\right) dz \\
&= \frac{c_{2gz}^n}{\phi_g^n} \left(\Sigma_{Xg}^{n,1} - \Sigma_{Xg}^{n,2} \right) \left(3 \frac{z_c^n}{a_z^n} - 2 \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} \right)^2 - 1 \right) \frac{z_c^n}{a_z^n}
\end{aligned}$$

A solução da integral da Eq.(A.4) fica

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Xg}^n &= \Sigma_{Xg}^{n,1} \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} \right) + \Sigma_{Xg}^{n,2} \left(1 - \frac{z_c^n}{a_z^n} \right) + \frac{c_{1gz}^n}{\phi_g^n} \left(\Sigma_{Xg}^{n,1} - \Sigma_{Xg}^{n,2} \right) \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} - 1 \right) \frac{z_c^n}{a_z^n} \quad + \\
&\quad + \frac{c_{2gz}^n}{\phi_g^n} \left(\Sigma_{Xg}^{n,1} - \Sigma_{Xg}^{n,2} \right) \left(3 \frac{z_c^n}{a_z^n} - 2 \left(\frac{z_c^n}{a_z^n} \right)^2 - 1 \right) \frac{z_c^n}{a_z^n}, \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

onde $\Sigma_{Xg}^{n,1}$ e $\Sigma_{Xg}^{n,2}$, representam respectivamente, as seções de choque médias no nodo para as regiões 1 e 2, conforme mostra a Fig. A1. Esse resultado vale para as seções de choque médias ponderadas no fluxo conforme mencionado no capítulo 2, ou seja, as seções de choque de fissão $\nu \Sigma_{fg}^n$ e absorção Σ_{ag}^n .

Note que, se aplicarmos o limite quando $z_c^n \rightarrow a_z^n$, obtemos o seguinte resultado:

$$\Sigma_{Xg}^n = \Sigma_{Xg}^{n,1}, \quad (\text{A.6})$$

ou seja, teremos o nodo composto somente pela região 1.

Referências Bibliográficas

- [1] PEREIRA, V., *Sistema para Previsão e Determinação da Multiplicação Subcrítica*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [2] BITELI, U. D., KURAMOTO, R., *A3 - Ciclo de Nêutrons*, IPEN-CNEN/SP, 2006.
- [3] PEREIRA, V., MARTINEZ, A. S., DA SILVA, F. C., "Influence of the external neutron sources in the criticality prediction using 1/M curve", *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, pp. 1875-1888, 2005.
- [4] FINNEMANN, H., BENNEWITZ, F., WAGNER, M. R., "Interface Current Techniques for Multidimensional Reactor Calculations", *Atomkernenergie-Kerntechnik*, v. 30, pp.123-128, 1977.
- [5] DA SILVA, F. C., MARTINEZ, A. S., "Aceleração do Método Nodal NEM usando Diferenças Finitas de Malha Grossa", *VI Encontro de Modelagem Computacional*, Nova Friburgo, RJ, Brasil, 2003.
- [6] STACEY, W. M., *Nuclear Reactor Physics*. Second Edition, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007.
- [7] ARAGONES, J. M., AHNERT, C., "A Linear Discontinuous Finite Difference Formulation for Synthetic Coarse Mesh Few-Group Diffusion Calculations", *Nuclear Science and Engineering*, v. 94, pp. 309-322, 1986.

- [8] CHAO, Y. A., "Coarse Mesh Finite Difference Methods and Applications", *Proceedings of the ANS International Topical Meeting on Advances in Reactor Physics, Mathematics and Computation into the Next Millennium*, May 7-12, Pittsburgh, USA, v. 1, pp. 1-17, 1999.
- [9] DE LIMA, Z. R., DA SILVA, F. C., ALVIM, A. C. M., "Use of pseudo-harmonics method coupled with finite differences coarse mesh in the solution of fixed source problems", *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, pp. 1366-1376, 2005.
- [10] NAKAMURA, S., *Computational Methods in Engineering and Science*. 1 ed. John Wiley & Sons, New York 1977.
- [11] GREENSPAN, E., 1975. "A Source Multiplication Reactivity", *Nuclear Science and Engineering*, v. 55, pp. 103-105.
- [12] WAGNER, M. R., FINNEMANN, H., KOEBKE, K., Winter, H. J., 1977. "Validation of the Nodal Expansion Method and the Depletion Program MEDIUM-2 by Benchmark Calculations and direct Comparison with Experiment", *Atomkernenergie*, v. 30, pp. 129-135.
- [13] PLANCHARD, J., 1990. "On the calculation of flux in slightly subcritical reactors with external neutron sources", *Progress in Nuclear Energy*, v. 23, pp. 181-189.
- [14] BRUNA, G. B., PLANCHARD, J., 1991. "Neutron fluxes in a slightly subcritical reactor in the presence of external sources", *Progress in Nuclear Energy*, v. 25, pp. 1-6.
- [15] DUDERSTADT, J. J., HAMILTON, L. J., *Nuclear Reactor Analysis*. 1 ed. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1976.