

DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA DE VISUALIZAÇÃO
TRIDIMENSIONAL APLICADA A ESTEREO RADIOGRAFIA

Paulo César Machado de Abreu Farias

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Aprovada por:

Prof. Ricardo Tadeu Lopes, D.Sc.

Prof. Delson Braz, D.Sc.

Prof. João Marcos Alcoforado Rebello, D.Sc.

Prof. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves, D.Sc.

Prof. Luis Fernando de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2006

FARIAS, PAULO CÉSAR MACHADO DE ABREU

Desenvolvimento de uma metodologia
de visualização tridimensional
aplicada a estereoradiografia [Rio
de Janeiro] 2006

XV, 105 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
D.Sc., Engenharia Nuclear, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1.Estereoradiografia 2.Radiografia
3.Visão Computacional 4.Processamento
Digital de Imagens

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Dedicado aos dois sóis da minha vida.

Agradecimentos

Aos meus **Amigos** por terem me acompanhado em todos os momentos desta jornada, mesmo quando eu pensava que estava só.

Ao amor incondicional dos meus pais, que gestou as asas que me permitiram voar...

A Izaura, pelo amor e pelas risadas...

Aos meus filhos, Thiago e Théo por trazerem felicidade, alegria e bagunça à minha vida.

Dé, Cris, Pedro, Gabi, João e Flavinho. O manão ama vocês!

Ao Prof. Ricardo Tadeu Lopes pela orientação e apoio que me deu ao longo da realização deste trabalho.

À Universidade Estadual de Feira de Santana por ter viabilizado o meu doutoramento através da sua política de capacitação docente.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Prof. Iuri Pepe, que teve uma importância ímpar na minha formação acadêmica e profissional. Valeu Chefia!

Ao meu **irmão** Marceleza, cujo exemplo de dedicação ao trabalho é um dos meus

maiores estímulos para seguir adiante.

Aos companheiros de trabalho e corpo de funcionários do Programa de Engenharia Nuclear, meus sinceros agradecimentos pela agradável convivência durante o doutorado.

Aos meus colegas de trabalho do Departamento de Ciências Exatas, em especial a Ana de Oliveira. Muito obrigado Aninha!

Às amigadas que fiz em Niterói e no Rio de Janeiro. Tive muita sorte em conhecer tanta gente bacana! Sinto saudades de vocês.

Um agradecimento *mais que especial* à Dorval, meu “anjo da guarda” .

Aos amigos Mônica & Sérgio, Rosa & Miltão, Cíntia & Ciro por terem tão generosamente me acolhido em suas casas quando a minha família não estava presente.

Ao meu amigo Arnaldo Risman, por ter me ajudado a perceber que desorganizando, posso me organizar...

Ao LSD/CBPF, a minha primeira “estação”. Prof. Ademarlaudo, Germano, Lulu, Paulo, Herman, Robertão, Rogério: vou sentir falta do almoço nas “porquinhas”!

À moçada do LaPO/UFBa, em particular a Tiago, Nescau e Jera. Não deixem a peteca cair!

Aos meus companheiros da “first generation”: Drica, Nilton, Black, Jailton, Busunda, Joelmo, Álvaro. E vamo que vamo!

E, para finalizar, um agradecimento especial ao filósofo cearense Falcão (Século XX D.C.). Agora eu entendo a genialidade da sua máxima: *Lends picantis in anus autrem q’sucus est...*

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA DE VISUALIZAÇÃO
TRIDIMENSIONAL APLICADA A ESTEREO RADIOGRAFIA

Paulo César Machado de Abreu Farias

Dezembro/2006

Orientador: Ricardo Tadeu Lopes

Programa: Engenharia Nuclear

Este trabalho apresenta um estudo da técnica de estereoradiografia aplicada a problemas de ensaios não-destrutivos (END). Desenvolveu-se um conjunto de procedimentos experimentais e computacionais para fazer a localização de defeitos e a reconstrução geométrica de estruturas com aquisição de pelo menos duas radiografias em ângulos diferentes. A técnica tem como uma das principais vantagens a simplicidade no procedimento experimental, característica que possibilita a aplicação da estereoradiografia em situações onde técnicas concorrentes não podem ser utilizadas. Os ensaios foram feitos utilizando um sistema de radiografia em tempo real FeinFocus composto de um tubo de raios X microfocado, intensificador de imagens e câmera CCD. Outro sistema, com um tubo de raios X portátil e um detector *image plate* foi também usado, simulando as condições de medida no campo. Foi desenvolvido um pacote de rotinas implementando todos os algoritmos utilizados no trabalho. Como resultado, foi possível obter reconstruções parciais dos corpos de prova utilizados, além de medir distâncias entre pontos característicos (*features*) destes objetos. Adicionalmente foi proposto um método para estabelecer a incerteza nas coordenadas 3D reconstruídas, com precisão média da ordem de 16% para as imagens feitas com a câmera CCD e 6% com *image plate*. A partir dos resultados obtidos conclui-se que esta técnica oferece vantagens para a aplicação a END. Pode-se mostrar que a estratégia de simplificar a tomada de dados através da transferência da complexidade para o *software* de análise é viável, potencializando o uso da estereoradiografia no campo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DEVELOPMENT OF A THREE-DIMENSIONAL VISUALIZATION
METHODOLOGY APPLIED TO STEREO RADIOGRAPHY

Paulo César Machado de Abreu Farias

December/2006

Advisor: Ricardo Tadeu Lopes

Department: Nuclear Engineering

This work presents a study of the stereoradiographic technique applied to Non-Destructive Testing (NDT). A set of experimental and computational procedures were developed in order to locate defects and to do the geometrical reconstitution of structures, with the acquisition of at least two radiographies taken from different angles. The technique has as one of its main advantages the simplicity in its experimental procedure, a characteristic that allows the applicability of stereoradiography in situations where alternative techniques cannot be used. The tests were done with the help of a FeinFocus real time radiographic system made up of a microfocus X-rays tube, an image intensifier and a CCD camera. Another system, with a portable X-rays tube and an image plate detector was also used, simulating field measurement conditions. A set of routines were developed implementing all algorithms applied in the work. As a result, it was possible to obtain partial reconstructions of the phantoms used, as well as to measure the length among characteristic points (features) of these objects. A method for establishing the uncertainty in the reconstructed 3D coordinates was also proposed, with a 16% average precision for images produced with a CCD camera and 6% with an image plate detector. The results obtained show that this technique offers advantages to the END application. The viability of the strategy of simplifying the data intake through complexity transference to the analysis software can be demonstrated, potentializing the use of stereoradiography in the field.

Sumário

	iii
Agradecimentos	iv
1 Introdução	1
1.1 Motivações	1
1.2 Organização da Tese	5
2 Geometria Projetiva	7
2.1 Introdução	7
2.2 Geometria projetiva bidimensional	8
2.2.1 Coordenadas homogêneas	8
2.2.2 Pontos ideais	10
2.2.3 Razão cruzada (<i>cross ratio</i>)	11
2.2.4 Cônicas	11
2.2.5 Pontos absolutos	12
2.2.6 Transformações projetivas	13
2.3 Geometria projetiva tridimensional	15
2.3.1 Cônica absoluta (Ω_∞)	16
2.4 Sumário	17
3 Geometria epipolar	18
3.1 Introdução	18
3.2 Matriz fundamental F	20
3.2.1 Representação algébrica	20
3.2.2 Sumário das características da matriz F	24

3.3	Relação entre a matriz fundamental F e as matrizes de câmera P e P'	25
3.4	Matriz essencial	26
3.5	Estimação da matriz fundamental	28
3.5.1	Solução com 7 correspondências	29
3.5.2	Mínimos quadrados com 8 ou mais pontos	30
3.5.3	Interpretação do critério de minimização do algoritmo linear	32
3.5.4	Estimação através de métodos iterativos	33
3.6	Estimação robusta	35
3.7	Sumário	36
4	Calibração	37
4.1	Introdução	37
4.2	Modelo de câmera	37
4.3	Métodos de calibração	41
4.3.1	Calibração com um modelo tridimensional	42
4.3.2	Calibração planar	43
4.3.3	Efeito da distorção na calibração	47
4.4	Sumário	47
5	Reconstrução Geométrica	48
5.1	Introdução	48
5.2	Problema de reconstrução	49
5.3	Correção aproximada pelo erro de Sampson	50
5.4	Triangulação linear	52
5.5	Sumário	53
6	Procedimento experimental	54
6.1	Introdução	54
6.2	Materiais e métodos	54
6.3	Pré-processamento das imagens	58
6.4	Calibração	61
6.4.1	Calibração tridimensional	61
6.4.2	Calibração planar	62
6.5	Reconstrução	64

6.5.1	Estimativa do erro	66
7	Resultados	75
7.1	Introdução	75
7.2	Amostra 17022004	75
7.3	Amostra 05072005	78
7.4	Amostra 02062005	81
7.5	Amostra 09102004 - compósito	83
7.6	Amostra 15072005 - <i>image plate</i>	84
7.7	Amostra 26102006 - <i>image plate</i>	87
7.8	Amostra 27102006 - gamagrafia	89
8	Conclusões	93
	Referências Bibliográficas	97
A	Parâmetros intrínsecos a partir da imagem da cônica absoluta w.	102
B	Matriz anti-simétrica gerada por um vetor.	103
C	Fluxograma do procedimento experimental com o sistema micro-focus.	104
D	Fluxograma do <i>software</i> desenvolvido.	105

Lista de Figuras

2.1	Modelo do plano projetivo	9
3.1	Geometria epipolar	19
3.2	Entidades da geometria epipolar	20
3.3	Transferência via plano	21
4.1	Câmara <i>pinhole</i>	38
4.2	Vista lateral do modelo de câmara <i>pinhole</i>	38
4.3	Sistema de referência da imagem	39
4.4	Parâmetros extrínsecos da câmara	40
5.1	Triangulação	49
6.1	Padrão de calibração 3D formado por placas de circuito impresso encaixadas ortogonalmente em uma estrutura de suporte.	55
6.2	Radiografia do padrão de calibração tridimensional.	55
6.3	Radiografia usada na calibração planar. As placas de circuito impresso são posicionadas independentemente umas das outras.	56
6.4	Imagem de calibração típica, composta de duas placas de circuito impresso. As ilhas das placas servem como pontos de referência para a calibração	58
6.5	<i>Binarização</i> e segmentação da imagem do plano de calibração. Após o processamento, somente as marcas de calibração pertencentes à ROI permanecem na imagem.	60
6.6	Pontos de calibração superpostos à imagem.	60
6.7	Pontos reconstruídos e pontos medidos, em pixels.	62

6.8	Erro de calibração para as soluções linear e otimizada. As coordenadas dos pontos são dadas em pixels. Os histogramas representam a distribuição do erro de reprojeção em pixels	64
6.9	Procedimento de identificação de pontos correspondentes no par estéreo. 66	
6.10	Representação esquemática do arranjo experimental	68
6.11	Radiografia utilizada no estudo da incerteza do experimento. Os pontos destacados foram utilizados na reconstrução.	69
6.12	Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.11.	70
6.13	Radiografia usada no estudo da incerteza do experimento. Os pontos destacados foram utilizados na reconstrução. Neste exemplo, as matrizes de câmara foram obtidas por calibração 3D.	71
6.14	Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.13.	72
6.15	Radiografia obtida com <i>image plate</i> , com os pontos utilizados na reconstrução em destaque.	73
6.16	Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.15.	74
7.1	Par estéreo <i>ob4</i> do ensaio 17022004.	76
7.2	Seleção de pontos para reconstrução	76
7.3	Par estéreo em destaque.	77
7.4	Par estéreo em destaque.	77
7.5	Medida da lateral da caixa metálica	77
7.6	Amostra 05072005.	78
7.7	Visão frontal da reconstrução das bordas de um dos furos do objeto da figura 7.6(a). Escala em centímetros.	79
7.8	Reconstrução das bordas. Escala em centímetros.	79
7.9	Geometria do furo no corpo de prova	80
7.10	Modelos 3D.	80
7.11	Modelos 3D.	81
7.12	Fotografia do corpo de prova	82

7.13	Amostra 02062005.	82
7.14	Radiografia - bloco de aço	83
7.15	Reconstrução - pontos e borda ajustada. Escala em centímetros.	84
7.16	Amostra 09102004 - compósito.	84
7.17	Amostra 09102004 - compósito.	85
7.18	Fotografia dos corpos de prova utilizados.	86
7.19	Radiografia dos componentes eletrônicos, com os pontos selecionados para reconstrução assinalados.	86
7.20	Ensaio 26102006 - <i>image plate</i>	87
7.21	Par estéreo do ensaio 26102006 - <i>image plate</i>	88
7.22	Fotografia do tubo com defeitos entalhados.	89
7.23	Radiografia do tubo.	90
7.24	Medida do diâmetro.	91
7.25	Medida de distância.	92
7.26	Espessura da estria.	92
C.1	Procedimento experimental com o sistema microfoc.	104
D.1	Procedimento computacional.	105

Lista de Tabelas

7.1	Tabela comparativa. Amostra 17022004	78
7.2	Tabela comparativa. Amostra 02062005	82
7.3	Tabela comparativa. Amostra 26102006 - <i>image plate</i>	88

Lista de Algoritmos

1	Calibração com padrão tridimensional	61
2	Calibração planar	63
3	Procedimento de reconstrução	65
4	Estimação da matriz fundamental \mathbf{F}	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações

Os ensaios não destrutivos (END) são usados para avaliar a integridade de materiais e equipamentos sem interferir na sua posterior utilização. Estes procedimentos são importantes na indústria para estabelecer critérios de qualidade, mensurar parâmetros e reduzir custos de inspeção.

Algumas das técnicas mais antigas de END baseiam-se no uso de radiação ionizante para efetuar estas investigações sobre a amostra em estudo. De uma forma genérica, elas diferem pelo tipo de fonte de radiação utilizado. A gamagrafia emprega radioisótopos, por exemplo Iridio, para irradiar o corpo sob inspeção e registra a imagem com filmes radiográficos. No caso da radiografia industrial, um tubo de raios X ilumina a amostra. Se a imagem for adquirida por um sistema com intensificador de imagens e câmera, a visualização é instântanea e costuma-se designar a técnica de radiosopia ou fluoroscopia.

Apesar do poder da radiografia na visualização da estrutura interna da amostra, a natureza do processo de geração da imagem faz com que a informação de profundidade seja perdida. A imagem radiográfica apresenta todo o volume da amostra superposto em um plano, tornando a identificação de defeitos uma tarefa difícil e cansativa para o inspetor. Além disso, a quantificação de dimensões só é possível em alguns casos especiais.

A tomografia computadorizada (TC) [1] pode ser uma alternativa para análises mais detalhadas do material. Esta técnica, que reconstrói a estrutura interna do ma-

terial a partir da medida da atenuação de um feixe de raios X, faz um mapeamento muito mais completo que a radiografia. Os resultados podem ser visualizados tridimensionalmente ou como imagens de fatias internas do objeto.

Entretanto, o uso da TC no ambiente industrial é limitada por uma série de fatores [2]. A medida necessita de um aparato experimental complexo, que torna o custo proibitivo para muitas aplicações. Existem outras restrições de ordem prática, como o tempo de exposição longo para obter as várias imagens necessárias. O próprio formato do objeto inspecionado pode tornar a medida difícil de ser efetuada, por exemplo a TC de uma chapa metálica. Neste caso, a depender da orientação da amostra em relação ao feixe de radiação, o sinal medido pode ser muito débil, alterando o relação sinal-ruído e introduzindo artefatos na reconstrução.

Uma opção viável para o problema é a utilização da visão estéreo [3]. Esta técnica, amplamente usada em navegação de robôs [4], também é conhecida como estereoscopia e objetiva a recuperação da percepção de profundidade de uma cena a partir de dados bidimensionais. O processo consiste em adquirir pelo menos duas imagens da cena a partir de posições distintas, identificar as regiões correspondentes e aplicar um processo de reconstrução tridimensional baseado no conceito de triangulação. A reconstrução é geométrica, recupera as coordenadas 3D dos pontos selecionados e não o coeficiente de absorção do material, como no caso da TC.

A estereoscopia utilizando raios X ou estereoradiografia [5] oferece uma série de vantagens como ferramenta em END [6, 7]. Esta técnica possibilita a medida da profundidade de estruturas presentes na radiografia, simplificando a interpretação das imagens radiográficas e facilitando o desenvolvimento de processos automatizados ou semi-automáticos de avaliação.

Em uma radiografia, a informação volumétrica presente na amostra é projetada no plano da imagem. Por causa deste efeito projetivo, em algumas situações não é simples fazer a discriminação dos defeitos e a avaliação da profundidade e dimensão dos mesmos. Estas tarefas exigem algum treinamento e experiência do inspetor, principalmente quando as imagens têm pouco contraste. Neste panorama, a estereoradiografia se apresenta como uma boa alternativa, vencendo estas dificuldades sem complicar o procedimento experimental.

No levantamento bibliográfico deste tema, foram encontradas algumas re-

ferências a este tema no contexto de END. No trabalho de Lehr *et al* [8] foi feita uma aplicação de estereoscopia usando um sistema microfoco. Nos trabalhos de metrologia industrial reportados em [9] e [10] a técnica de visão estéreo é aplicada, com os parâmetros da projeção estimados por calibração tridimensional. As técnicas de calibração serão descritas no Capítulo 4. No trabalho de Carrasco e Mery [11], recursos de geometria projetiva (Capítulo 2) são utilizados para identificar defeitos objetos manufaturados, discriminando os artefatos introduzidos pelo ruído na aquisição das imagens.

Como a reconstrução geométrica recupera as coordenadas espaciais dos pontos selecionados, é possível medir as dimensões de características internas do objeto, por exemplo, defeitos no processo de fabricação. Uma prática corrente em radiografia industrial é a transformação do número de pixels entre dois pontos de interesse em distância, utilizando um fator de conversão obtido por calibração. Entretanto, este cálculo não considera a profundidade dos alvos e esta medida só é acurada se os pontos pertencerem a um plano paralelo ao plano da imagem. O problema é resolvido na estereoscopia, uma vez que as distâncias são medidas considerando as coordenadas tridimensionais do objeto e não as suas projeções na radiografia.

Em comparação com a TC, a radioestereoscopia possui a vantagem de ser mais simples e barata. O processo de aquisição de dados é mais rápido pois exige um número menor de imagens e além disso a técnica pode ser utilizada mesmo em objetos cuja estrutura impede a aplicação dos métodos da TC convencional.

Em algumas referências pesquisadas, a recuperação das coordenadas tridimensionais dos defeitos baseia-se em um preciso controle dos movimentos da amostra [12,13]. No presente trabalho, fez-se uma adaptação de técnicas de Visão Computacional para tornar o procedimento experimental o mais simples e robusto possível. A amostra tem movimento livre e toda a informação geométrica é extraída das imagens utilizando ferramentas da Geometria de Múltiplas Imagens (*Multiple View Geometry*) [14,15]. Estes algoritmos, usualmente aplicados em robótica, foram adequados às especificidades das imagens radiográficas.

Para garantir a movimentação livre das amostras, as características da projeção são recuperados pelo procedimento de calibração. Neste algoritmo, parâmetros como posição e orientação dos objetos em relação a um sistema de referência esta-

belecido, distância focal, ponto principal e os fatores de conversão pixel/unidade de comprimento, são obtidos a partir das radiografias. Neste trabalho foram usadas duas estratégias, sendo uma delas a calibração com padrão tridimensional, que é mais tradicional no contexto da estereoradiografia. A outra técnica explorada foi a calibração planar, que é bem mais simples experimentalmente mas exige uma abordagem matemática mais refinada.

Com o objetivo de auxiliar a extração dos pontos de controle para a calibração, é feito um pré-processamento nas radiografias, realçando as imagens e filtrando os artefatos. A localização das marcas de calibração é feita automaticamente, calculando o centróide de elipses ajustadas às imagens das ilhas.

Para proceder com a reconstrução propriamente dita, o algoritmo de triangulação necessita das matrizes de câmera fornecidas pela calibração e das coordenadas nas duas imagens que representam o ponto no espaço que se quer reconstruir.

Para que o operador não precise fazer a identificação deste pontos manualmente, foi desenvolvido um módulo para localizar as coordenadas automaticamente. A partir da seleção do ponto desejado na primeira radiografia, o *software* retorna o seu par na segunda imagem. Para viabilizar esta funcionalidade foi desenvolvido um procedimento de correlação entre as radiografias.

Entretanto, a correlação bidimensional tradicional não tem um desempenho satisfatório quando aplicado às radiografias, além de ser computacionalmente muito caro. A saída encontrada foi utilizar a geometria projetiva para diminuir o espaço de busca. Como será detalhado nos capítulos 2 e 3, a partir de uma entidade geométrica denominada matriz fundamental, é possível traçar as linhas epipolares nas imagens, reduzindo a dimensão da busca. Pontos homólogos nas duas imagens situam-se sobre as correspondentes linhas epipolares, que são facilmente identificáveis.

Baseado neste princípio geométrico, a correlação é feita em uma faixa ao longo destas linhas, aumentando a eficiência na identificação. Idealmente a correlação poderia ser feita somente em uma dimensão, mas por causa do ruído é definida uma “faixa de segurança” de alguns pixels em torno das linhas epipolares.

Na subrotina que implementa a triangulação, antes da utilização dos pontos na reconstrução é feita uma correção das coordenadas para que elas atendam aos parâmetros projetivos extraídos das imagens, encerrados na matriz fundamental.

Todos os algoritmos discutidos no trabalho foram implementados, inicialmente prototipados no ambiente de computação científica MATLAB[®], e estão parcialmente portados para a linguagem Python acoplada a algumas rotinas feitas em C.

1.2 Organização da Tese

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O Capítulo 2 faz uma introdução à Geometria Projetiva e apresenta o substrato teórico para a maioria das ferramentas matemáticas utilizadas. São mostrados os conceitos de coordenadas homogêneas, pontos ideais e absolutos, razão cruzada, transformações projetivas para o caso bidimensional e sua extensão para 3D, e cônicas. A abordagem é primordialmente algébrica, para possibilitar a tradução destes conceitos em algoritmos.

No Capítulo 3, as relações geométricas entre duas imagens de uma mesma cena são exploradas. A matriz fundamental é definida e sua importância para reconstrução estéreo fica explícita, principalmente para a etapa de identificação de pontos correspondentes nas duas imagens. As relações da matriz fundamental com as matrizes de calibração de câmera e com a matriz essencial são mostradas. Além disso, uma parte do capítulo é dedicada aos métodos de estimação da matriz fundamental, incluindo um métodos robustos mais significativos.

A calibração do sistema, essencial para a recuperação da geometria da cena, é abordada no Capítulo 4. Inicialmente é apresentado um modelo para o mapeamento projetivo, considerando uma aproximação da câmera *pinhole*. As equações da calibração são deduzidas para os dois casos estudados, calibração com padrão tridimensional e calibração planar.

O Capítulo 5 mostra o problema da reconstrução 3D baseada na triangulação linear. A técnica de correção dos pixels correspondentes para atender a restrição epipolar é apresentada na seção 5.3, que trata da aproximação de Sampson.

O procedimento experimental é detalhado no Capítulo 6. É feita a descrição dos equipamentos usados, do aparato experimental auxiliar e do roteiro de medida. Também são detalhados os algoritmos de tratamento dos dados: pré-processamento, calibração, reconstrução. Define-se um critério de estimativa de erro para as coor-

denadas tridimensionais calculadas. Este critério baseia-se na observação do comportamento do algoritmo de reconstrução ao se contaminar os dados de entrada com ruído de distribuição normal.

Os resultados experimentais são mostrados no Capítulo 7, com as respectivas análises.

Finalmente, o Capítulo 8 discute as conclusões e perspectivas do trabalho.

Capítulo 2

Geometria Projetiva

2.1 Introdução

O processo de geração da imagem por raios X pode ser aproximadamente modelado como uma projeção do espaço tridimensional em um plano. Este tipo de operação tem algumas características singulares. Após uma projeção perspectiva, algumas propriedades geométricas da cena real são alteradas, por exemplo ângulos e comprimentos não são preservados e linhas paralelas no espaço podem se interceptar na imagem. Na geometria euclidiana somente estão definidas as operações de translação e rotação, que não alteram as entidades geométricas descritas anteriormente e preservam o paralelismo. Portanto, ela é inadequada para tratar o problema, exigindo a utilização de uma ferramenta matemática mais adequada.

A geometria euclidiana é um subconjunto de uma geometria mais ampla, que engloba uma classe maior de operações. Esta geometria, conhecida como *projetiva* ou *descritiva*, é capaz de tratar de rotações, translações, mudanças de escala, cisalhamento, projeções perspectivas e composições de projeções. Como o número de operações é maior, a quantidade de entidades geométricas invariantes diminui. Algumas invariantes sob uma transformação projetiva são o tipo (uma reta é mapeada como uma reta), a incidência (um ponto pertencente a uma reta na cena, pertencerá também à sua imagem) e uma grandeza chamada razão cruzada (*cross ratio*), que será discutida mais adiante. De uma forma geral poderia se definir que, enquanto a geometria euclidiana descreve o mundo em que estamos imersos, a geometria projetiva trata do mundo “como o vemos”.

Além de modelar o fenômeno mais adequadamente, a geometria projetiva oferece também uma representação matemática dos dados mais apropriada. A utilização de coordenadas homogêneas para representar as entidades geométricas permite que, por exemplo, pontos no infinito tenham a mesma forma que pontos finitos, sem a necessidade de utilizar limites. Outro exemplo é a operação de projeção perspectiva, que é um mapeamento não-linear, se transforma em uma equação matricial.

Os maior parte dos conceitos necessários será exposta considerando-se um plano projetivo \mathbb{P}^2 , por ser mais simples a visualização. Estas grandezas podem ser facilmente generalizadas para o espaço projetivo tridimensional \mathbb{P}^3 .

2.2 Geometria projetiva bidimensional

2.2.1 Coordenadas homogêneas

Em um plano euclidiano, um ponto P é representado por um par de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. No plano projetivo é adicionada uma terceira coordenada α , de tal forma que o ponto passa a ter coordenadas $P = (x, y, \alpha)$. A escala é irrelevante, portanto $P = (x, y, \alpha)$ e $P' = (kx, ky, k\alpha)$ são equivalentes para $k \neq 0$. Desta forma, um ponto em \mathbb{P}^2 pode ser visualizado como uma reta no espaço tridimensional que exclui a origem, como mostra a figura 2.1. Para cada particular valor de α , tem-se uma representação projetiva para P .

Na figura 2.1, o plano π definido por $x_3 = \alpha$ estabelece o par de coordenadas não-homogêneas do ponto \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha} \right) \tag{2.1}$$

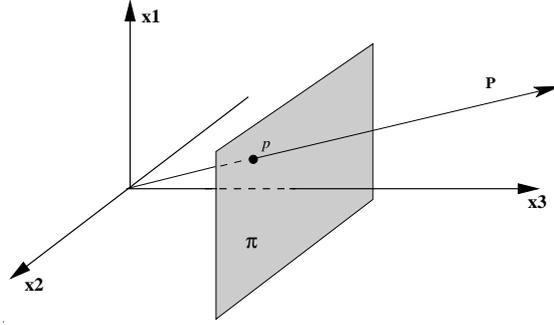


Figura 2.1: Modelo do plano projetivo

Considerando a equação geral da reta: $ax + by + c = 0$, pode-se estabelecer algumas relações importantes entre pontos e retas no plano projetivo. Usando uma notação vetorial para estas entidades, tem-se:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pode-se representar a equação da reta alternativamente como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{x}^t \mathbf{l} = \mathbf{l}^t \mathbf{x} = 0 \tag{2.2}$$

Analisando a equação (2.2), percebe-se que um fator multiplicativo $k \neq 0$ não altera a relação de incidência. Isto é uma consequência da homogeneidade, uma vez que a escala não é importante, só a relação dos coeficientes. Conclui-se que tanto a reta como o ponto tem 2 graus de liberdade em \mathbb{P}^2 .

Outra observação relevante é que pontos e retas são equivalentes em \mathbb{P}^2 . Este dualismo será explorado diversas vezes ao longo do texto e se ampara no *Princípio da Dualidade* [15], que estabelece de forma mais geral que pontos e hiperplanos no espaço projetivo n -dimensional \mathbb{P}^n são equivalentes.

A representação homogênea de pontos e retas e o Princípio da Dualidade permitem então que outras equações sejam derivadas. Por exemplo, a intersecção de duas linhas \mathbf{l} e \mathbf{l}' num plano projetivo pode ser obtida pelo produto vetorial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' \tag{2.3}$$

Fazendo uso da dualidade, a reta que passa pelos pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}' é dada por:

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}' \quad (2.4)$$

2.2.2 Pontos ideais

Uma das grandes vantagens da representação homogênea é a possibilidade de usar a mesma notação para qualquer ponto do plano, sem levar em consideração sua localização, finita ou não. Um ponto no infinito pode ser definido algebricamente como a intersecção de duas retas paralelas \mathbf{l} e \mathbf{l}' :

$$\mathbf{l} = (a, b, c)^t \quad e \quad \mathbf{l}' = (a, b, c')^t$$

$$\mathbf{x}_{\text{intersec}} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a & b & c' \end{vmatrix} = (c' - c) \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

De uma forma geral, pontos ideais têm sua terceira coordenada nula, $\mathbf{x}_{\infty} = (x_1, x_2, 0)^t$. Lembrado da relação entre as representações homogênea e cartesiana, o fato da terceira coordenada ser zero indica que o ponto deve situar-se no infinito.

Todos os pontos ideais de um plano pertencem à reta no infinito \mathbf{l}_{∞} , cuja representação canônica é $\mathbf{l}_{\infty} = (0, 0, 1)^t$. Portanto, se \mathbf{x} é um ponto no infinito, então a equação $\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}_{\infty} = 0$ é verdadeira.

A equação (2.5) mostra que todas as retas com a mesma direção se interceptam no mesmo ponto da linha do infinito, e que \mathbf{l}_{∞} contém todas as direções no plano. No espaço projetivo 2D portanto, todas as retas se encontram, mesmo que sejam paralelas.

No modelo tridimensional do plano projetivo (figura 2.1) pontos são representado por retas que passam pela origem, como foi discutido anteriormente. As retas em \mathbb{P}^2 aparecem como planos neste modelo, e então \mathbf{l}_{∞} corresponde ao plano $x_3 = 0$.

2.2.3 Razão cruzada (*cross ratio*)

A geometria de um espaço pode ser definida a partir do estudo das suas propriedades invariantes quando ele é submetido a uma determinada classe de transformações [14]. Quando uma transformação projetiva é aplicada a um plano, uma das suas invariantes é a razão cruzada, que é definida como *a razão da razão de distâncias no plano*.

Por exemplo, dados 4 pontos pertencentes a \mathbb{P}^2 e colineares $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$, uma das definições possíveis para a razão cruzada é:

$$Cr(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \frac{\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{23}}}{\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{24}}} = \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{14}\Delta_{23}} \quad (2.6)$$

onde Δ_{ij} é a distância euclidiana entre os pontos \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_j .

Na equação (2.6), os pontos \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 serviram de referência, mas qualquer outra combinação é válida. O valor numérico do *cross ratio* pode mudar em função desta escolha, mas uma vez fixado, é invariante em relação a transformações projetivas. Além disso, não importa se os pontos são ideais ou finitos.

O Princípio da Dualidade garante que outras formas de definir a razão cruzada são possíveis, usando linhas concorrentes no lugar de pontos colineares [14, 15].

2.2.4 Cônicas

Na geometria euclidiana existe uma importante classe de curvas, as cônicas, que são descritas por equações de segundo grau. Estas curvas são definidas a partir de uma grandeza euclidiana invariante, a distância. Por exemplo, um círculo é definido como o *locus* dos pontos que mantêm a mesma distância ao centro. Outros exemplos de cônicas são as hipérbolas, as elipses e as parábolas.

Na geometria projetiva todas as curvas são definidas em função da sua invariante, o *cross ratio*. Elas perdem sua distinção neste caso, pois são todas equivalentes sob o ponto de vista projetivo. Usando a notação homogênea para as coordenadas, uma cônica em um espaço projetivo bidimensional possui a equação:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0 \quad (2.7)$$

A equação (2.7) pode ser expressa matricialmente como :

$$\mathbf{x}^t \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A matriz \mathbf{C} é simétrica e portanto possui no máximo 6 graus de liberdade. Por causa da representação homogênea, só a relação entre os coeficientes é importante, possibilitando então estimar os parâmetros da cônica com 5 pontos .

Fazendo o uso da dualidade, no espaço projetivo pode-se definir cônicas através de um envelope de linhas tangentes. Esta cônica dual tem a equação $\mathbf{l}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{l} = 0$, onde \mathbf{l} é uma linha tangente a \mathbf{C} e $\det(\mathbf{C}) \neq 0$ [14].

2.2.5 Pontos absolutos

Os pontos absolutos ou circulares são definidos como a intersecção de qualquer círculo em um plano projetivo com a linha no infinito \mathbf{l}_∞ .

Considerando a equação (2.7), observa-se que as seguintes relações são válidas em um círculo: $a = c$ e $b = 0$. Na intersecção com a linha no infinito, necessariamente a coordenada $x_3 = 0$. Então, a equação da cônica reduz-se a:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

Cuja solução é dada pelo par conjugado:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Esta é a forma canônica dos pontos circulares. Apesar de natureza complexa, as coordenadas de \mathbf{I} e \mathbf{J} podem ser extraídas das imagens, fornecendo uma série de

parâmetros importantes que são usados em operações como a retificação projetiva [16].

2.2.6 Transformações projetivas

Já foi mencionado anteriormente que a geometria euclidiana é um subconjunto da geometria projetiva. Para formalizar este conceito é importante que as classes de transformações possíveis em um espaço projetivo sejam definidas. Será mostrado que as operações euclidianas são sempre válidas no espaço projetivo, mas o inverso não. Adicionalmente, serão enumeradas as grandezas invariantes em cada domínio.

Um mapeamento $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, linear e inversível é denominado de projetividade, colineação ou homografia. Esta transformação preserva a incidência e tem a seguinte representação:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.10)$$

Esta é uma matriz 3×3 homogênea, com 8 graus de liberdade. Aplicada a uma linha, a relação tem a forma $l' = \mathbf{H}^{-t}l$. Já uma cônica é transformada sob a equação $C' = \mathbf{H}^{-t}C\mathbf{H}^{-1}$.

A forma particular da matriz \mathbf{H} define as características da geometria e as suas invariantes. Existem 4 categorias possíveis para estas transformações: euclidiana, similaridade ou mudança de escala, afim e projetiva.

Transformação euclidiana ou isometria

Esta classe de transformações é regida pela matriz:

$$\mathbf{H}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & t_x \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Uma transformação euclidiana modela as translações e rotações de um objeto, sem deformação. Ela possui três graus de liberdade (1 da rotação e 2 da translação), e suas invariantes mais características são distância, ângulo e área.

Transformação de similaridade ou mudança de escala

Neste caso pode-se aplicar um fator de escala isotrópico s , mudando a proporção do objeto. A sua representação matricial é :

$$\mathbf{H}_s = \begin{pmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Após esta transformação, perde-se a noção de distância por causa da mudança de escala. Mas a medida de ângulos não é afetada, permanece invariante assim como a relação de paralelismo e a razão entre distâncias. \mathbf{H}_s tem 4 graus de liberdade, três da transformação euclidiana, mais um por causa do fator de escala.

Transformação afim

A transformação afim tem o seguinte operador matricial:

$$\mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

A submatriz \mathbf{A} tem menos restrições que a \mathbf{R} em (2.11). Basta que \mathbf{A} seja inversível, enquanto a matriz de rotação \mathbf{R} tem que ser ortogonal. Esta característica de \mathbf{A} faz com que \mathbf{H}_a modele uma quantidade maior de operações, como o cisalhamento. Em compensação, a quantidade de invariantes geométricas diminui.

\mathbf{H}_a tem 6 graus de liberdade e pode-se mostrar que a submatriz \mathbf{A} representa uma concatenação de rotações e mudanças de escala não-isotrópicas [14]. Como invariantes geométricos pode-se citar o paralelismo, razão de comprimentos em linhas paralelas e a razão entre áreas.

Transformação projetiva

Esta é a transformação mais geral que pode-se obter. Sua matriz é dada por:

$$\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^t & v \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Ela possui 8 graus de liberdade e seu invariante geométrico mais importante é o *cross ratio* ou razão cruzada.

A maior diferença entre a transformação projetiva e a afim é o fato do vetor \mathbf{v} na terceira linha de \mathbf{H}_p não ser necessariamente nulo. Esta característica faz com que a projetividade tenha uma ação não-linear sobre os pontos, o que pode ser verificado quando eles estão representados de forma não-homogênea. Como consequência, pontos ideais podem ser mapeados como pontos finitos, o que é fundamental para modelar uma projeção perspectiva.

Uma transformação projetiva genérica pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s \mathbf{H}_a \mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^t & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^t & v \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

A equação (2.15) mostra que é possível criar uma hierarquia de transformações e separar os efeitos de cada classe. Este é um resultado importante pois cria a possibilidade de retirar o efeito das distorções projetiva e afim em uma imagem, após a identificação de elementos geométricos como a linha no infinito \mathbf{l}_∞ e os pontos circulares [14, 16].

2.3 Geometria projetiva tridimensional

No plano projetivo tridimensional \mathbb{P}^3 boa parte das propriedades de interesse para o presente trabalho serão extensões do caso 2D. Por exemplo, um ponto no espaço tridimensional é representado de forma homogênea como $\mathbf{M} = (x, y, z, w)^t$, onde w é a coordenada adicionada. O Princípio da Dualidade também vale em \mathbb{P}^3 , relacionando pontos e *planos*.

De forma análoga à equação (2.2), dado um plano $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^t$ em \mathbb{P}^3 , a equação de incidência de um ponto em um plano é:

$$\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{M} = \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z + \pi_4 w = 0 \quad (2.16)$$

As transformações geométricas no espaço projetivo 3D têm a mesma hierarquia do caso bidimensional: euclidiana, similaridade, afim e projetiva. Para cada transformação, a quantidade de invariantes geométricos diminui na medida em que o operador se torna mais geral.

Em \mathbb{P}^2 existe a linha no infinito \mathbf{l}_∞ , que representa todas as possíveis direções no plano. No espaço tridimensional, o análogo a \mathbf{l}_∞ é o plano no infinito $\boldsymbol{\pi}_\infty$, onde estão representadas as direções do espaço e onde os planos paralelos se encontram. Sua forma canônica é $\boldsymbol{\pi}_\infty = (0, 0, 0, 1)^t$.

2.3.1 Cônica absoluta ($\boldsymbol{\Omega}_\infty$)

Existe uma cônica localizada no plano $\boldsymbol{\pi}_\infty$ denominada *cônica absoluta* ($\boldsymbol{\Omega}_\infty$), que tem uma relação importante com os pontos absolutos estudados em \mathbb{P}^2 . Um ponto $\mathbf{M} = (x, y, z, w)^t$ pertencente a esta curva obedece às equações:

$$\boldsymbol{\Omega}_\infty \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Seja um plano $\boldsymbol{\pi}_i$ no espaço projetivo \mathbb{P}^3 , cuja intersecção com o plano no infinito $\boldsymbol{\pi}_\infty$ é a sua particular linha no infinito \mathbf{l}_∞^i . Qualquer círculo \mathbf{C}_i que tenha $\boldsymbol{\pi}_i$ como plano de suporte interceptará \mathbf{l}_∞^i , e conseqüentemente $\boldsymbol{\pi}_\infty$, nos pontos absolutos ou circulares de $\boldsymbol{\pi}_i$.

A cônica absoluta então é formada pelos pontos absolutos de todos os planos $\boldsymbol{\pi}_i$ do espaço projetivo \mathbb{P}^3 .

A estimação desta entidade geométrica e a identificação de $\boldsymbol{\pi}_\infty$ permitem eliminar o efeito de transformações projetivas e afins sobre o espaço, recuperando informações com no máximo uma ambigüidade quanto à escala, posição e orientação da cena (transformação de similaridade) [14, 15]. Esta operação é denominada retificação no espaço 3D.

No Capítulo 4 será mostrado que um dos métodos de calibração utilizados neste trabalho baseia-se na identificação da imagem da cônica absoluta (IAC).

2.4 Sumário

Após esta breve revisão de conceitos de Geometria Projetiva, o Capítulo 3 apresentará algumas relações geométricas derivadas de imagens distintas obtidas a partir de uma cena comum. Estas relações e conceitos terão uma grande importância na elaboração dos algoritmos empregados nesta tese.

Capítulo 3

Geometria epipolar

3.1 Introdução

Um par de imagens obtidas a partir de uma mesma cena obedece a um conjunto de relações geométricas que ajuda a resolver o problema de reconstrução estéreo. Considerando-se dois pontos \mathbf{m} e \mathbf{m}' , imagens de um mesmo ponto tridimensional \mathbf{M} , é possível associá-los geométrica e algebricamente mesmo que a posição, orientação e natureza das câmeras sejam diferentes. Este conjunto de regras, chamado de **geometria epipolar** consegue capturar toda informação tridimensional disponível em uma cena.

De acordo com a figura 3.1, o ponto \mathbf{M} , suas imagens \mathbf{m} e \mathbf{m}' e os centros de projeção \mathbf{C} e \mathbf{C}' são coplanares, pertencendo ao mesmo plano π . O ponto \mathbf{m} é reprojeto tridimensionalmente sobre uma reta definida por ele e pelo centro de projeção \mathbf{C} . A imagem deste raio na segunda câmera é a linha l' (figura 3.2). Como \mathbf{M} também localiza-se sobre o raio, sua segunda imagem \mathbf{m}' necessariamente situa-se na linha l' . Este raciocínio aplica-se reciprocamente, gerando uma linha l na primeira imagem a partir do raio definido por \mathbf{m}' e \mathbf{C}' , que contém o ponto \mathbf{m} . Além disso, a posição tridimensional do ponto \mathbf{M} pode ser determinada pela intersecção destes raios.

Estas relações geométricas permitem estabelecer ferramentas algébricas para recuperar a posição tridimensional de um ponto na cena, através do processo denominado de triangulação. Elas também possibilitam restringir o espaço de busca no problema da correspondência, que consiste em localizar os pontos \mathbf{m} e \mathbf{m}' no

par de imagens estéreo. Como o ponto \mathbf{m} induz na segunda imagem a linha l' onde se localiza o seu correspondente \mathbf{m}' , pode-se estabelecer métodos de seleção unidimensional, diminuindo a complexidade da busca.

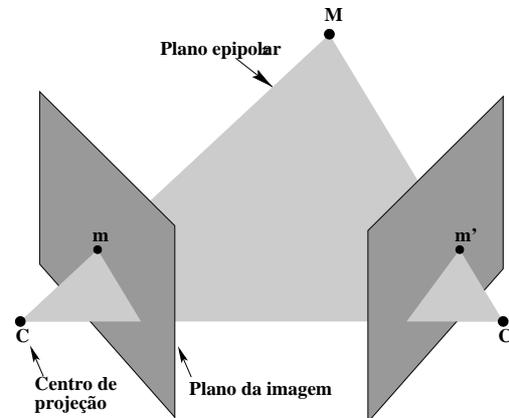


Figura 3.1: Geometria epipolar

Antes de prosseguir na apresentação das características básicas da geometria epipolar, é importante definir alguns dos elementos fundamentais:

- **Câmera** é o mapeamento entre a cena 3D e a imagem.
- A linha que liga os dois centros de projeção C e C' é denominada de **linha de base** (*baseline*).
- A **epipole** é a intersecção da linha de base com o plano da imagem. Definindo de maneira diferente, é a imagem do centro de projeção de uma das câmeras feita pela outra câmera.
- Um plano que contenha a linha de base e um ponto tridimensional M é chamado de **plano epipolar**. Existe uma família de planos epipolares (*pencil of planes*) definidos pela linha de base e diferentes pontos da cena.

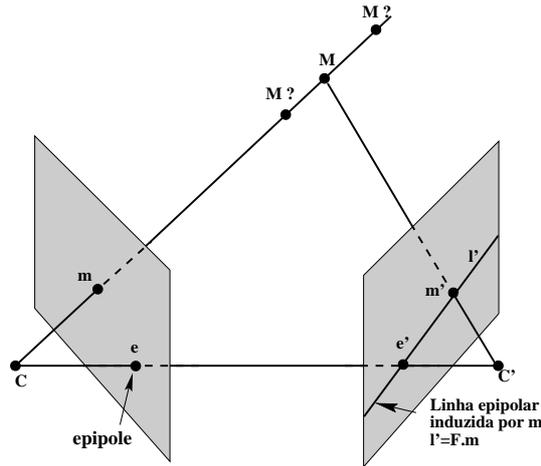


Figura 3.2: Entidades da geometria epipolar

3.2 Matriz fundamental \mathbf{F}

Todas as relações geométricas observadas anteriormente podem ser traduzidas algebricamente por uma matriz, denominada matriz fundamental \mathbf{F} . Esta matriz consegue embutir na sua estrutura todas as relações projetivas da cena e pode ser obtida a partir de pontos correspondentes nas duas imagens.

A matriz \mathbf{F} representa um mapeamento projetivo entre as duas imagens. A partir dela é possível gerar na segunda imagem uma linha l' definida pelo ponto \mathbf{m} na primeira imagem (figura 3.2). Este é um mapeamento singular uma vez que transforma pontos em linhas, não sendo possível obter a projeção inversa univocamente.

3.2.1 Representação algébrica

Pode-se chegar a uma representação para \mathbf{F} através de um experimento geométrico. De acordo com a figura 3.3, um par de câmeras está adquirindo a imagem de um plano π que não passa por nenhum dos centros de projeção e contém o ponto \mathbf{M}_π .

Sejam as matrizes 3×3 \mathbf{H} e \mathbf{H}' as homografias que mapeiam o plano π nos dois planos de imagem do par estéreo. Como uma homografia é um mapeamento projetivo não-singular, é possível estabelecer as seguintes relações, lembrando que \mathbf{M}_π é a representação homogênea de um ponto bidimensional:

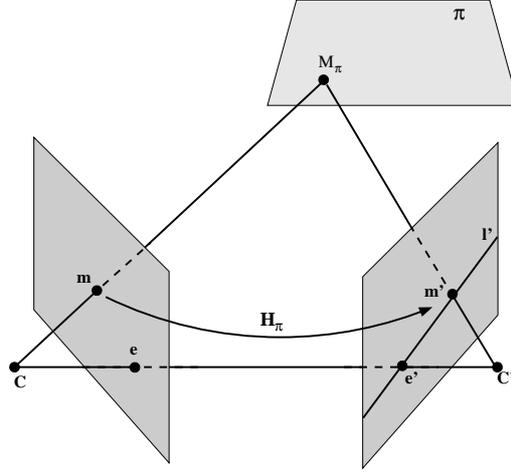


Figura 3.3: Transferência via plano

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{M}_\pi \quad (3.1)$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{H}'\mathbf{M}_\pi \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H}_\pi = \mathbf{H}'\mathbf{H}^{-1}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{H}_\pi \mathbf{m} \quad (3.3)$$

Ou seja, os pontos \mathbf{m} e \mathbf{m}' são projetivamente equivalentes pois estão associados por uma homografia induzida pelo plano π .

Na segunda imagem, o ponto \mathbf{m}' passa pela linha l' . Como neste plano de imagem todas as linhas epipolares passam pela epipole \mathbf{e}' , pode-se escrever:

$$l' = \mathbf{e}' \times \mathbf{m}' \quad (3.4)$$

$$l' = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{m}' = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}_\pi \mathbf{m} = \mathbf{F}\mathbf{m} \quad (3.5)$$

$$l' = \mathbf{F}\mathbf{m} \quad (3.6)$$

Onde a equivalência entre o produto vetorial e a multiplicação matricial descrita pelas equações 3.4 e 3.5 é definida no apêndice B.

A equação 3.7 define a matriz fundamental \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}_{\pi} \quad (3.7)$$

Portanto, a matriz fundamental pode ser decomposta como o produto da matriz 3×3 anti-simétrica $[\mathbf{e}']_{\times}$ com a homografia \mathbf{H}_{π} . Assim como $[\mathbf{e}']_{\times}$, \mathbf{F} é singular e com posto 2.

Uma outra forma de interpretar a singularidade de \mathbf{F} é considerá-la como um mapeamento do plano projetivo bidimensional representado pelos pontos em uma das imagens, em uma família de linhas epipolares na imagem da outra câmera. No espaço projetivo unidimensional \mathbb{P}^1 , linhas concorrentes e pontos colineares são duais [14]. Como as linhas epipolares são concorrentes (todas passam pela epipole), a equação 3.6 define uma transformação de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^1 e por isso tem posto 2.

Considerando agora uma geometria arbitrária, com pontos distribuídos no espaço e não necessariamente pertencentes ao mesmo plano, temos as equações $\mathbf{m} = \mathbf{P}\mathbf{M}$ e $\mathbf{m}' = \mathbf{P}'\mathbf{M}$, com \mathbf{P} e \mathbf{P}' definidas como as matrizes de câmera.

Todos os pontos tridimensionais \mathbf{M}_i distribuídos ao longo do raio definido por \mathbf{m} e \mathbf{C} são projetados no mesmo ponto da imagem. A equação paramétrica deste raio é:

$$\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{P}^+ \mathbf{m} + \lambda \mathbf{C} \quad (3.8)$$

Onde \mathbf{P}^+ é a inversa generalizada de \mathbf{P} , com $\mathbf{P}\mathbf{P}^+ = \mathbf{I}$ e $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^t (\mathbf{P}\mathbf{P}^t)^{-1}$.

O centro de projeção \mathbf{C} obedece a equação $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$, sendo portanto o vetor nulo da matriz \mathbf{P} .

A epipole \mathbf{e}' da segunda imagem pode ser representada algebricamente pela equação $\mathbf{e}' = \mathbf{P}'\mathbf{C}$, que é a imagem do centro de projeção da primeira câmera feita pela outra câmera. Como \mathbf{e}' e \mathbf{m}' situam-se sobre a mesma reta pode-se estabelecer as seguintes relações:

$$\mathbf{m}' = \mathbf{P}'\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m} + \lambda \mathbf{P}'\mathbf{C} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{m}' = (\mathbf{P}'\mathbf{C}) \times (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m} + \lambda \mathbf{P}'\mathbf{C}) = (\mathbf{P}'\mathbf{C}) \times (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{m}'^t \mathbf{l}' = \mathbf{m}'^t [(\mathbf{P}'\mathbf{C}) \times (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m})] = \mathbf{m}'^t [\mathbf{e}' \times (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m})] \quad (3.11)$$

Utilizando os resultados do apêndice B na equação 3.11, temos:

$$\mathbf{m}'^t \mathbf{l}' = \mathbf{m}'^t [[\mathbf{e}']_{\times} (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{m})] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Que leva a:

$$\mathbf{m}'^t [[\mathbf{e}']_{\times} (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+)] \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Comparando a equação (3.13) com (3.7) chega-se a:

$$\mathbf{m}'^t \mathbf{F} \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Da dedução acima é possível concluir que:

- A matriz fundamental \mathbf{F} pode ser obtida univocamente a partir das matrizes de câmera

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} (\mathbf{P}'\mathbf{P}^+) \quad (3.15)$$

- Através da matriz fundamental é possível estabelecer a **condição de correspondência da geometria epipolar**:

$$\mathbf{m}''^t \mathbf{F} \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Esta é uma condição necessária para que os pontos sejam correspondentes. A linha \mathbf{l}' é induzida pelo ponto \mathbf{m} e pela matriz \mathbf{F} , de tal forma que $\mathbf{l}' = \mathbf{F} \mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'^t \mathbf{l}' = \mathbf{0}$. Mas qualquer outro ponto $\mathbf{m}'' \neq \mathbf{m}'$ pertencente a reta \mathbf{l}' atenderia à equação

$$(\mathbf{m}'')^t \mathbf{F} \mathbf{m} = (\mathbf{m}'')^t \mathbf{l}' = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

É importante observar que toda a dedução acima baseou-se na condição que os centros de projeção \mathbf{C} e \mathbf{C}' são diferentes. Caso contrário, \mathbf{F} seria uma matriz nula, pois $\mathbf{P}'\mathbf{C} = \mathbf{P}'\mathbf{C}' = \mathbf{0}$.

3.2.2 Sumário das características da matriz \mathbf{F}

A matriz fundamental possui uma série de propriedades importantes:

1. Singularidade.

\mathbf{F} é singular e possui posto 2. A matriz fundamental representa um mapeamento projetivo que leva pontos em linhas, denominado na geometria projetiva como correlação. Como não é possível estabelecer a operação inversa, \mathbf{F} é identificada como uma *correlação imprópria*, não inversível.

2. Transposição.

Se \mathbf{F} é a matriz fundamental correspondente ao par de câmeras \mathbf{P} e \mathbf{P}' , então \mathbf{F}^t é a matriz fundamental do par \mathbf{P}' e \mathbf{P} .

3. Linhas epipolares.

$\mathbf{l}' = \mathbf{F}\mathbf{m}$ é a linha epipolar gerada pelo ponto \mathbf{m} , e $\mathbf{l} = \mathbf{F}^t\mathbf{m}'$ é a linha epipolar gerada pelo ponto \mathbf{m}' .

4. Equação das epipoles.

As epipoles são os vetores nulos das matrizes fundamentais \mathbf{F} e \mathbf{F}' ($\mathbf{F}\mathbf{e} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{F}^t\mathbf{e}' = \mathbf{0}$). Esta propriedade vem diretamente da equação (3.16).

Para qualquer ponto \mathbf{m} diferente de \mathbf{e} , a linha epipolar $\mathbf{l}' = \mathbf{F}\mathbf{m}$ contém a epipole \mathbf{e}' , portanto a equação $\mathbf{e}'^t\mathbf{F}\mathbf{m} = 0$ é válida. Como a única restrição para \mathbf{m} é que seja diferente da epipole \mathbf{e} , a equação só é satisfeita se $\mathbf{e}'^t\mathbf{F} = \mathbf{F}^t\mathbf{e}' = \mathbf{0}$.

5. Graus de liberdade de \mathbf{F} .

A matriz fundamental tem 7 graus de liberdade. \mathbf{F} é uma matriz 3×3 homogênea, portanto possui ambiguidade quanto a escala. Esta condição reduz em uma unidade seus graus de liberdade. Além disso, como é singular, obedece a restrição $\det(\mathbf{F}) = 0$.

Desta forma, apesar de uma matriz 3×3 possuir 9 graus de liberdade, as restrições de homogeneidade e singularidade reduzem para 7 a quantidade de graus de liberdade da matriz fundamental.

3.3 Relação entre a matriz fundamental \mathbf{F} e as matrizes de câmera \mathbf{P} e \mathbf{P}' .

Na dedução da equação (3.16) fica evidente a natureza projetiva da matriz \mathbf{F} , pois toda a argumentação baseou-se em relações geométricas projetivas. Não foram usadas medidas euclidianas, como por exemplo comprimentos ou relações entre ângulos.

Pode-se mostrar que a matriz \mathbf{F} é invariante projetivamente em relação às imagens, pois aplicando-se transformações projetivas às coordenadas das imagens, altera-se a estrutura da matriz fundamental, mas não a natureza das informações contidas nela. Por exemplo, se \mathbf{H} e \mathbf{H}' são aplicações projetivas bidimensionais, então:

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{H}\mathbf{m} \quad e \quad \hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{H}'\mathbf{m}' \quad (3.18)$$

O mapeamento $\hat{\mathbf{I}}' = \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{m}}$ é válido, com $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{H}'^{-t}\mathbf{F}\mathbf{H}^{-1}$. Desta forma a equação (3.16) permanece inalterada.

Apesar das matrizes de câmera absorverem informações projetivas, afins e euclidianas da cena, a matriz \mathbf{F} só depende da informação projetiva contida nelas. Por exemplo, uma operação euclidiana que altere o sistema de referência de uma cena modifica \mathbf{P} e \mathbf{P}' mas não altera a matriz fundamental \mathbf{F} . Na verdade, a matriz \mathbf{F} é invariante mesmo a transformações projetivas no espaço tridimensional.

Conclui-se portanto que a matriz fundamental pode ser determinada univocamente a partir das matrizes de câmeras (3.15), mas o contrário não é verdade. A partir da matriz fundamental é possível extrair um par de câmeras com uma ambiguidade projetiva, dependente da base projetiva escolhida.

Esta ambiguidade estimula a definição de uma forma canônica para as câmeras, de tal forma que a manipulação das expressões seja facilitada. Considerando que a matriz fundamental pode ser expressa como $\mathbf{F} = [\mathbf{a}]_x\mathbf{A}$, onde $[\mathbf{a}]_x$ e \mathbf{A} são matrizes 3×3 , pode-se associar o par de câmeras:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}|\mathbf{0}] \quad e \quad \mathbf{P}' = [\mathbf{A}|\mathbf{a}] \quad (3.19)$$

onde \mathbf{a} é uma matriz 3×1 .

Em [17] propõe-se a seguinte forma para a equação (3.19):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}|\mathbf{0}] \quad e \quad \mathbf{P}' = [[\mathbf{e}']_x \mathbf{F} | \mathbf{e}'] \quad (3.20)$$

Na expressão (3.20), \mathbf{P}' tem a submatriz $[\mathbf{e}']_x \mathbf{F}$ com posto 2. Isto significa que está equação representa uma câmera afim, com o centro da câmera em $\boldsymbol{\pi}_\infty$, o plano no infinito. Se esta condição não for desejável, pode-se usar a expressão mais geral, que define uma câmera projetiva:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}|\mathbf{0}] \quad e \quad \mathbf{P}' = [[\mathbf{e}']_x \mathbf{F} + \mathbf{e}' \mathbf{v}^t | \lambda \mathbf{e}'] \quad (3.21)$$

Em (3.21) \mathbf{v} é um vetor 3×1 qualquer e λ é um escalar não-nulo.

3.4 Matriz essencial

Quando os parâmetros intrínsecos (Capítulo 4) da câmera são conhecidos, o sistema é dito calibrado pois somente a localização e orientação da câmera são indeterminados. Nesta situação, algumas simplificações podem ser feitas que levam ao conceito de *matriz essencial* \mathbf{E} .

Uma matriz $\mathbf{P} = \mathbf{K} [\mathbf{R}|\mathbf{t}]$ é considerada calibrada se a matriz de parâmetros intrínsecos \mathbf{K} é conhecida. Neste caso é possível utilizar coordenadas normalizadas da imagem ao invés de pixels, aplicando-se a transformação inversa $\mathbf{m}_{\text{cal}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{m}$. O mapeamento projetivo que gera a imagem só depende agora dos parâmetros extrínsecos do sistema, $\mathbf{m}_{\text{cal}} = [\mathbf{R}|\mathbf{t}] \mathbf{M}$.

Para determinar a expressão da matriz essencial \mathbf{E} e sua relação com a matriz fundamental \mathbf{F} , será considerado inicialmente um par de câmeras não calibradas $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|\mathbf{0}]$ e $\mathbf{P}' = \mathbf{K}'[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$. Nesta situação a origem do sistema de referência coincide com o centro de projeção da primeira câmera e a orientação do eixo ótico é a mesma do eixo Z. Partindo da equação (3.15),

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_x (\mathbf{P}' \mathbf{P}^+) = [\mathbf{P}' \mathbf{C}]_x (\mathbf{P}' \mathbf{P}^+) \quad (3.22)$$

E lembrando que os centros de projeção tem coordenadas dadas por:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^t \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Chega-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}'\mathbf{t}]_{\times} (\mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}) = \mathbf{K}'^{-t} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}\mathbf{K}^{-1} \quad (3.24)$$

Quando as coordenadas são normalizadas, $\mathbf{K} = \mathbf{K}' = \mathbf{I}$ e

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad (3.25)$$

Então, a equação da matriz essencial \mathbf{E} é:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad (3.26)$$

Como foi observado anteriormente, a matriz essencial só depende dos parâmetros extrínsecos do sistema de imagem estéreo.

Para obter a equação de correspondência para o caso normalizado, parte-se das equações (3.16) e (3.24), substituindo as coordenadas dos pixels por coordenadas normalizadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'^t \mathbf{F} \mathbf{m} &= \mathbf{m}'^t (\mathbf{K}'^{-t} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}) \mathbf{m} \\ &= (\mathbf{K}'^{-1} \mathbf{m}')^t ([\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}) (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{m}) \\ &= \mathbf{m}'_{\text{cal}}{}^t ([\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}) \mathbf{m}_{\text{cal}} \\ &= \mathbf{m}'_{\text{cal}}{}^t \mathbf{E} \mathbf{m}_{\text{cal}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

A equação de correspondência usando a matriz essencial \mathbf{E} tem então a forma:

$$\mathbf{m}'_{\text{cal}}{}^t \mathbf{E} \mathbf{m}_{\text{cal}} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Para relacionar \mathbf{F} com \mathbf{E} , utiliza-se as equações (3.24) e (3.26) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{K}'^{-t} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}\mathbf{K}^{-1} \\ &= \mathbf{K}'^{-t} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \end{aligned}$$

Pode-se portanto, extrair as relações:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-t} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}'^t \mathbf{F} \mathbf{K} \quad (3.29)$$

A matriz essencial foi proposta por Longuet-Higgins [18] e pode ser considerada como um caso especial da matriz fundamental, onde a calibração das câmeras é determinada de antemão. Ela possui 5 graus de liberdade e possui características semelhantes às listadas para matriz fundamental \mathbf{F} .

3.5 Estimação da matriz fundamental

A equação (3.16) fornece uma importante relação para o estabelecimento de algoritmos de estimação dos parâmetros da matriz \mathbf{F} . Desenvolvendo (3.16) com os pontos $\mathbf{m} = (x, y, 1)^t$ e $\mathbf{m}' = (x', y', 1)^t$ chega-se a:

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0 \quad (3.30)$$

Os termos f_{ij} são os coeficientes da matriz fundamental. Pode-se observar que esta equação é linear nos parâmetros de \mathbf{F} .

Aplicando (3.30) a n pares de pontos correspondentes é possível montar o seguinte sistema homogêneo:

$$\mathbf{U}_n \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Onde \mathbf{f} é um vetor 9×1 com os elementos de \mathbf{F} ordenados lexicograficamente,

$$\mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^t \quad (3.32)$$

A matriz \mathbf{U}_n contém a informação das coordenadas dos pontos correspondentes, da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)^t \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_i = (x'_i x_i, x'_i y_i, x'_i, y'_i x_i, y'_i y_i, y'_i, x_i, y_i, 1)^t \quad (3.34)$$

O sistema linear (3.31) pode ser resolvido para obter uma solução para os coeficientes de \mathbf{F} , levando-se em consideração as restrições de homogeneidade e singularidade da matriz fundamental. Considerando-se inicialmente só a condição de homogeneidade do vetor \mathbf{f} , a equação (3.31) tem solução não trivial se o posto de \mathbf{U}_n for menor ou igual a 8 [19]. Caso o posto seja exatamente igual a 8, a solução de \mathbf{f} é única, a menos de um fator de escala, e pode ser resolvido com métodos lineares. É importante salientar que a restrição de singularidade deverá também ser atendida através de algum artifício, para que a matriz \mathbf{F} obtida realmente represente as relações projetivas entre o par de imagens estéreo.

3.5.1 Solução com 7 correspondências.

Como foi apontado anteriormente, a matriz fundamental possui 7 graus de liberdade. Portanto é possível encontrar uma solução para os parâmetros de \mathbf{F} com somente 7 pares de pontos correspondentes. Esta solução é exata e atende as duas restrições características da matriz fundamental, singularidade e homogeneidade.

Com esta quantidade mínima de correspondências, o posto de \mathbf{U}_n é igual a 7 e pode-se obter através da *decomposição em valores singulares* (SVD) [19, 20] os vetores \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 , geradores do espaço nulo de \mathbf{U}_n . Estes dois vetores correspondem às matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , que são linearmente combinadas por causa da característica de homogeneidade da matriz fundamental \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{F}_2 \quad (3.35)$$

Esta expressão estabelece uma família de soluções com 1 grau de liberdade, representado por α .

Para atender a condição de singularidade da matriz fundamental, pode se impor a condição:

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\alpha \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{F}_2) = 0 \quad (3.36)$$

O desenvolvimento do determinante (3.36) gera uma equação polinomial de

grau 3 em α , que pode gerar até 3 soluções reais para o problema. Cada solução deve ser testada para verificar qual delas tem o menor erro residual.

3.5.2 Mínimos quadrados com 8 ou mais pontos

Normalmente a quantidade de pontos correspondentes é maior que 7, permitindo explorar outras possibilidades de resolução do sistema (3.31). Teoricamente a matriz \mathbf{U}_n tem posto máximo 8, mas por causa da incerteza na extração dos pontos, provavelmente o posto de \mathbf{U}_n é igual a 9 (quantidade de colunas de \mathbf{U}_n). Neste caso, é razoável propor uma solução a partir da otimização de alguma função-custo \mathcal{F} associada ao sistema.

Ignorando a restrição de singularidade momentaneamente, pode-se encontrar uma solução para a equação (3.31) através do método dos mínimos quadrados :

$$\min_{\mathbf{F}} \sum_i (\mathbf{m}_i^t \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2 = \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{U}_n \mathbf{f}\|^2 \quad (3.37)$$

Como a norma da solução de um sistema linear homogêneo é arbitrária, pode-se impor a restrição $\|\mathbf{f}\| = 1$, de tal forma a evitar a solução trivial para (3.31). Então, o problema é minimizar a função-custo:

$$\mathcal{F} = \|\mathbf{U}_n \mathbf{f}\|^2 = (\mathbf{U}_n \mathbf{f})^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} = \mathbf{f}^t \mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} \quad (3.38)$$

sujeito a

$$\|\mathbf{f}\| = \mathbf{f}^t \mathbf{f} = 1$$

Introduzindo o multiplicador de Lagrange λ , este problema de otimização com restrições pode ser transformado em um mais simples, sem restrições. Basta minimizar o lagrangeano:

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^t \mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} - \lambda (\mathbf{f}^t \mathbf{f} - 1) \quad (3.39)$$

Derivando a equação (3.39) em relação a \mathbf{f} e igualando a zero:

$$\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} - \lambda \mathbf{f} = 0$$

Chega-se a:

$$\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} = \lambda \mathbf{f} \quad (3.40)$$

Portanto, o problema de minimização reduziu-se à extração dos autovetores e autovalores de $\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n$. Na definição da função-custo \mathcal{F} (3.38), pode-se ver que a matriz $\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n$ é positiva semi-definida e simétrica. Como consequência, seus autovalores são reais e não-negativos.

A solução buscada para o problema deve ser um autovetor \mathbf{f}_i da matriz $\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n$, mas como esta matriz tem dimensão 9×9 , existem nove possíveis respostas. O critério de escolha do autovetor pode sair do desenvolvimento da equação (3.39), considerando-se a condição expressa pela equação (3.40):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{f}) &= \mathbf{f}^t \mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n \mathbf{f} - \lambda (\mathbf{f}^t \mathbf{f} - 1) \\ &= \mathbf{f}^t \lambda \mathbf{f} - \lambda \mathbf{f}^t \mathbf{f} + \lambda \end{aligned}$$

Donde conclui-se que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \lambda \quad (3.41)$$

Com todas as considerações anteriores pode-se concluir que o autovetor unitário que minimiza $\mathcal{L}(\mathbf{f})$ é aquele associado ao menor autovalor de $\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n$. Esta é, portanto a solução do problema de mínimos quadrados ortogonais proposto em (3.37).

Uma solução equivalente para o problema poderia ser obtida através da SVD de \mathbf{U}_n . Decompondo a matriz como:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{B}^t$$

Onde \mathbf{A} é uma matriz $n \times 9$ com colunas ortogonais, \mathbf{D} é uma matriz diagonal 9×9 com os elementos da diagonal ordenados de maneira decrescente (valores singulares), e \mathbf{B} é ortogonal com dimensão 9×9 .

Como aos autovalores e autovetores de $\mathbf{U}_n^t \mathbf{U}_n$ estão associados aos valores singulares de \mathbf{U}_n e colunas de \mathbf{B} respectivamente, o vetor solução neste caso é a última coluna da matriz \mathbf{B} .

Este método de estimação de \mathbf{F} é simples e provê uma solução analítica, seja por extração de autovalores e autovetores ou por SVD. Entretanto, ele foi estabelecido sem levar em conta a restrição de singularidade da matriz fundamental. Por causa do ruído nas medidas, muito provavelmente $\det(\mathbf{F}) \neq 0$ e as linhas epipolares não serão concorrentes no mesmo ponto. A maneira mais usual de resolver este problema é impor a singularidade *a posteriori* através da substituição de \mathbf{F} por uma matriz singular $\hat{\mathbf{F}}$ que minimiza a norma de *Frobenius*:

$$\|\mathbf{F} - \hat{\mathbf{F}}\| = \sum_{i,j} (f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2 \quad (3.42)$$

A solução deste problema [21] pode ser obtida através da SVD de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t$$

Sabendo que $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é matriz que contém os valores singulares σ_i de \mathbf{F} e que eles estão ordenados de forma decrescente, pode-se mostrar que a matriz:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{V}^t$$

minimiza a equação (3.42) atendendo a condição de singularidade da matriz fundamental, desde que $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)$.

3.5.3 Interpretação do critério de minimização do algoritmo linear

O critério de otimização estabelecido para a função-custo \mathcal{F} (3.37) foi o da *distância algébrica* mínima. Este critério, introduzido em [22], gera uma expressão relativamente simples para o problema de minimização mas tem a desvantagem de não ter significado geométrico. O ideal seria que a função a otimizar estivesse associada a algum medida da imagem, como por exemplo a *distância geométrica* entre pixels. Além disso, segundo Luong [23], este critério tende a polarizar a estimativa de \mathbf{F} , deslocando as epipoles para o centro da imagem.

Uma função-custo mais adequada poderia ser a distância entre um ponto \mathbf{m}'_i e a sua linha epipolar $\mathbf{l}'_i = \mathbf{F}\mathbf{m}'_i = (l'_1, l'_2, l'_3)^t$, dada por [24] :

$$d(\mathbf{m}'_i, \mathbf{l}'_i) = \frac{\mathbf{m}'_i{}^t \mathbf{l}'_i}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}} = \frac{\mathbf{m}'_i{}^t \mathbf{F} \mathbf{m}_i}{k'_i} \quad (3.43)$$

onde $k'_i = \sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}$.

O critério de otimização (3.37) pode ser reescrito como:

$$\min_{\mathbf{F}} \sum_i (\mathbf{m}'_i{}^t \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2 = \min_{\mathbf{F}} \sum_i [k'_i d(\mathbf{m}'_i, \mathbf{l}'_i)]^2 \quad (3.44)$$

A equação (3.44) mostra que o critério de minimização da distância algébrica depende da distância geométrica, mas é função também do fator k'_i , que não tem significado físico.

3.5.4 Estimação através de métodos iterativos

Existe uma outra classe de algoritmos para estimar a matriz fundamental que tem como base o critério da distância geométrica. Estes algoritmos apresentam um resultado melhor em relação aos algoritmos lineares, mas têm um custo computacional maior.

Um dos critérios [23] minimiza a distância epipolar simétrica, que é a distância entre cada ponto \mathbf{m}_i e a sua respectiva linha epipolar:

$$\mathcal{F}_1 = \sum_i [d^2(\mathbf{m}'_i, \mathbf{F} \mathbf{m}_i) + d^2(\mathbf{m}_i, \mathbf{F}^t \mathbf{m}'_i)] \quad (3.45)$$

Usando o desenvolvimento da equação (3.43) pode-se chegar a uma representação alternativa para \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}_1 = \sum_i \left[(\mathbf{m}'_i{}^t \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2 \left(\frac{1}{l_1'^2 + l_2'^2} + \frac{1}{l_1'^2 + l_2'^2} \right) \right] \quad (3.46)$$

Uma outra proposta para a função-custo [14, 24] é usar a distância entre os pontos da imagem e a reprojeção dos pontos tridimensionais reconstruídos:

$$\mathcal{F}_2 = \sum_i [d^2(\mathbf{m}_i, \hat{\mathbf{m}}_i) + d^2(\mathbf{m}'_i, \hat{\mathbf{m}}'_i)] \quad (3.47)$$

Esta função compara os pontos medidos \mathbf{m}_i e \mathbf{m}'_i com a suas estimativas $\hat{\mathbf{m}}_i$ e $\hat{\mathbf{m}}'_i$, portanto exige uma etapa de reconstrução projetiva dos pontos na cena. É bem

eficiente mas computacionalmente caro, pois para n correspondências, estabelece um problema de minimização com $7 + 3n$ graus de liberdade [15].

Existe uma aproximação de primeira ordem para a distância geométrica expressa por \mathcal{F}_2 . Conhecida como *distância de Sampson* [14, 23, 25], ela transforma o problema de estimação em um ajuste de uma superfície multidimensional aos pontos medidos. A expressão matemática do critério é:

$$\mathcal{F}_3 = \sum_i \frac{(\mathbf{m}_i^t \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2}{l_1^2 + l_2^2 + l'_1{}^2 + l'_2{}^2} \quad (3.48)$$

Esta simplificação da função-custo \mathcal{F}_2 , reduz consideravelmente a complexidade da otimização. Como não precisa reconstruir os pontos, a minimização agora tem 7 graus de liberdade pois só envolve os coeficientes de \mathbf{F} . Este critério também é conhecido como *técnica do gradiente* [24, 26], por causa da expansão de Taylor de primeira ordem.

As funções-objetivo descritas anteriormente não atendem intrinsecamente à restrição de singularidade de \mathbf{F} . É importante que a parametrização seja escolhida de forma a reduzir a busca ao universo de matrizes 3×3 de posto 2. Uma forma de garantir que $\det(\mathbf{F}) = 0$ é expressar uma das linhas ou colunas de \mathbf{F} como combinação linear das outras [14, 15, 24, 26].

Segundo [24], o melhor método para estimar a matriz fundamental é o da minimização da distância entre os pontos reais e os reprojitados (3.47), mas como demanda muito tempo computacional, a recomendação é que se utilize a técnica do gradiente (3.48). Este critério gera uma aproximação boa da distância geométrica, sem exigir muito custo computacional. Dos critérios citados, a estimação baseada na distância entre pontos e linhas epipolares (3.45) é a que tem o pior desempenho, pois não leva a resultados significativamente superiores ao método linear [24].

Todos os algoritmos iterativos dependem de uma boa estimativa inicial dos parâmetros para evitar mínimos locais. Normalmente se usa o método linear (subseção 3.5.2) para gerar o ponto inicial da otimização. Entretanto, segundo [21], este método não funciona bem a menos que seja feita uma normalização dos pixels antes da aplicação do algoritmo. Esta instabilidade deve-se principalmente às diferentes ordens de grandeza das variáveis envolvidas. O processo de normalização mais comum [3, 14] faz uma translação inicial dos pontos de tal forma que o centróide

fique na origem. Em seguida, aplica-se uma mudança de escala isotrópica para que em média, os pontos estejam a $\sqrt{2}$ unidades de distância da origem. Este procedimento melhora o condicionamento da matriz \mathbf{U}_n , aumentando consideravelmente o desempenho deste método linear [24,27].

3.6 Estimação robusta

Os algoritmos descritos até agora se baseiam na existência de pontos correspondentes extraídos das imagens através de técnicas de correlação e na minimização de funções-objetivo aplicadas a estes dados. Estes critérios de otimização são tipicamente representados como somatórios de resíduos quadráticos, gerando uma solução de mínimos quadrados. Com isso admite-se implicitamente que estes erros obedecem uma distribuição normal, pois nestas condições esta estimação é ótima [14].

Quando os dados observados estão contaminados por pontos anômalos (*outliers*) não se pode mais assumir a gaussianidade dos pontos, e a aplicação direta de métodos de mínimos quadrados gera uma solução distorcida. Em um sistema de extração automática de pontos a presença destes *outliers* é inevitável, aparecendo na forma de falsas correspondências ou na localização imprecisa das coordenadas dos pontos.

É importante prover o método de estimação da matriz fundamental de alguma ferramenta para detectar estes dados incorretos e eliminá-los. Um dos estimadores robustos mais eficientes é o RANSAC (*Random Sample Consensus*) [28], que se baseia em um princípio simples: dado um conjunto de dados experimentais onde se admite que existem *outliers*, seleciona-se aleatoriamente amostras com o número mínimo de elementos para estimar os parâmetros do modelo (2 para uma reta, 3 para um plano, 7 para a matriz fundamental, etc). Para cada amostra, calcula-se os parâmetros do modelo e verifica-se qual o seu conjunto de suporte (*consensus set*). Por conjunto de suporte entende-se a quantidade de pontos experimentais que se adequam ao modelo calculado por aquela amostra particular. A expectativa é que uma amostra contaminada por *outliers* não conseguirá gerar uma boa estimativa do modelo e conseqüentemente não terá um conjunto de suporte muito grande. Após este procedimento ser efetuado sobre uma quantidade adequada de amostras

para garantir que somente pontos coerentes (*inliers*) sejam utilizados, o modelo com maior conjunto de suporte é escolhido. Após a eliminação dos outliers, o modelo é recalculado considerando-se somente os pontos da amostra vencedora e seu conjunto de suporte que, dentro de uma determinada margem, consiste somente de *inliers*. Esta estimação final do modelo pode então ser feita por um método do tipo mínimos quadrados.

Este método de estimação tem uma implementação computacional razoavelmente simples [26] e gerou uma série de variações que buscam torná-lo mais eficiente [29].

3.7 Sumário

Neste capítulo foram relacionadas as condições teóricas e os algoritmos para obter um dos parâmetros mais importantes para o problema proposto neste trabalho. A matriz fundamental \mathbf{F} tem um papel preponderante na detecção de pontos correspondentes entre as duas imagens, oferecendo alternativas à correlação bidimensional. O *software* desenvolvido fez uso do algoritmo robusto RANSAC para eliminar os *outliers*. Em seguida, a matriz fundamental foi estimada usando o conjunto remanescente de pontos.

Capítulo 4

Calibração

4.1 Introdução

Uma das fases mais importantes para a reconstrução estereográfica é a etapa de calibração das câmeras. Por câmera entende-se o mapeamento da cena tridimensional em uma imagem, usando câmera fotográfica ou de vídeo, raios X com intensificador e câmera CCD, detector *image plate*, etc. A calibração fornece as características internas do dispositivo, como o foco, além da posição e orientação em relação a um sistema de referência especificado. Todos estes elementos do modelo são representados algebricamente por uma matriz que é estimada relacionando as coordenadas tridimensionais de pontos em uma cena com suas imagens.

4.2 Modelo de câmera

A geração de imagens por raios X pode ser aproximada por uma projeção perspectiva. Neste tipo de projeção central o plano da imagem está a uma distância finita do centro de câmera, gerando efeitos típicos da geometria projetiva, como pontos de fuga e distorção perspectiva (*foreshortening*). Para estabelecer um modelo de câmera apropriado para o problema, será utilizada a câmera *pinhole* como padrão inicial. A figura 4.1 traz a representação esquemática de uma câmera *pinhole*, com os seus parâmetros descritivos:

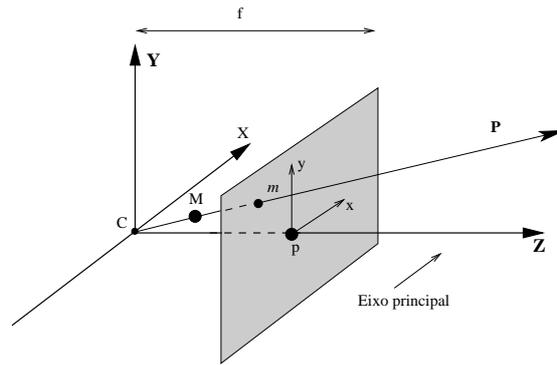


Figura 4.1: Câmera *pinhole*

Centro de câmera ou centro ótico Este é o centro da projeção, corresponde ao foco do tubo de raios X.

Eixo principal ou raio principal É o raio perpendicular ao plano de imagem que passa pelo centro ótico.

Ponto principal Intersecção entre o plano de imagem e o eixo principal.

Plano principal Plano paralelo ao plano da imagem, que contém o centro ótico.

Para modelar matematicamente esta câmera pode-se iniciar estabelecendo a relação entre as coordenadas da cena tridimensional e da imagem. Usando semelhança de triângulos obtém-se:

$$x = \frac{fX}{Z} \quad e \quad y = \frac{fY}{Z} \quad (4.1)$$

A equação (4.1) mostra que o mapeamento projetivo é não linear quando analisadas as coordenadas não homogêneas dos pontos.

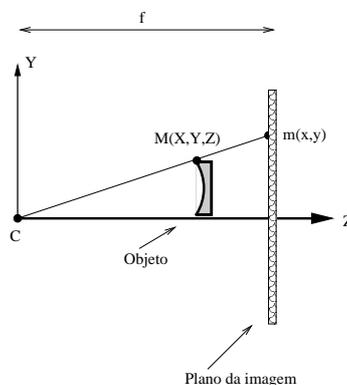


Figura 4.2: Vista lateral do modelo de câmera *pinhole*

Usando a notação homogênea para as coordenadas, pode-se transformar a equação (4.1) em uma relação linear, representada matricialmente:

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} [\mathbf{I} | \mathbf{0}] \mathbf{M} \quad (4.2)$$

Onde \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 , $\mathbf{0}$ é um vetor nulo 3×1 . Os vetores \mathbf{m} , \mathbf{M} e matriz \mathbf{K} são dados por:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Para chegar a um modelo mais realista para a geração da imagem por raios X, alguns parâmetros ainda devem ser considerados. Inicialmente, examinando as características internas do dispositivo de imagem, é razoável supor que o plano de imagem tenha um sistema de coordenadas próprio, independente do sistema de referência posicionado no centro de ótico. Além disso a origem deste referencial da imagem pode não ser o ponto principal.

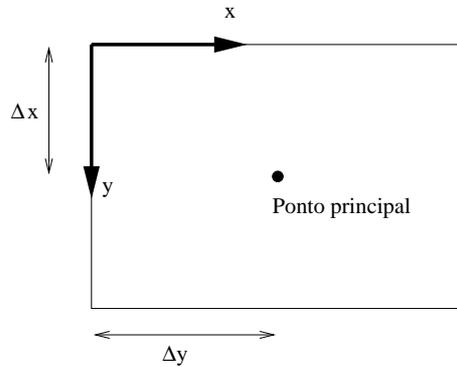


Figura 4.3: Sistema de referência da imagem

Desta forma, a matriz \mathbf{K} deverá ser alterada para que represente o pixel $\mathbf{m} = (fX + \Delta x, fY + \Delta y)$:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & \Delta x \\ 0 & f & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Os parâmetros f , Δx e Δy são dados em unidades de comprimento naturais para o sistema de referência da câmera (centímetros, por exemplo). Como a imagem é dividida em pixels, é necessário introduzir os fatores de conversão m_x e m_y , dados em pixels/unidade de comprimento. Além disso, em alguns tipos de dispositivos de imagem os eixos coordenados não são perpendiculares, gerando um efeito distorsivo na imagem. Para modelar esta característica, introduz-se o parâmetro γ .

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & \gamma & \Delta x \\ 0 & f & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x f & \gamma & m_x \Delta x \\ 0 & m_y f & m_y \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_x & \gamma & p_x \\ 0 & \alpha_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Agora a matriz \mathbf{K} está expressa em unidades de pixels e representa os parâmetros internos ou *intrínsecos* da câmera.

Normalmente as coordenadas da cena não são expressas em relação ao centro da câmera. Utiliza-se um sistema de referência arbitrário, de acesso mais fácil.

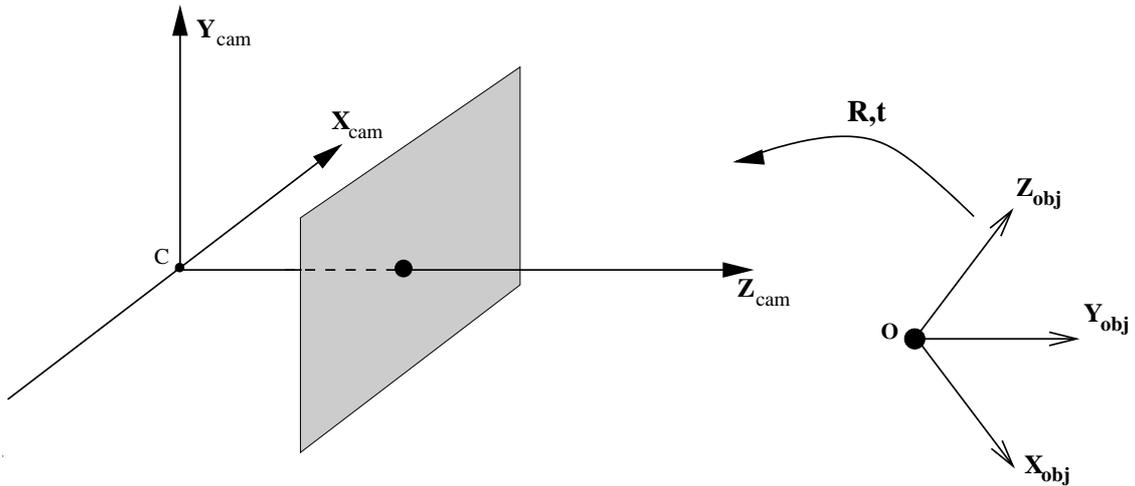


Figura 4.4: Parâmetros extrínsecos da câmera

Considerando $\tilde{\mathbf{M}}_{cam}$ e $\tilde{\mathbf{M}}_{obj}$ as coordenadas não homogêneas de um mesmo ponto, em relação aos sistemas de referência da câmera e do objeto respectivamente,

pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{cam} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{M}}_{obj} - \tilde{\mathbf{C}}) \quad (4.7)$$

Onde \mathbf{R} é uma matriz de rotação 3×3 que alinha os dois sistemas de referência e o vetor 3×1 $\tilde{\mathbf{C}}$ é a origem do sistema de referência da câmera (centro de projeção), expressa no referencial do objeto. Usando coordenadas homogêneas a equação (4.7) pode ser representada matricialmente:

$$\mathbf{M}_{cam} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{obj} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{obj} \quad (4.8)$$

Associando as equações (4.2) e (4.8), chega-se a \mathbf{P} , matriz de projeção que representa o modelo de câmera a ser estimado.

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} [\mathbf{I}|\mathbf{0}] \mathbf{M}_{cam} = \mathbf{K} [\mathbf{I}|\mathbf{0}] \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_{obj} = \mathbf{K} [\mathbf{R}|\mathbf{t}] \mathbf{M}_{obj} \quad (4.9)$$

A equação que modela a geração da imagem é portanto:

$$\mathbf{m} = \mathbf{P}\mathbf{M} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{K} [\mathbf{R}|\mathbf{t}]$. A calibração consiste em estabelecer métodos para estimar \mathbf{P} , cuja discussão será feita nas próximas seções.

4.3 Métodos de calibração

Uma vez definido o modelo de câmera, representado pela matriz $\mathbf{P} = \mathbf{K} [\mathbf{R}|\mathbf{t}]$, torna-se necessário estabelecer procedimentos para estimar as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{R} e \mathbf{t} a partir das imagens. Além dos elementos das matrizes, também deve ser feita uma estimativa da distorção provocada pelo sensor utilizado. Inicialmente será feita uma apresentação dos métodos de calibração usados e na sub-seção 4.3.3 será discutido o problema da distorção.

4.3.1 Calibração com um modelo tridimensional

Um dos métodos utilizados baseou-se na correspondência entre os pontos reais e as suas imagens [14]. Este procedimento utiliza como padrão de calibração algum objeto não-planar com dimensões conhecidas. Sejam \mathbf{M} e \mathbf{m} as coordenadas homogêneas dos pontos na cena e na imagem respectivamente. Observando a equação (4.10) pode-se concluir que os vetores homogêneos \mathbf{PM} e \mathbf{m} tem a mesma direção, mesmo que difiram por um fator de escala. Esta relação também pode ser representada pelo produto vetorial $\mathbf{m} \times \mathbf{PM} = \mathbf{0}$. Desenvolvendo esta equação, chega-se à relação matricial:

$$\begin{pmatrix} y\mathbf{P}_3^t\mathbf{M} - w\mathbf{P}_2^t\mathbf{M} \\ w\mathbf{P}_1^t\mathbf{M} - x\mathbf{P}_3^t\mathbf{M} \\ x\mathbf{P}_2^t\mathbf{M} - y\mathbf{P}_1^t\mathbf{M} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Onde $\mathbf{m}^t = (x, y, w)$ e \mathbf{P}_i^t a i -ésima linha da matriz \mathbf{P} . A equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^t & -w\mathbf{M} & y\mathbf{M} \\ w\mathbf{M} & \mathbf{0}^t & -x\mathbf{M} \\ -y\mathbf{M} & x\mathbf{M} & \mathbf{0}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

A equação (4.12) possui linhas linearmente dependentes. Eliminando-se uma das linhas chega-se a equação final:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^t & -w\mathbf{M} & y\mathbf{M} \\ w\mathbf{M} & \mathbf{0}^t & -x\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

Cada correspondência $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{m}$ gera uma equação matricial do tipo (4.13). Então, com n correspondências pode-se construir o sistema $\mathbf{Ap} = \mathbf{0}$ de dimensão $2n \times 12$. Como a matriz \mathbf{P} tem 11 graus de liberdade por causa da representação homogênea, são necessários 6 pontos para a solução mínima (exata) do problema. Na verdade, usa-se 5 pontos mais uma das coordenadas do sexto ponto, criando

uma matriz \mathbf{A} 11×12 . Esta matriz terá posto 11, sendo portanto possível obter um vetor \mathbf{p} não-nulo que resolva a equação $\mathbf{A}\mathbf{p}=\mathbf{0}$.

Como o conjunto de correspondências está contaminado por ruído, utiliza-se um número de pontos consideravelmente superior ao mínimo necessário para estimação exata. A solução neste caso, é obtida de forma semelhante ao problema da estimação da matriz fundamental: minimiza-se o erro algébrico $\|\mathbf{A}\mathbf{p}\|$, com a restrição $\|\mathbf{p}\| = 1$. A solução é o autovetor de $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ correspondente ao menor autovalor [19,20].

Este método é conhecido como *Direct Linear Transformation* (DLT) e implementa uma solução linear para o problema de estimação da matriz de câmera \mathbf{P} [30]. O resultado pode ser melhorado a partir de uma normalização prévia dos pontos, como foi feito no caso da matriz fundamental.

A solução obtida através do algoritmo DLT pode servir de ponto de partida para a minimização do erro geométrico, que possui um significado físico claro. Se as coordenadas dos pontos tridimensionais forem conhecidas com precisão aceitável, pode-se usar o erro de reprojeção como função custo:

$$\mathcal{F} = \sum_i d^2(\mathbf{m}_i, \mathbf{P}\mathbf{M}_i) \quad (4.14)$$

4.3.2 Calibração planar

O procedimento de calibração apresentado na seção anterior é robusto e computacionalmente eficiente, desde que sejam evitadas geometrias degeneradas na extração dos pontos. Entretanto, este método possui o inconveniente de usar um objeto de calibração tridimensional. A construção de tal objeto pode ser difícil, uma vez que a suas dimensões precisam ser conhecidas com precisão. Além disso o manuseio deste padrão de calibração pode tornar o procedimento experimental mais complicado. Para contornar estas dificuldades, alguns métodos foram propostos [31,32] para fazer a calibração do sistema usando objetos planares. O benefício deste método para o processo experimental é evidente, apesar de exigir uma sofisticação no algoritmo de estimação.

Este algoritmo busca determinar a imagem da cônica absoluta (IAC) [14] analisando transformações projetivas em planos. Esta entidade projetiva obedece

a equação $w = \mathbf{K}^{-t}\mathbf{K}^{-1}$ [15], onde \mathbf{K} é a matriz de calibração interna da projeção. Uma vez estimados os parâmetros intrínsecos da câmera, pode-se determinar os parâmetros de translação e rotação se forem usadas pelo menos 3 imagens do plano.

As equações deste método são obtidas a partir de algumas manipulações no modelo de mapeamento da equação (4.10), quando aplicado a um objeto planar. Pode-se supor sem prejuízo, que o plano a ser observado localiza-se em $Z = 0$. Portanto, a equação (4.10) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} [\mathbf{R}|\mathbf{t}] \mathbf{M} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Na equação (4.15) o vetor \mathbf{r}_i representa a i -ésima coluna da matriz de rotação \mathbf{R} , e arbitrou-se que $W = 1$.

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \mathbf{M} = \mathbf{H} \mathbf{M} \quad (4.16)$$

Abusando da notação empregada, $\mathbf{M} = (X \ Y \ 1)^t$ ainda simboliza o ponto no plano, sempre considerando $Z = 0$. Outra observação pertinente é que a relação entre as coordenadas \mathbf{m} e \mathbf{M} agora é equivalente a uma homografia bidimensional representada pela matriz 3×3 \mathbf{H} .

Ainda segundo a equação (4.16), $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3] = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}]$, a menos de um fator de escala. Considerando que as colunas de uma matriz de rotação são ortonormais, pode-se deduzir que:

$$\mathbf{h}_1^t \mathbf{K}^{-t} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{h}_1^t \mathbf{K}^{-t} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^t \mathbf{K}^{-t} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \quad (4.18)$$

O método de calibração planar é totalmente baseado nas equações (4.17) e (4.18).

Cada imagem do plano, representado pela homografia correspondente \mathbf{H} , possui 8 graus de liberdade. Portanto, para estimar a matriz \mathbf{K} (6 graus de liberdade)

e os parâmetros de rotação e translação (6 graus de liberdade por posição de observação), são necessárias as imagens de 3 planos ou do mesmo plano em 3 posições diferentes.

Uma primeira aproximação para os valores dos parâmetros pode ser obtida analiticamente. Seja a imagem da cônica absoluta (IAC) \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-t}\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & -\frac{\gamma}{\alpha_x^2\alpha_y} & \frac{p_y\gamma - p_x\alpha_y}{\alpha_x^2\alpha_y} \\ -\frac{\gamma}{\alpha_x^2\alpha_y} & \frac{\gamma^2}{\alpha_x^2\alpha_y^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} & -\frac{\gamma(p_y\gamma - p_x\alpha_y)}{\alpha_x^2\alpha_y^2} - \frac{p_y}{\alpha_y^2} \\ \frac{p_y\gamma - p_x\alpha_y}{\alpha_x^2\alpha_y} & -\frac{\gamma(p_y\gamma - p_x\alpha_y)}{\alpha_x^2\alpha_y^2} - \frac{p_y}{\alpha_y^2} & \frac{(p_y\gamma - p_x\alpha_y)^2}{\alpha_x^2\alpha_y^2} + \frac{p_y^2}{\alpha_y^2} + 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Como \mathbf{w} é simétrica, pode ser alternativamente representada pelo vetor \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = (w_{11} \ w_{12} \ w_{22} \ w_{13} \ w_{23} \ w_{33})^t$$

Desta maneira, pode-se mostrar que a seguinte equação é válida:

$$\mathbf{h}_i^t \mathbf{w} \mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}^t \mathbf{b} \quad (4.20)$$

Onde $\mathbf{h}_i = (h_{1i} \ h_{2i} \ h_{3i})^t$ é a i -ésima coluna da matriz \mathbf{H} .

O vetor \mathbf{v}_{ij}^t é dado por:

$$\mathbf{v}_{ij}^t = (h_{1i}h_{1j}, \ h_{1i}h_{2j} + h_{2i}h_{1j}, \ h_{2i}h_{2j}, \ h_{3i}h_{1j} + h_{1i}h_{3j}, \ h_{3i}h_{2j} + h_{2i}h_{3j}, \ h_{3i}h_{3j})$$

Usando o desenvolvimento obtido até aqui, as equações (4.17) e (4.18) podem ser reescritas como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12}^t \\ (\mathbf{v}_{11}^t - \mathbf{v}_{22}^t) \end{pmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

Para cada imagem do plano de calibração obtida, um sistema homogêneo do tipo (4.21) é gerado. Considerando então n imagens, chega-se ao sistema de equações

$$\mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Onde \mathbf{V} é uma matriz $2n \times 6$.

A solução deste sistema já foi discutida anteriormente [19, 20], e é dada pelo autovetor de $\mathbf{V}^t\mathbf{V}$ correspondente ao menor autovalor.

Uma vez determinada a matriz \mathbf{w} , pode-se obter os parâmetros intrínsecos como está detalhado no apêndice A. A partir da matriz \mathbf{K} os coeficientes extrínsecos para cada imagem podem ser obtidos pelas equações:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1\|}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2\|}$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1\|} = \frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3}{\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2\|}$$

Por causa do ruído nos dados, a matriz de rotação obtida pode não ser ortogonal. Em [32] é mostrado um procedimento para estimar a matriz de rotação mais próxima de uma matriz 3×3 genérica.

A solução obtida, baseada na minimização da distância algébrica [14], pode servir como ponto de partida para um processo de mínimos quadrados não-linear. Esta otimização é recomendável, pois pode tratar de forma mais eficiente as não-linearidades do problema. Considerando m imagens com n pontos cada uma, um exemplo de função-custo adequada é:

$$\mathcal{F} = \sum_i^m \sum_j^n \|\mathbf{m}_{ij} - \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{K}, \mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{M}_j)\|^2 \quad (4.23)$$

4.3.3 Efeito da distorção na calibração

A maioria das radiografias utilizadas neste trabalho foram feitas com um sistema de raios X microfocado com a aquisição das imagens através de uma câmera CCD. A conversão dos fótons de raios X para radiação visível é feita por um intensificador de imagens, que é o dispositivo responsável pelos efeitos distorsivos mais severos na imagem. Como a tela de entrada do intensificador é curva, distorções bem pronunciadas aparecem nas bordas [33].

O sistema de aquisição utilizado baseia-se na solução adotada em [34]. A área útil da radiografia se concentra no entorno do centro da imagem, onde a tela do intensificador é quase plana, deprezando a informação contida nas bordas da imagem.

4.4 Sumário

No desenvolvimento desta pesquisa foram usados os dois algoritmos de calibração, o tridimensional e o planar. A calibração planar mostrou-se mais adequada para medidas em campo, pois exige um aparato experimental simples, apesar do procedimento numérico ser um pouco mais complicado (Capítulo 6).

Capítulo 5

Reconstrução Geométrica

5.1 Introdução

A estereoscopia permite obter a estrutura tridimensional de uma cena utilizando pelo menos duas imagens. Se existirem informações suficientes sobre a posição e orientação das câmeras em relação ao objeto em estudo, assim como acesso aos parâmetros intrínsecos do mapeamento, é possível efetuar uma reconstrução euclidiana exata da cena.

Se estes dados não estiverem disponíveis, ainda assim é possível efetuar uma reconstrução projetiva tridimensional. Esta reconstrução difere do caso euclidiano pois sofre de uma *ambiguidade projetiva*, ou seja, existem várias soluções possíveis, cada uma definida em uma base projetiva diferente.

Se \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são as coordenadas homogêneas de duas reconstruções possíveis do ponto \mathbf{X} , então $\mathbf{X}_2 = \mathbf{H}\mathbf{X}_1$, onde \mathbf{H} representa uma homografia 3D. Colocado de forma equivalente, \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são equivalentes, a menos de uma transformação projetiva no espaço 3D.

É muito importante chamar a atenção para o fato que é feita uma **reconstrução geométrica** do objeto. São as suas dimensões que são recuperadas, não as características de densidade do material, tal como na tomografia computadorizada [35].

5.2 Problema de reconstrução

O processo de reconstrução estéreo é denominado **triangulação**, e se baseia em características geométricas simples. Seja a figura 5.1:

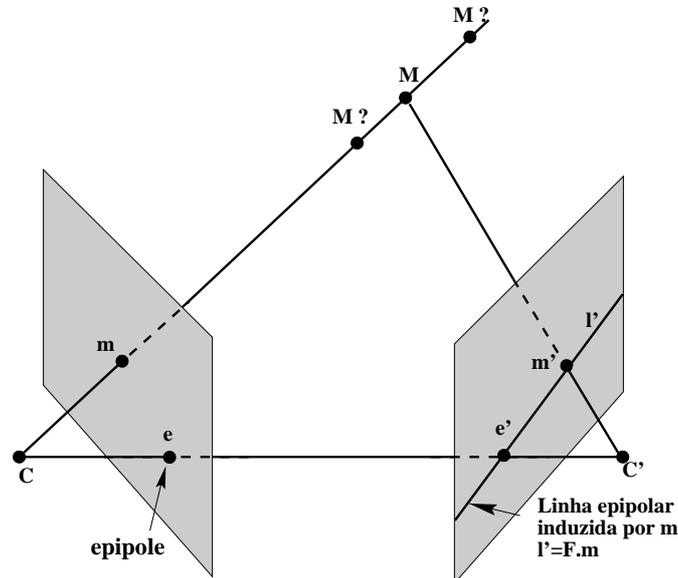


Figura 5.1: Triangulação

Como foi mostrado no capítulo 2, os pontos \mathbf{m} e \mathbf{m}' obedecem a equação $\mathbf{m}'^t \mathbf{F} \mathbf{m} = 0$ e pertencem ao plano epipolar. Este plano é definido pelos raios retroprojetados a partir de C e C' , passando por \mathbf{m} e \mathbf{m}' , respectivamente. Deduz-se portanto, que estes raios se interceptam em um ponto no espaço tridimensional, o ponto reconstruído M . Esta dedução só não é válida para pontos localizados na linha de base entre as câmeras. Neste caso, os raios retroprojetados são colineares e possuem infinitos pontos de intersecção.

Entretanto, por causa do ruído na imagem estes raios dificilmente serão coplanares, o que requer uma solução que minimize alguma função erro definida apropriadamente. Uma solução adotada usualmente é o *midpoint method* (método do ponto médio), que busca localizar o ponto médio da perpendicular entre os raios. Entretanto, sob o ponto de vista da geometria projetiva este método não é adequado. No caso de uma reconstrução projetiva, mais geral, ele falha pois conceitos como perpendicularidade e ponto médio não estão definidos [36].

Uma alternativa projetivamente invariante seria a minimização de erros na imagem. Pode-se mostrar [14] que um determinado ponto tridimensional M projeta-

se sempre na mesma posição na imagem, independente da sua base projetiva, bastando que a geometria epipolar matenha-se constante [14].

Portanto, se \mathbf{P} e \mathbf{P}' são as matrizes de câmera um critério a otimizar poderia ser a distância entre os pontos medidos na imagem e as suas reprojeções:

$$\mathcal{F}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') = d^2(\mathbf{m}, \mathbf{P}\hat{\mathbf{M}}) + d^2(\mathbf{m}', \mathbf{P}'\hat{\mathbf{M}}) \quad (5.1)$$

Sujeita a:

$$\hat{\mathbf{m}}^t \mathbf{F} \hat{\mathbf{m}} = 0. \quad (5.2)$$

Onde $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{m}}$ e $\hat{\mathbf{m}}'$ são as estimativas do ponto \mathbf{M} e de suas imagens nas duas câmeras.

Naturalmente, esta é uma solução computacionalmente intensiva pois envolve a estimativa de pontos tridimensionais putativos $\hat{\mathbf{M}}_i$.

É possível manipular a equação (5.1) de tal forma que uma outra interpretação seja permitida. Lembrando que $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{M}}$ e $\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{P}'\hat{\mathbf{M}}$ são as reprojeções da *estimativa* do ponto tridimensional \mathbf{M} :

$$\mathcal{F}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') = d^2(\mathbf{m}, \hat{\mathbf{m}}) + d^2(\mathbf{m}', \hat{\mathbf{m}}') \quad (5.3)$$

Na equação (5.3), a função erro está definida pela diferença entre os pontos medidos e os reprojitados *na imagem*, sem explicitar a necessidade de estimar os pontos tridimensionais. Explorando esta sutileza da equação juntamente com a restrição da matriz fundamental na equação (5.2), é possível estabelecer métodos que façam uma correção nas coordenadas medidas. Esta correção vai ser feita de tal forma que os pontos correspondentes obedeçam exatamente [37] ou com uma boa aproximação a equação (5.2). Se os pontos atenderem a esta condição, então o formalismo da geometria epipolar garante que os raios definidos por eles e os centros de câmera são coplanares. Desta forma é possível estimar a localização do ponto 3D pela intersecção destes raios.

5.3 Correção aproximada pelo erro de Sampson

Um método de correção razoavelmente popular é a correção de primeira ordem usando a distância de Sampson [22, 25]. Esta aproximação, conhecida também como *técnica do gradiente* foi apresentada rapidamente no capítulo 3.

A idéia consiste em estimar o ponto quadridimensional $\hat{\mathbf{X}}$ que minimize o erro $\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2$, onde $\hat{\mathbf{X}}$ é o ponto sobre a hipersuperfície Ψ mais próximo do ponto medido \mathbf{X} . No caso presente, o ponto $\mathbf{X} = (x, y, x', y')$ é formado pelas coordenadas não-homogêneas dos pontos \mathbf{m} e \mathbf{m}' , e Ψ é dada de forma implícita pela equação (5.2). Portanto:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}_x \quad (5.4)$$

$$\Psi(\hat{\mathbf{X}}) = \Psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}_x) = 0 \quad (5.5)$$

Fazendo uma expansão de Taylor de primeira ordem na função $\Psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}_x)$:

$$\Psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}_x) = \Psi(\mathbf{X}) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\delta}_x = 0 \quad (5.6)$$

Considerando \mathbf{J} como o jacobiano de Ψ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o erro associado ao ponto \mathbf{X} , $\Psi(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varepsilon}$, a equação (5.6) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{J}\boldsymbol{\delta}_x = 0 \quad (5.7)$$

O problema de minimização da distância de Sampson pode então ser definido como a estimação do vetor $\boldsymbol{\delta}_x$ que minimiza $\|\boldsymbol{\delta}_x\|$, sujeito a $\mathbf{J}\boldsymbol{\delta}_x = -\boldsymbol{\varepsilon}$. Este problema de otimização com restrições pode ser solucionado com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange [14]. Após algumas manipulações, chega-se a expressão para $\boldsymbol{\delta}_x$:

$$\boldsymbol{\delta}_x = -\mathbf{J}^t (\mathbf{J}\mathbf{J}^t)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.8)$$

Como a hipersuperfície Ψ é definida pela restrição epipolar (equação 5.2), pode-se definir o erro $\boldsymbol{\varepsilon}$ como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{m}'^t \mathbf{F} \mathbf{m} \quad (5.9)$$

O jacobiano \mathbf{J} pode ser desenvolvido gerando a seguinte equação:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{X}} = [(\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_1 \quad (\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_2 \quad (\mathbf{Fm})_1 \quad (\mathbf{Fm})_2] \quad (5.10)$$

Onde $(\mathbf{Ab})_i$ representa a i -ésima linha do produto da matriz \mathbf{A} pelo vetor \mathbf{b} . Por exemplo, $(\mathbf{Fm})_1 = f_{11}x + f_{12}y + f_{13}w$.

Finalmente, a equação para correção dos pontos (5.4) tem a expressão:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} - \frac{\mathbf{m}^t \mathbf{Fm}}{(\mathbf{Fm})_1^2 + (\mathbf{Fm})_2^2 + (\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_1^2 + (\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_2^2} \begin{pmatrix} (\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_1 \\ (\mathbf{F}^t \mathbf{m}')_2 \\ (\mathbf{Fm})_1 \\ (\mathbf{Fm})_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Após a correção dos pontos correspondentes, tem-se a garantia que as estimativas de \mathbf{M} , \mathbf{m} e \mathbf{m}' pertencem ao mesmo plano, com uma razoável precisão. O passo seguinte é a aplicação de algum método de triangulação para a localização de \mathbf{M} .

5.4 Triangulação linear

Este procedimento é semelhante ao método DLT (Capítulo 4) para estimação de matrizes de câmeras. Cada medida gera um par de equações de mapeamento $\mathbf{m} = \mathbf{PM}$ e $\mathbf{m}' = \mathbf{P}'\mathbf{M}$, que são combinadas e manipuladas de tal forma a gerar um sistema do tipo $\mathbf{AM} = \mathbf{0}$. Este sistema, assim como no caso da calibração de câmeras, possui solução não-nula, pois a matriz \mathbf{A} é montada de tal forma que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Para cada imagem, é válida a equação $\mathbf{m} \times \mathbf{PM} = 0$, pois os vetores \mathbf{m} e \mathbf{PM} possuem a mesma direção. Desenvolvendo este produto vetorial de tal forma a eliminar o fator de escala da notação homogênea, chega-se ao conjunto de equações:

$$\begin{aligned}x(\mathbf{p}_3^t \mathbf{M}) - (\mathbf{p}_1^t \mathbf{M}) &= 0 \\y(\mathbf{p}_3^t \mathbf{M}) - (\mathbf{p}_2^t \mathbf{M}) &= 0\end{aligned}$$

Onde \mathbf{p}_i^t representa a i -ésima linha da matriz \mathbf{P} .

A outra imagem gera um conjunto equivalente de equações, que podem ser agrupadas para gerar o sistema $\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{0}$. A matriz \mathbf{A} tem a forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x\mathbf{p}_3^t - \mathbf{p}_1^t \\ y\mathbf{p}_3^t - \mathbf{p}_2^t \\ x'\mathbf{p}_3^{t'} - \mathbf{p}_1^{t'} \\ y'\mathbf{p}_3^{t'} - \mathbf{p}_2^{t'} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Por causa do ruído, a solução deste sistema homogêneo deve ser estimada através da minimização de $\|\mathbf{A}\mathbf{M}\|$, submetido a $\|\mathbf{M}\| = 1$, utilizando os mesmos métodos do capítulo 4.

5.5 Sumário

A estratégia usada neste trabalho para a reconstrução das estruturas radiografadas foi: após determinar as coordenadas dos pontos correspondentes nas duas imagens, corrigir os valores usando a fórmula de erro de Sampson. Em seguida, calcular as coordenadas tridimensionais por triangulação linear. Todos estes algoritmos foram implementados na ferramenta de *software* construída.

Capítulo 6

Procedimento experimental

6.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado o procedimento experimental adotado, assim como o aparato utilizado na aquisição das medidas. Buscou-se estabelecer uma metodologia de medição que fosse a mais simples possível, transferindo as correções para a etapa de pré-processamento e reconstrução.

O método de cálculo baseou-se fortemente nas técnicas de Visão Computacional [3, 14], sendo eventualmente necessário fazer algumas adaptações para o caso de imagens radiográficas. A maior parte das referências consultadas utilizavam imagens de vídeo ou de câmeras fotográficas, que apresentam uma diversidade maior de informações, tais como sombras e oclusões que facilitam principalmente a etapa de identificação dos pontos de interesse. No caso da radiografia, a natureza dos dados apresentados por vezes dificultava a análise e a automatização do procedimento.

6.2 Materiais e métodos

Para a aquisição dos dados foi utilizado o equipamento de radioscopia do LIN/COPPE, que consiste em um sistema de radiografia em tempo real FeinFocus microfocado, com potencial constante. A faixa de operação do equipamento é 0,1 a 1 mA, com tensão de 5 a 160 kV. A aquisição das imagens neste sistema é feita por uma câmera CCD acoplada a um intensificador de imagens.

Foram feitos também alguns ensaios com o equipamento de raios X industrial

Balteau CD 160 com duplo foco e corrente de 1 a 35 mA, com a aquisição feita por sistemas *image plate* - placas de fósforo e leitores (*scanners*) CR Tower (GE) e Cyclone (Perkin-Elmer), simulando uma medição em campo.

Adicionalmente, o sistema *image plate* da GE foi também usado em um ensaio de gamagrafia com uma fonte de Irídio-192 de atividade aproximada 10 Ci (37 MBq).

Para a aquisição dos pares estéreos no equipamento microfoco, posicionou-se a amostra em uma mesa giratória movimentada por um sistema com motores de passo. Foram feitas aquisições de imagens com intervalos de deslocamento angular de até 30 graus. Além das imagens das amostras, eram feitas aquisições com os padrões de calibração. O apêndice C mostra o fluxograma deste procedimento experimental.

Os padrões de calibração, essenciais para a reconstrução geométrica, foram feitos com placas de circuito impresso com distâncias entre ilhas de 0,1 polegada (0,254 cm). Estas ilhas serviam como marcação para calibração. O primeiro padrão utilizado foi tridimensional, construído a partir de uma estrutura que permitia o encaixe das placas ortogonalmente, como pode ser visto nas figuras 6.1 e 6.2.

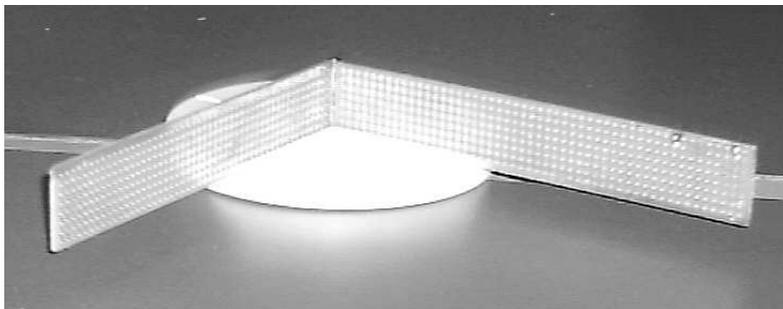


Figura 6.1: Padrão de calibração 3D formado por placas de circuito impresso encaixadas ortogonalmente em uma estrutura de suporte.

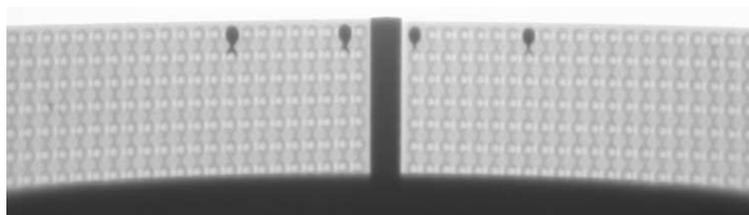


Figura 6.2: Radiografia do padrão de calibração tridimensional.

Com a aplicação do procedimento de calibração planar [32] foi possível utili-

zar as placas de circuito impresso sem o suporte tridimensional mostrado na figura 6.1, o que simplificou consideravelmente a medida. Cada placa pode ser disposta em qualquer posição em relação às outras, sem necessidade de manter a perpendicularidade. A única restrição experimental imposta pelo algoritmo é a geração de pelo menos três imagens de planos, o que pode ser facilmente simulado com um arranjo de três placas. Na verdade, considerando as duas radiografias, cada placa fornece um par de imagens que pode ser utilizado. O importante é que exista diferença na orientação angular em cada imagem do plano representado pela face da placa, sob pena do algoritmo de calibração não convergir. A figura 6.3 traz um exemplo de radiografia usada na calibração planar. Pode-se observar o posicionamento livre de cada placa em relação às outras.

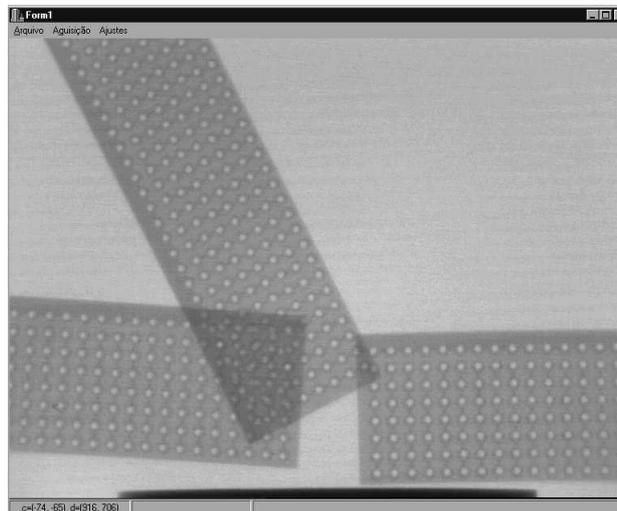


Figura 6.3: Radiografia usada na calibração planar. As placas de circuito impresso são posicionadas independentemente umas das outras.

Após a aquisição das imagens, inicia-se a etapa de tratamento dos dados e reconstrução. O procedimento computacional pode ser separado em três etapas: pré-processamento do par estéreo, calibração e reconstrução, como mostra o fluxograma do apêndice D.

A primeira tarefa a ser executada pelo sistema é a extração das marcas de calibração dos padrões, fisicamente representadas pelas ilhas da placa de circuito impresso. Na primeira versão do sistema esta identificação era feita manualmente pelo operador, que além de enfadonha, era uma tarefa muito propensa a erros. Desenvolveu-se então um módulo no *software* de análise para o pré-processamento

destas imagens, que fizesse a identificação e extração automática dos pontos de calibração. Após a extração, efetua-se a ordenação dos pontos para que possam ser utilizados pelo algoritmo de calibração.

Este procedimento de calibração fornece as matrizes de câmera estimadas para cada imagem. Foram usados dois métodos: calibração com padrão tridimensional (figura 6.2) e calibração planar (figura 6.3). Na calibração tridimensional, foi aplicado o algoritmo DLT (*Direct Linear Transformation*) [30] para obter uma primeira aproximação das câmeras, usando como dados de entrada os pontos reais extraídos do par estéreo, e pontos gerados por um modelo do objeto de calibração. A partir desta primeira aproximação linear melhora-se a estimativa usando mínimos quadrados não-lineares.

A calibração planar foi feita adaptando-se algoritmos encontrados na literatura de Visão Computacional [31, 32] para o caso em estudo. Foram usados 3 planos em posições distintas para calibrar cada imagem do par estéreo. Como no caso da calibração 3D, uma primeira estimativa linear dos parâmetros intrínsecos e extrínsecos de cada câmera é obtida, e em seguida refina-se a solução por mínimos quadrados.

Uma vez obtidas as matrizes de câmera, pode-se partir para a reconstrução propriamente dita. A parte mais difícil desta etapa é a identificação dos pontos de interesse e dos seus correspondentes na outra imagem. Recorreu-se à geometria epipolar para simplificar o problema da busca, com o uso da matriz fundamental (Capítulo 3) para gerar a linha epipolar na segunda imagem a partir de um ponto escolhido na primeira radiografia. Como foi detalhado no capítulo 3, dois pontos correspondentes situam-se sobre as suas respectivas linhas epipolares.

Foram feitas duas versões para a reconstrução, uma delas automática, com a identificação dos pares de pontos correspondentes por correlação bidimensional ao longo da linha epipolar. Para o caso onde o contraste da imagem não permite que o processo de correlação funcione bem, a identificação é feita manualmente pelo usuário com a linha epipolar superposta à imagem para facilitar a localização do ponto.

Depois de identificados os pares de pontos para reconstrução, procede-se como descrito no capítulo 5. Os pontos são corrigidos usando o critério de erro de Sampson

[22, 25] e em seguida aplica-se uma triangulação linear para obter as coordenadas 3D dos pontos escolhidos.

6.3 Pré-processamento das imagens

Nesta seção será detalhado o processo de pré-processamento das imagens de calibração. A figura 6.4 mostra uma imagem de calibração típica, com dois planos com diferentes orientações. O objetivo deste procedimento é obter automaticamente as coordenadas das ilhas nas placas de circuito impresso que servem como marcas de calibração, como está assinalado na figura 6.4. Para que isso seja possível, é necessário filtrar a radiografia de tal forma que as ilhas sejam separadas do resto da imagem.

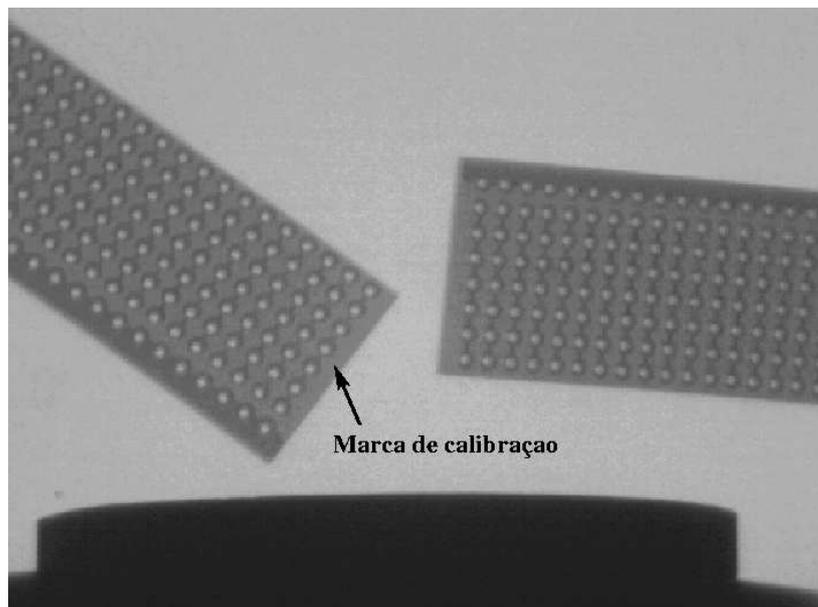


Figura 6.4: Imagem de calibração típica, composta de duas placas de circuito impresso. As ilhas das placas servem como pontos de referência para a calibração

O usuário inicialmente seleciona com o *mouse* a região de interesse (ROI) em um dos planos sob análise. A ROI é realçada para melhorar o contraste e destacar as imagens das marcas de calibração.

O próximo passo é geração de uma imagem binária, onde os pixels só podem assumir dois valores distintos. Esta operação é denominada binarização ou limiarização (*thresholding*). Após a definição pelo operador de qual o limiar desejado (as

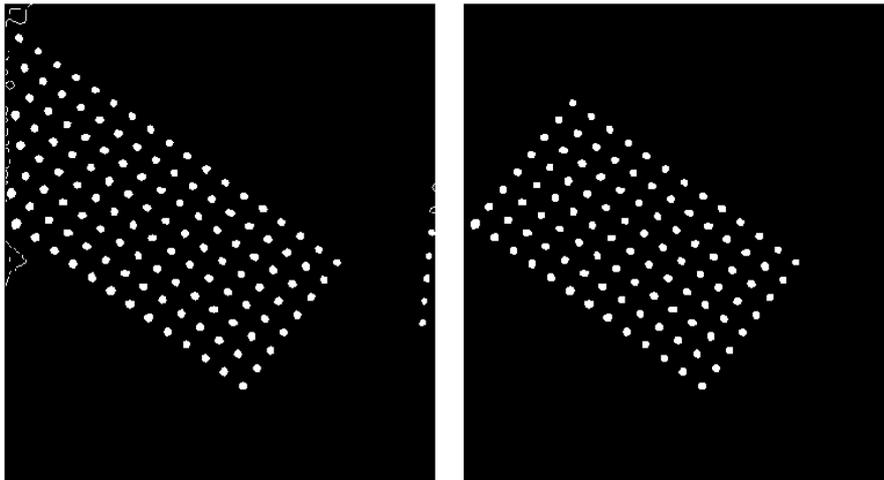
radiografias têm 256 níveis de cinza), a imagem é *binarizada* e segmentada, gerando os contornos das marcas de calibração.

Os artefatos são filtrados a partir de operações morfológicas de erosão e dilatação. A figura 6.5 mostra os estágios inicial e final destas operações. Antes da filtragem morfológica, os contornos das marcas de calibração são preenchidas, como mostra a figura 6.5(a).

De posse da imagem binária das marcas de calibração, suas coordenadas são obtidas ajustando uma elipse a cada uma e calculando o centróide. A figura 6.6 mostra os pontos extraídos superpostos à imagem original.

A última etapa do pré-processamento consiste em ordenar os pontos extraídos automaticamente. Para realizar esta tarefa foi proposta uma adaptação do algoritmo RANSAC (*Random Sample Consensus*) [28], que é frequentemente usado na identificação de pontos anômalos (*outliers*) em uma amostra de dados.

Como as ilhas na placa de circuito impresso estão alinhadas, as suas imagens também pertencem retas, pois a projeção perspectiva preserva o tipo de entidade geométrica e a incidência (Capítulo 2). Usando este princípio, o algoritmo RANSAC é usado para identificar o conjunto de suporte de cada uma das retas, tratando os demais pontos como anômalos. Uma vez separados em subconjuntos, os pontos de calibração podem ser facilmente ordenados. Por exemplo, na figura 6.6 o algoritmo conseguiu separar 8 subconjuntos com 13 pontos cada, onde cada agrupamento representa um conjunto de ilhas distribuídas ao longo da mesma linha.



(a) Imagem *binarizada*

(b) Imagem final, sem artefatos

Figura 6.5: *Binarização* e segmentação da imagem do plano de calibração. Após o processamento, somente as marcas de calibração pertencentes à ROI permanecem na imagem.

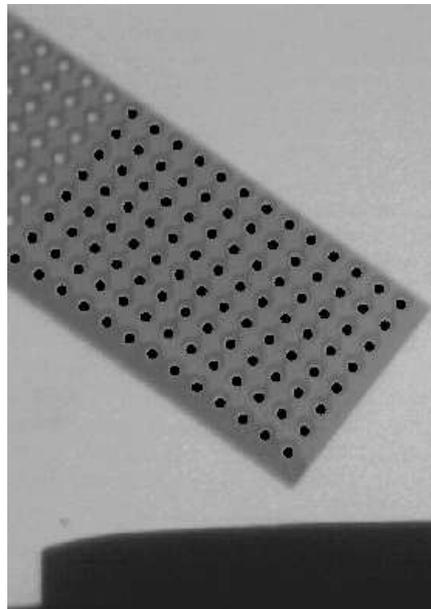


Figura 6.6: Pontos de calibração superpostos à imagem.

6.4 Calibração

Foram implementados dois métodos de calibração, um que faz uso de um objeto de calibração tridimensional e outro que aplica uma calibração planar. Nos dois casos é feita inicialmente uma aproximação linear dos parâmetros, que é usada como ponto de partida para um processo de estimação com mínimos quadrados não lineares.

6.4.1 Calibração tridimensional

A calibração com o padrão 3D baseia-se no algoritmo proposto em [14]. O algoritmo 1 mostra o pseudocódigo do programa.

Algoritmo 1: Calibração com padrão tridimensional

- 1 importar dados da imagem;
 - 2 importar dados do modelo;
 - 3 normalização dos dados;
 - 4 gerar o sistema $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$, e resolvê-lo sujeito a $\|\mathbf{p}\| = 1$ (DLT);
 - 5 minimizar o erro geométrico, tomando a solução linear como ponto de partida;
 - 6 denormalização;
-

Na seção 4.3.1 foi feita explanação teórica deste método. A partir das coordenadas homogêneas dos pontos na cena e das suas projeções medidas na imagem, vetores \mathbf{M} e \mathbf{m} respectivamente, monta-se o sistema $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Convém ressaltar que os pontos tridimensionais armazenados no vetor \mathbf{M} foram obtidos a partir de um modelo do corpo de calibração e que o vetor de coordenadas \mathbf{m} foi determinado experimentalmente.

Este sistema é resolvido usando Decomposição em Valores Singulares (SVD), e uma primeira estimativa de matriz de câmera \mathbf{P} é obtida. Este método é conhecido como *Direct Linear Transformation* (DLT) [30].

Segundo Hartley [14], é essencial para o funcionamento desta solução linear que seja feita uma normalização dos pontos de tal forma que o centróide dos pontos esteja na origem do sistema de coordenadas adotado e que a distância média de

qualquer ponto à origem seja $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{3}$, no caso dos pontos 3D). Com isso melhora-se o condicionamento da matriz \mathbf{A} .

Após a obtenção da solução linear, aplica-se mínimos quadrados para minimizar o erro geométrico de reprojeção, cuja função custo é dada pela equação 4.14.

Para testar a validade da calibração, na figura 6.7 pode-se ver os pontos reconstruídos, obtidos pela reprojeção do vetor \mathbf{M} usando a matriz de câmera estimada, superpostos aos pontos realmente medidos na imagem (vetor \mathbf{m}).

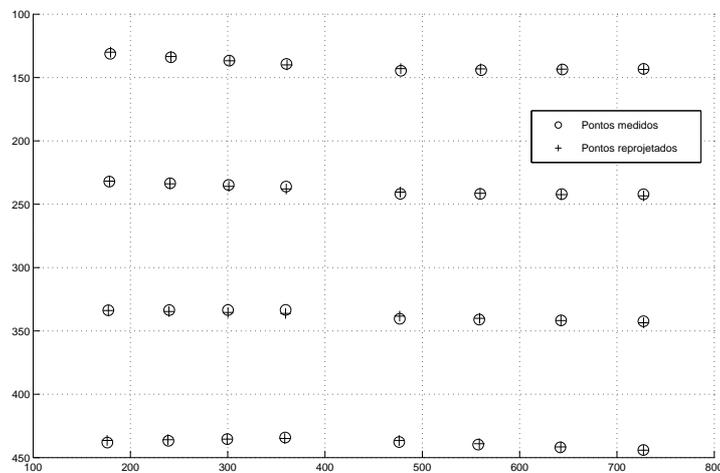


Figura 6.7: Pontos reconstruídos e pontos medidos, em pixels.

6.4.2 Calibração planar

Este método de calibração simplifica consideravelmente o processo de medida, pois não é mais necessária a utilização de um padrão de calibração 3D. Entretanto, como foi mostrado no capítulo 4, o algoritmo de cálculo é mais complexo.

Para obter a matriz de câmera, primeiro são estimados os parâmetros intrínsecos do mapeamento que estão embutidos na imagem da cônica absoluta (IAC). Esta entidade geométrica foi apresentada na subseção 2.3.1.

As equações 4.17 e 4.18 geram um sistema do tipo $\mathbf{V}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ que é resolvido de maneira semelhante ao caso do método DLT. Os coeficientes extrínsecos são calculados a partir da matriz de calibração interna da câmera, como está detalhado na seção 4.3.2.

Após uma parametrização adequada, submete-se o problema a uma minimização do erro de reprojeção, usando-se o método de Levenberg-Marquardt [38]. O pseudocódigo do procedimento é mostrado no algoritmo 2.

Algoritmo 2: Calibração planar

- 1 importar dados das imagens;
 - 2 importar dados do modelo;
 - 3 calcular as homografias bidimensionais;
 - 4 gerar o sistema $\mathbf{V}\mathbf{b}=\mathbf{0}$;
 - 5 determinar o vetor \mathbf{b} , com a restrição $\|\mathbf{b}\| = 1$;
 - 6 extrair os parâmetros intrínsecos;
 - 7 calcular os parâmetros extrínsecos;
 - 8 parametrizar o problema de otimização;
 - 9 minimizar o erro de reprojeção;
-

Na figura 6.8, de forma semelhante à figura 6.7, são superpostos os pontos medidos experimentalmente e os reprojados para as duas soluções, a linear e a otimizada.

Os histogramas mostram o erro de reprojeção nos dois casos, indicando que a solução linear sozinha não consegue estimar razoavelmente os parâmetros da projeção. No segundo histograma pode-se observar que o erro de reprojeção após a otimização é inferior a 1 pixel.

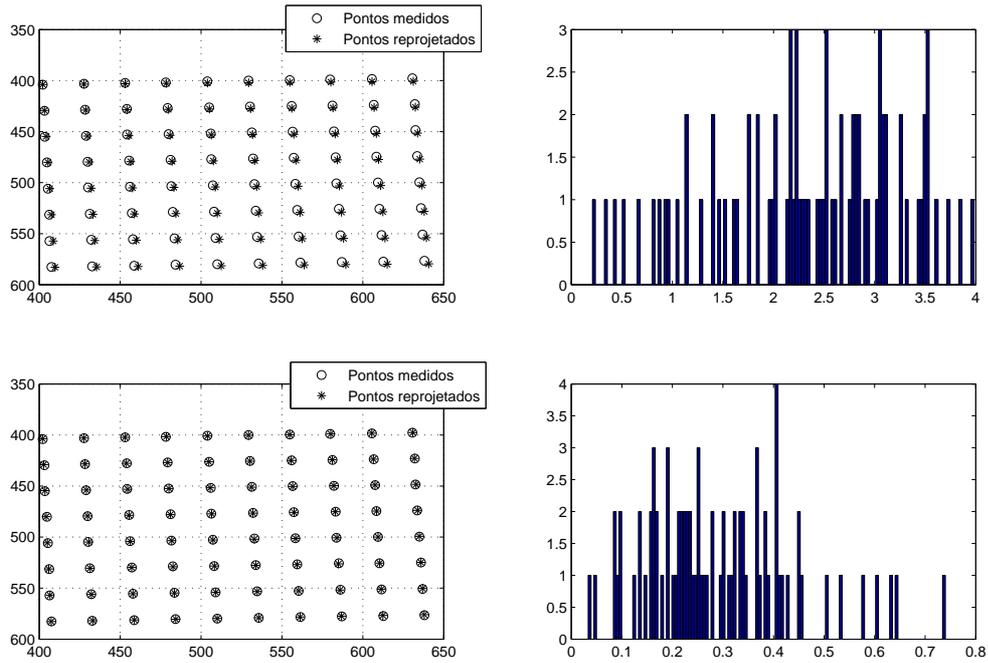


Figura 6.8: Erro de calibração para as soluções linear e otimizada. As coordenadas dos pontos são dadas em pixels. Os histogramas representam a distribuição do erro de reprojeção em pixels

6.5 Reconstrução

No capítulo 5 foi mostrado que a recuperação das coordenadas tridimensionais do objeto sob análise é feita por um processo matemático denominado *triangulação*. Entretanto, a aplicação direta do cálculo de triangulação não é recomendável pois as coordenadas dos pontos extraídos das imagens estão contaminadas por ruído, portanto fora do plano epipolar.

A solução adotada para este problema foi a correção prévia no espaço dos pixels usando o conceito de erro de Sampson, como está detalhado na seção 5.3. Após esta operação, efetua-se uma triangulação linear. A sequência de operações está detalhada no algoritmo 3.

Como foi mencionado anteriormente, a identificação correta dos pontos correspondentes nas duas imagens é crucial para a reconstrução geométrica. Este é um problema difícil pois envolve a correlação bidimensional da informação das duas

Algoritmo 3: Procedimento de reconstrução

- 1 calcular a matriz fundamental;
 - 2 identificar de forma manual ou automática pontos de interesse nas imagens;
 - 3 corrigir as coordenadas dos pontos;
 - 4 aplicar a triangulação;
-

radiografias, o que pode implicar em um custo computacional elevado.

A estratégia adotada foi utilizar a matriz fundamental para executar uma correlação 2D guiada ao longo das linhas epipolares [39]. Com isso reduz-se a amplitude da busca, diminuindo a carga computacional.

Para determinar as linhas epipolares optou-se por calcular a matriz fundamental para cada par de imagens, apesar desta informação também poder ser extraída das matrizes de câmera. Inicialmente são determinados pontos de alto contraste (*corners*) nas duas imagens, usando o algoritmo do detector de Harris [40]. Usando esta massa bruta de dados, as correspondências putativas são estabelecidas através de um procedimento de correlação bidimensional normalizada [41]. Naturalmente, este conjunto inicial de pontos casados deve apresentar uma grande quantidade de falsas correspondências, que poderiam eventualmente impedir uma estimação correta da matriz fundamental.

A identificação de pontos anômalos é feita mais uma vez utilizando o algoritmo RANSAC [28]. Dentro do conjunto de supostos pares são sorteadas amostras com 7 correspondências para estimar a matriz fundamental. A amostra que tiver o maior conjunto de suporte é considerada livre de pontos anômalos (*outliers*). O conjunto de dados remanescente após a eliminação destes *outliers* é usado para estimar a geometria epipolar do par estéreo. Os detalhes deste processo foram apresentados na seção 3.6. A sequência de cálculo está indicada no algoritmo 4.

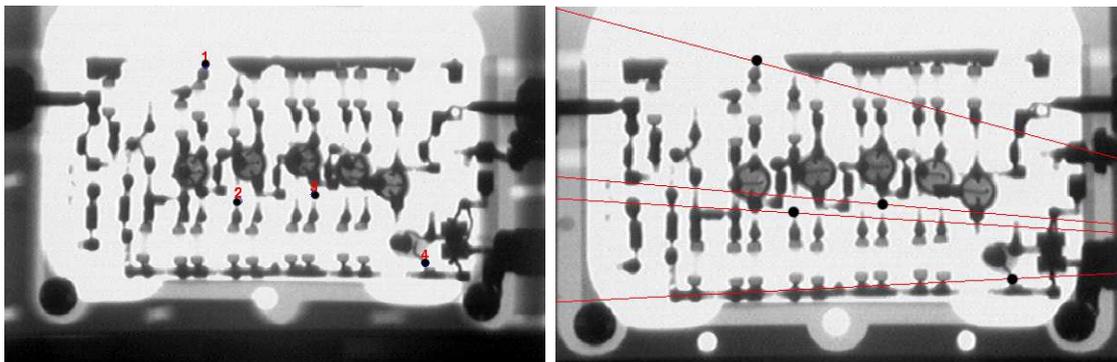
Algoritmo 4: Estimação da matriz fundamental \mathbf{F}

- 1 aplicar o detector de Harris nas duas imagens;
 - 2 usar correlação bidimensional para estabelecer um conjunto inicial de pares;
 - 3 eliminar os *outliers* com a algoritmo RANSAC;
 - 4 estimar \mathbf{F} por mínimos quadrados, usando os pontos remanescentes;
-

A figura 6.9 mostra duas radiografias feitas de um circuito eletrônico. Pode-se observar os componentes (conectores, resistores, transístores) e as laterais do seu gabinete metálico.

Usando este par estéreo como exemplo, é possível demonstrar a rotina de análise das imagens. Inicialmente, o operador seleciona em uma das imagens os pontos de interesse. Com o auxílio da matriz fundamental \mathbf{F} previamente calculada, a segunda imagem é varrida ao longo da linha epipolar para localizar o ponto correspondente ao da primeira radiografia. Com estes pares de pontos casados, é feita enfim a triangulação, recuperando as coordenadas tridimensionais do corpo de prova.

Na figura 6.9(a) é feita a seleção manual dos pontos de interesse, que são automaticamente localizados na figura 6.9(b), com o auxílio das linhas epipolares.



(a) Par estéreo - imagem 1

(b) Par estéreo - imagem 2

Figura 6.9: Procedimento de identificação de pontos correspondentes no par estéreo.

6.5.1 Estimativa do erro

Para um trabalho que envolve metrologia, estimar a incerteza da medida é tão importante quanto o valor do parâmetro.

As informações primordiais no problema de reconstrução estéreo são as posições dos pontos correspondentes \mathbf{m} e \mathbf{m}' . Mas estes dados normalmente estão contaminados por ruído de várias fontes. Entre elas pode-se citar a detecção de *corners* (pontos de alto contraste na imagem) deficiente, incerteza na correlação entre as imagens afetando a seleção dos pontos correspondentes [42] e o erro de quantização da imagem [43].

A calibração das câmeras também afeta a precisão da reconstrução, pois os parâmetros estimados são aplicados diretamente no cálculo da triangulação.

A figura 6.10 representa esquematicamente um arranjo experimental de estereoradiografia semelhante ao utilizado neste trabalho. Este modelo pode auxiliar o entendimento da natureza do erro na triangulação e permite uma análise qualitativa das principais fontes de variabilidade.

Estão superpostas na figura duas posições de aquisição de imagem. Pode-se identificar alguns elementos já definidos no Capítulo 4, como raio principal, foco de raios X e plano da imagem.

Como o plano da imagem (representado fisicamente pelo detector) é discretizado, a posição de um determinado ponto na radiografia pode estar submetido a erros de quantização de até $\pm\frac{1}{2}$ pixel.

Ao observar a figura 6.10, pode-se inferir que esta incerteza (em pixels) na localização dos pontos na imagem tem influência na precisão com que as coordenadas 3D são estimadas. Por causa da projeção perspectiva, todo o volume no espaço definido pelo foco de raios X e pela área na imagem delimitada por 1 pixel será superposto na radiografia. Este volume tem um perfil semelhante a uma pirâmide, se estreita a medida que se aproxima do foco.

O processo de triangulação cruza as “pirâmides” correspondentes nas duas imagens, delimitando a posição no espaço de um determinado ponto. Entretanto, este volume é variável, depende da distância ao foco. Esta característica afeta a precisão das coordenadas reconstruídas.

Considerando os pontos **P** e **Q** na figura 6.10, existe um “volume de incerteza” em torno de cada um deles (cuja seção transversal na figura 6.10 tem a forma de losango), que aumenta na medida em que o ponto se afasta do foco. Esta região está associada ao erro do processo de triangulação.

Convém observar que a análise feita até agora só levou em conta a incerteza oriunda da quantização da imagem, sem considerar a localização errônea dos pontos, seja por falha no algoritmo de extração ou por excesso de ruído nos dados.

No processo de reconstrução a informação disponível na imagem é discretizada, portanto fica patente a importância da localização acurada dos pontos na radiografia. Por exemplo, os pontos **P** e **Q** na figura 6.10 podem ser duas estimativas

distintas para o mesmo ponto no espaço. Eles têm a mesma posição na imagem 2, mas estão projetados em pixels diferentes na imagem 1. Apesar da figura 6.10 ser esquemática, sem fidelidade ao fator de escala, pode-se perceber que a incerteza na reconstrução das suas coordenadas não será a mesma.

Considerando que a resolução do dispositivo de imagem é fixa, são os erros na localização destes pontos que contribuem com a parcela variável na incerteza nas coordenadas tridimensionais, e que podem eventualmente serem reduzidos.

O esquemático da figura 6.10 se assemelha ao arranjo experimental utilizado para os ensaios com o sistema microfoco. Nestes experimentos, o corpo de prova está alinhado com o eixo principal e é rotacionado pela ação de uma mesa giratória, produzindo um efeito equivalente à rotação do arranjo detector-foco em torno do eixo de rotação.

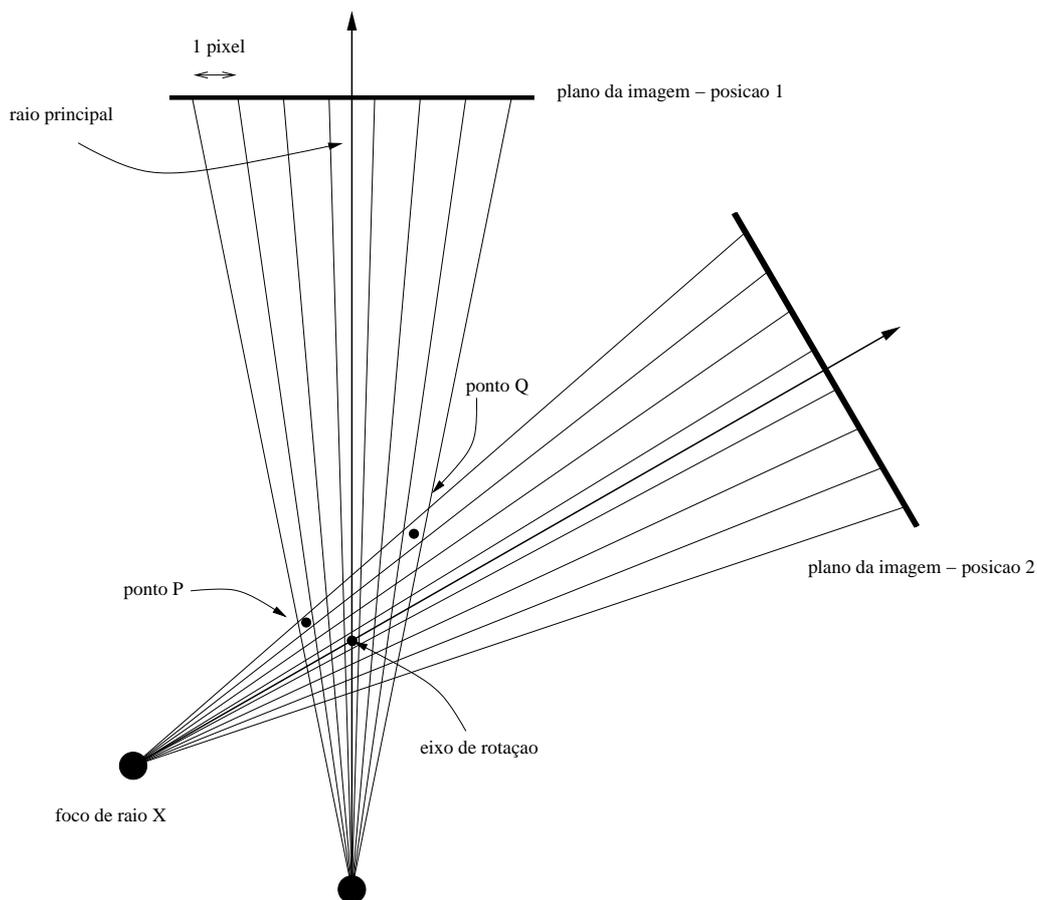


Figura 6.10: Representação esquemática do arranjo experimental

Para avaliar experimentalmente a relação entre a incerteza na localização dos pixels e o erro na estimação das coordenadas tridimensionais, foi proposto um

procedimento de reconstrução sucessiva. A cada simulação, antes do processo de triangulação perturba-se as coordenadas dos pontos originalmente medidos nas radiografias com ruído gaussiano de média nula e desvio-padrão σ .

Após repetir este procedimento uma quantidade de vezes estatisticamente significativa, foi feita a análise dos dados obtidos. Com estes resultados da simulação foi possível entender o comportamento do aparato de reconstrução quando submetido a perturbações, além de poder estabelecer um limite para a incerteza das medidas.

Como padrão para avaliar o erro usou-se o mesmo objeto que foi utilizado para calibração do sistema. É importante ressaltar que o conjunto de pontos usado nesta validação é distinto daquele que foi usado para extrair a matriz de câmera.

Para exemplificar o procedimento, a figura 6.11 mostra uma radiografia onde os pontos destacados foram utilizados na reconstrução. Pode-se identificar na imagem os dois planos usados na calibração.

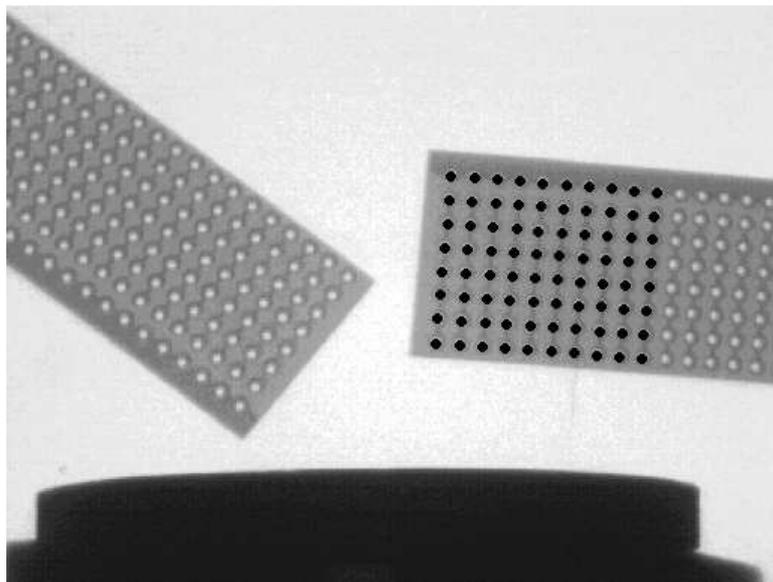
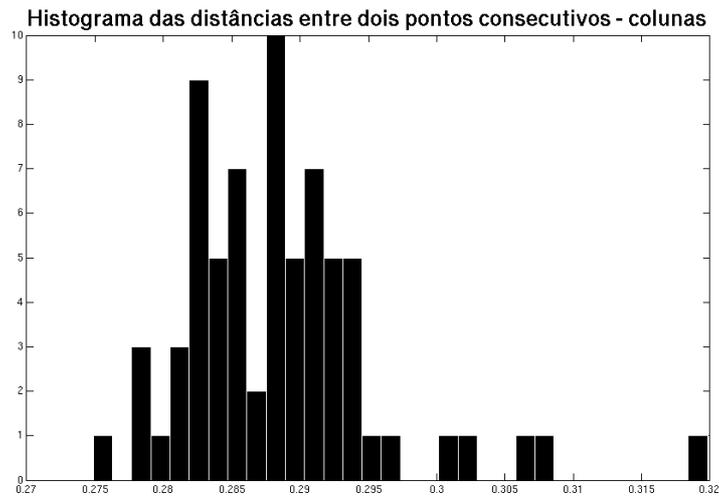


Figura 6.11: Radiografia utilizada no estudo da incerteza do experimento. Os pontos destacados foram utilizados na reconstrução.

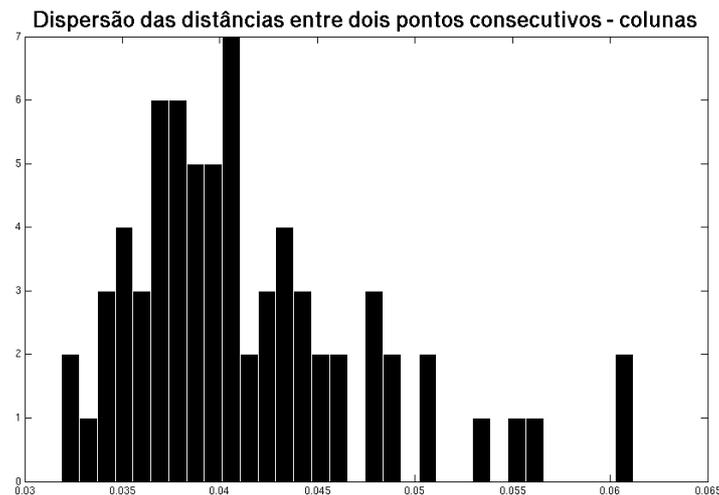
Uma das análises feitas baseou-se na distribuição das distâncias entre pontos consecutivos. Pelas especificações das placas de circuito impresso usadas, esta distância deve ter um valor médio de 0,254 cm. Portanto, como foi comentado anteriormente, efetuou-se 250 reconstruções tomando como base os dados reais, medidos diretamente no par estéreo. Para cada reconstrução, as coordenadas dos pontos

foram somadas a um valor aleatório, simulando a incerteza na extração dos dados.

A distância entre pontos consecutivos foi calculada para cada uma das triangulações, gerando 250 eventos deste espaço amostral. As figuras 6.12(a) e 6.12(b) indicam média e o desvio-padrão de cada ponto da amostra ao longo das realizações, considerando o desvio-padrão $\sigma = 1$ pixel nos dados de entrada. Pelos histogramas, o valor da distância medida entre pontos consecutivos é $d = 0,29 \pm 0,04$ cm, compatível com o valor de referência.



(a) Distribuição da média das distâncias.



(b) Distribuição do desvio-padrão das distâncias.

Figura 6.12: Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.11.

Este experimento computacional foi aplicado a outro par estéreo, cujas matrizes de câmera foram obtidas com o procedimento de calibração com padrão tridimensional (ver subseção 4.3.1). A figura 6.13 mostra uma das radiografias, com os pontos de interesse marcados.

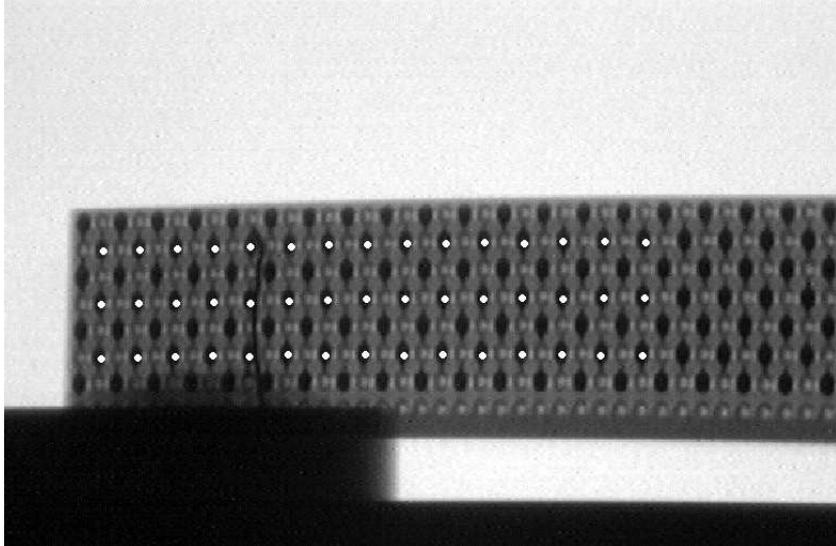
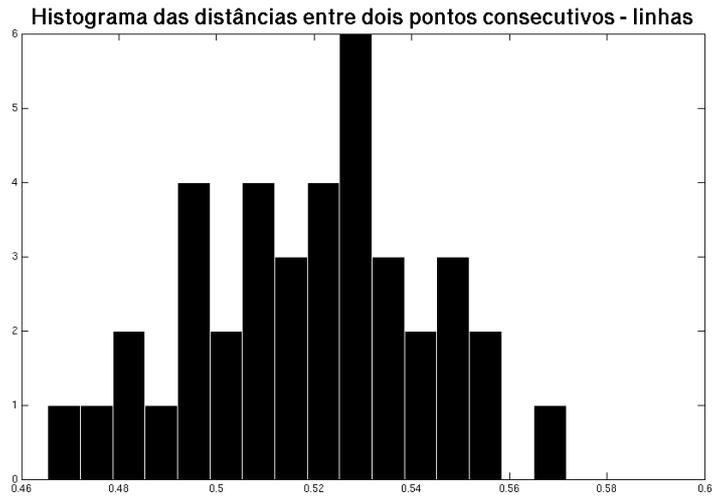
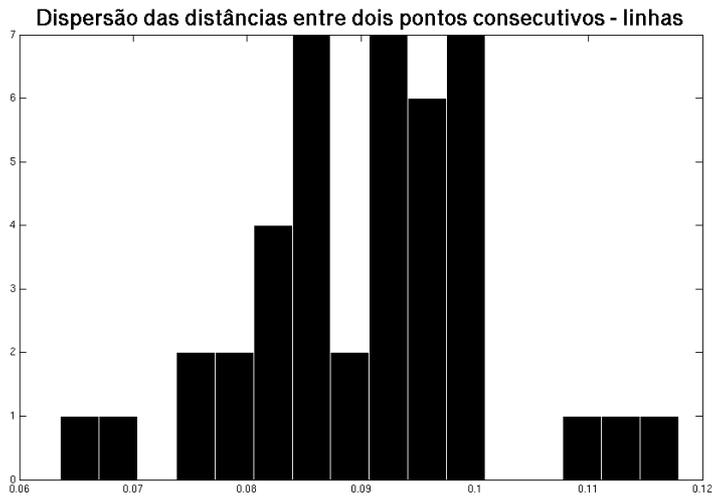


Figura 6.13: Radiografia usada no estudo da incerteza do experimento. Os pontos destacados foram utilizados na reconstrução. Neste exemplo, as matrizes de câmera foram obtidas por calibração 3D.

Aplicando o mesmo procedimento descrito anteriormente, obteve-se os histogramas da figura 6.14. Pelos dados da simulação, a distância calculada é de $d = 0,53 \pm 0,09$ cm. Observando a figura 6.13, os pontos reconstruídos pertencem a ilhas não adjacentes, portanto a distância de referência é 0,508 cm.



(a) Distribuição da média das distâncias.



(b) Distribuição do desvio-padrão das distâncias.

Figura 6.14: Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.13.

Para reforçar a análise do erro, as imagens obtidas com o sistema *image plate* também foram investigadas. Na figura 6.15, a imagem radiográfica mostra os planos de calibração, com destaque nos pontos a serem reconstruídos.

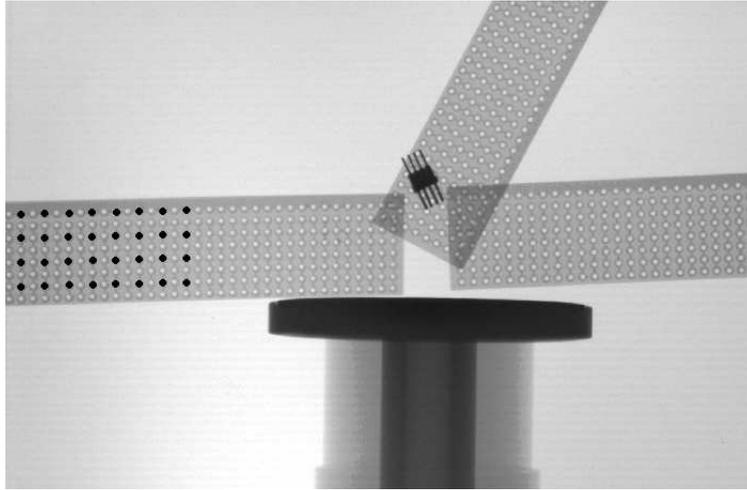
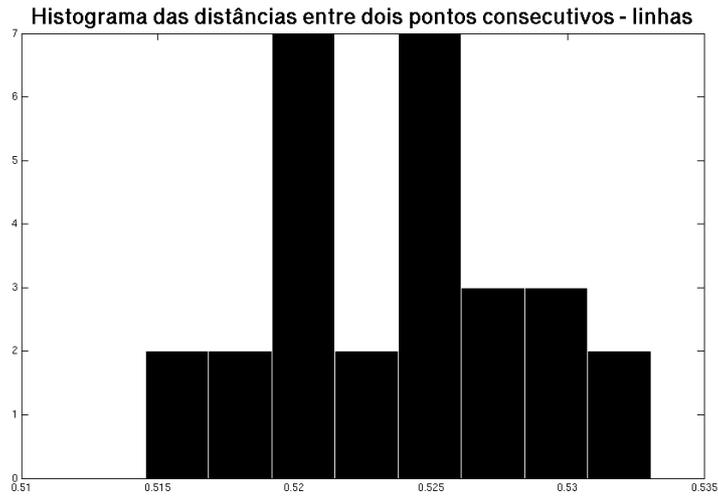
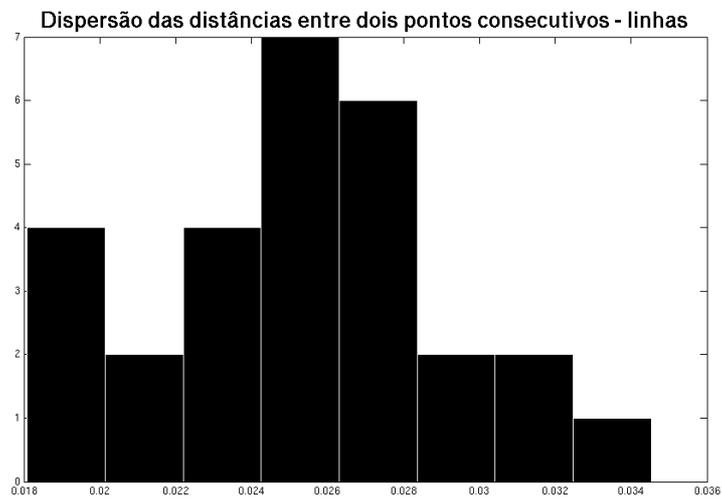


Figura 6.15: Radiografia obtida com *image plate*, com os pontos utilizados na reconstrução em destaque.

Para esta medida, os histogramas da figura 6.16 mostram que o valor médio das distâncias é $d = 0,52 \pm 0,03$ cm. Neste caso, o erro relativo é menor por causa da resolução espacial superior do sensor em relação à câmera CCD. A radiografia obtida com o sistema *image plate*, quando comparada com o equipamento de radioscopia apresenta uma resolução espacial três vezes superior.



(a) Distribuição da média das distâncias - *image plate*.



(b) Distribuição do desvio-padrão das distâncias - *image plate*.

Figura 6.16: Histogramas da média e desvio-padrão das distâncias (em centímetros) entre as ilhas selecionadas na figura 6.15.

Capítulo 7

Resultados

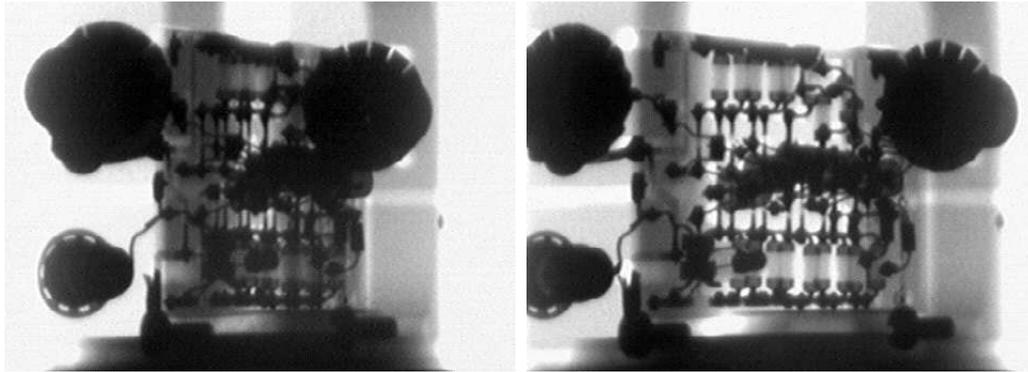
7.1 Introdução

Este capítulo traz os resultados dos ensaios realizados com o sistema de reconstrução estéreo descrito no capítulo 6. As amostras são diversos objetos metálicos de dimensões conhecidas, cujas radiografias apresentam estruturas que podem ser identificadas e reconstruídas. Realizando os ensaios desta maneira é possível comparar as medidas com os valores reais, obtidos por uma medida independente ou por especificação da usinagem.

7.2 Amostra 17022004

Esta amostra tem imagens de uma caixa de alumínio, usada para acondicionar circuitos eletrônicos. Estas radiografias possuem várias características interessantes que podem ser medidas, tanto na caixa metálica como na placa de circuito impresso. Esta foi uma das primeiras medidas realizadas, e serviu para testar e aperfeiçoar o *software* desenvolvido.

A figura 7.1 mostrar um par estéreo identificado como *ob4*, cujas imagens foram adquiridas com uma diferença angular de 10° . Estas medidas foram feitas com o sistema microfoco-CCD, com o movimento da amostra realizado pela mesa giratória.



(a) Radiografia 1.

(b) Radiografia 2.

Figura 7.1: Par estéreo *ob4* do ensaio 17022004.

A figura 7.2 mostra a seleção de dois pontos que marcam o início e o final de um furo na caixa de alumínio, feito para para acomodar um parafuso. Este sulco foi medido com um paquímetro e apresentou uma profundidade de 0,43 cm.

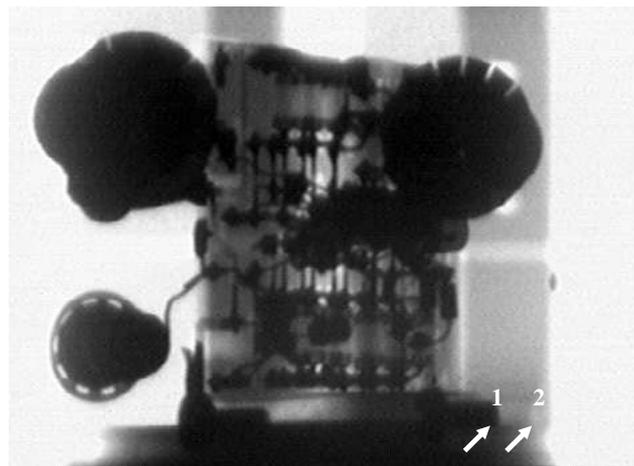
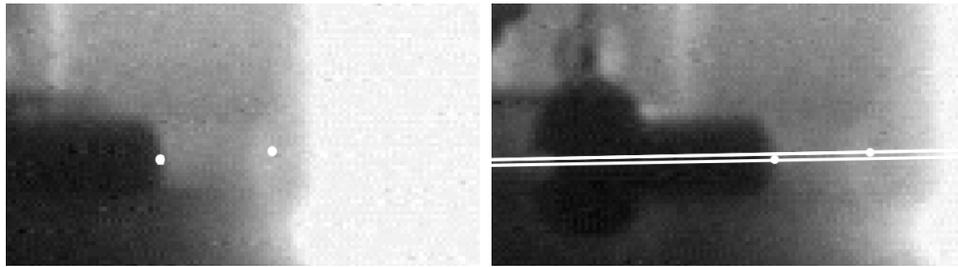


Figura 7.2: Seleção de pontos para reconstrução

As figuras 7.3(a) e 7.3(b) mostram o detalhe da seleção dos pontos, com a superposição das linhas epipolares. O operador selecionou os pontos de interesse na primeira figura e o procedimento de correlação 2D restrita à linha epipolar determinou os seus correspondentes na segunda imagem.

Segundo o resultado da reconstrução estéreo, esta perfuração na caixa tem $0,46 \pm 0,09$ cm, compatível com a medida independente.

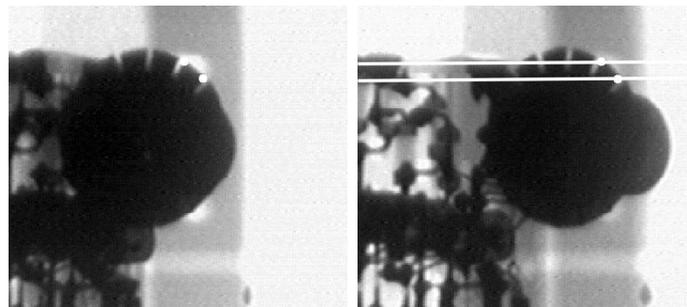


(a) Destaque da imagem 1.

(b) Destaque da imagem 2.

Figura 7.3: Par estéreo em destaque.

Nas figuras 7.4(a) e 7.4(b) é mostrado o detalhe de uma outra medida. Os pontos marcados mostram um detalhe de um dos conectores do dispositivo eletrônico. A reconstrução estéreo forneceu um valor de $0,27 \pm 0,09$ cm e a medida com paquímetro, 0,24 cm.



(a) Destaque da imagem 1.

(b) Destaque da imagem 2.

Figura 7.4: Par estéreo em destaque.

Nesta última reconstrução, o sistema retornou um valor de $0,87 \pm 0,09$ cm para o detalhe na lateral da caixa, mostrado na figura 7.5. A medição alternativa deu 0,9 cm.

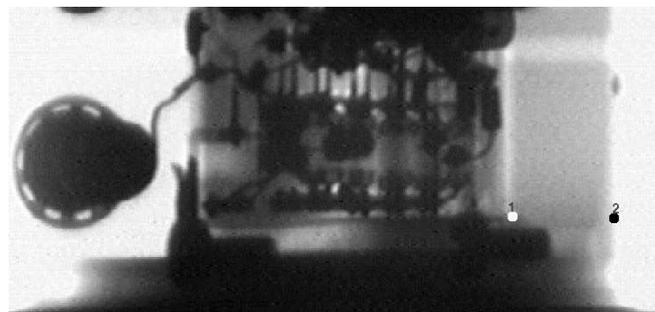


Figura 7.5: Medida da lateral da caixa metálica

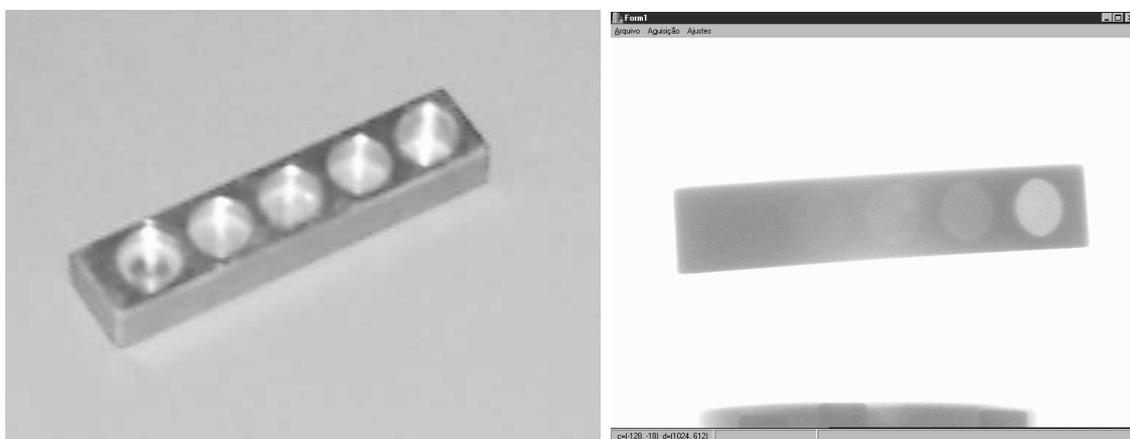
A tabela 7.1 resume os resultados deste ensaio inicial, dispondo a medida em comparação com o valor de referência.

Tabela 7.1: Tabela comparativa. Amostra 17022004

Identificação	Referência	Reconstrução
Figura 7.3	0,43 cm	$0,46 \pm 0,09$ cm
Figura 7.4	0,24 cm	$0,27 \pm 0,09$ cm
Figura 7.5	0,90 cm	$0,87 \pm 0,09$ cm

7.3 Amostra 05072005

O ensaio a seguir utilizou como corpo de prova uma peça de aço com diversos furos de formato cilíndrico com profundidades diferentes. Este objeto é usualmente empregado em medidas de contraste em sistemas radiográficos. As figuras 7.6(a) e 7.6(b) mostram respectivamente a fotografia e a radiografia deste bloco de aço.



(a) Corpo de prova.

(b) Radiografia do corpo de prova.

Figura 7.6: Amostra 05072005.

Após aplicar todo o procedimento de extração de pontos, correlação e reconstrução, foi possível criar um modelo tridimensional das bordas do furo cilíndrico. A reconstrução é parcial, pois as bordas não são totalmente visíveis nas duas radiografias usadas.

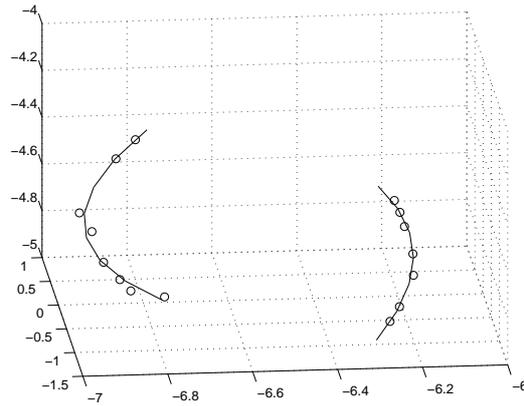


Figura 7.7: Visão frontal da reconstrução das bordas de um dos furos do objeto da figura 7.6(a). Escala em centímetros.

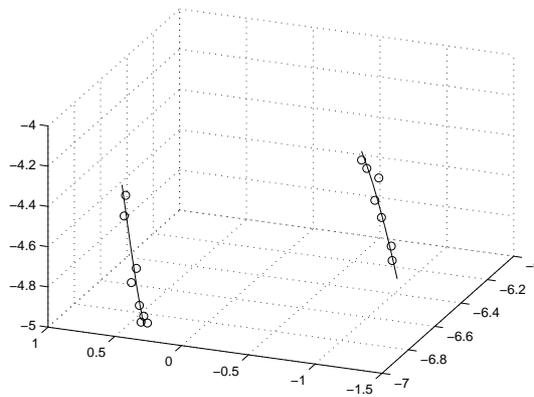


Figura 7.8: Reconstrução das bordas. Escala em centímetros.

As figuras 7.7 e 7.8 mostram, para duas vistas distintas, os pontos reconstruídos juntamente com uma curva ajustada por mínimos quadrados. Esta curva representa a estimativa para a posição da borda. Para verificar a fidelidade da reconstrução, foi feito um cálculo indireto da profundidade do furo, usando os valores da distância entre as bordas (diagonal) e do diâmetro do cilindro obtidos a partir da reconstrução geométrica. A figura 7.9 mostra a geometria considerada. Foram obtidos os seguintes valores:

$$Diâmetro = 1,05 \text{ cm} \quad Diagonal = 1,31 \text{ cm} \quad Profundidade = 0,78 \text{ cm}$$

Foi feita uma medida com um paquímetro para comparação, e obteve-se uma profundidade de 0,8 cm.

As figuras 7.10(a), 7.10(b), 7.11(a) e 7.11(b) a seguir mostram um modelo

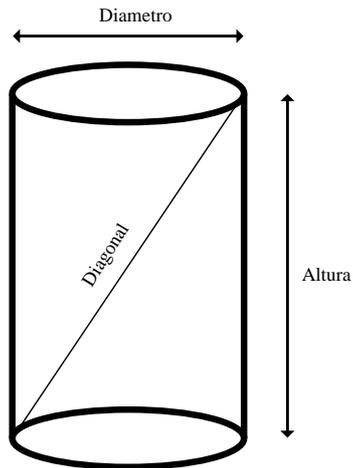
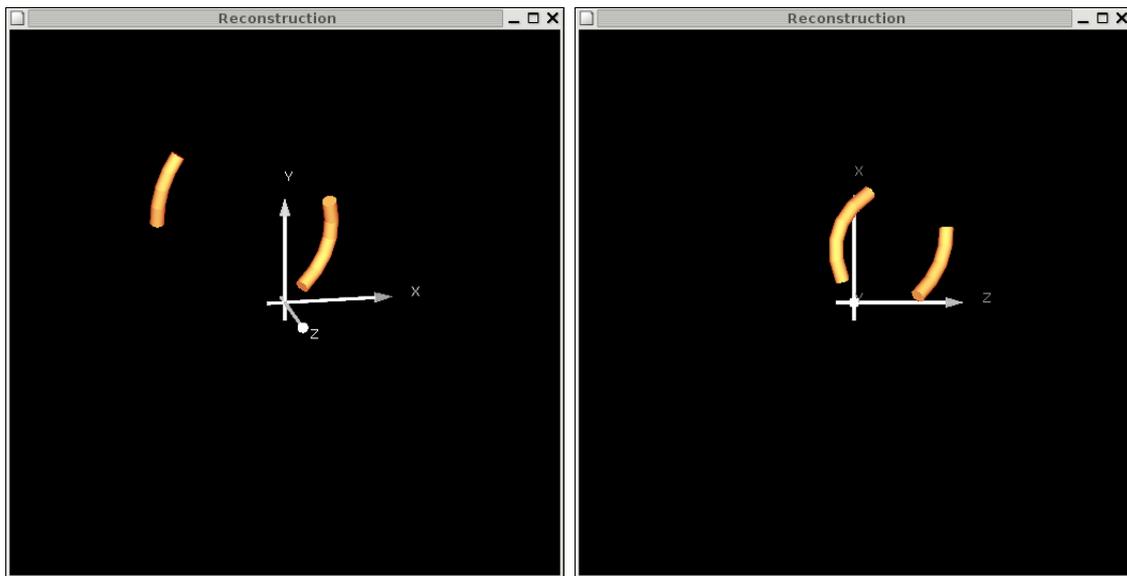


Figura 7.9: Geometria do furo no corpo de prova

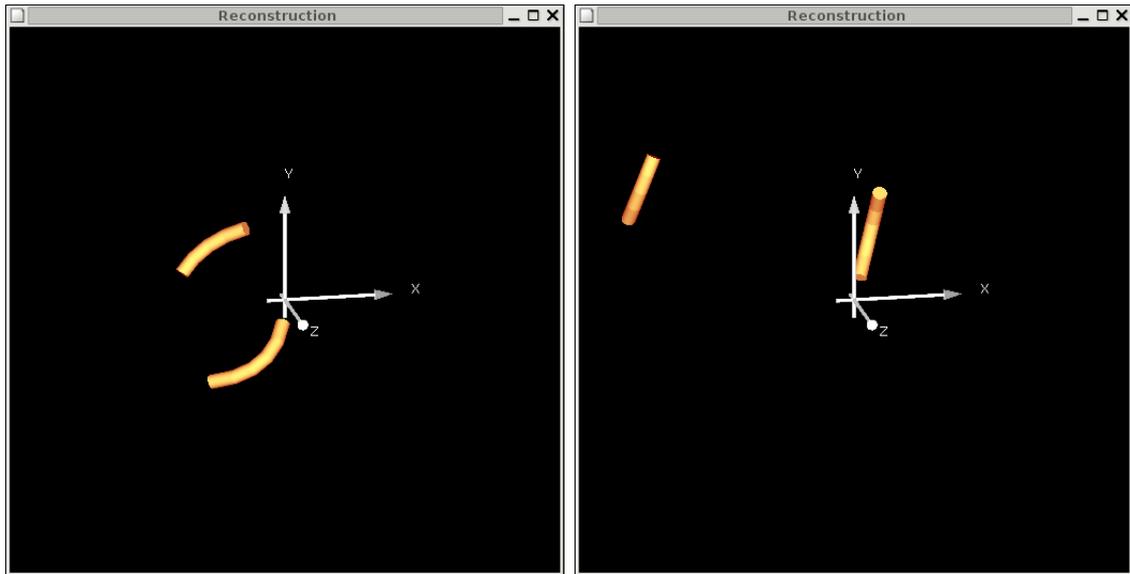
3D das bordas do furo, observado em posições diferentes tanto do objeto quanto da câmera. O sistema de eixos XYZ é colocado como referência para a observação. Estes modelos foram feitos com os dados extraídos do experimento, são curvas ajustadas aos postos reconstruídos.



(a) Reconstrução - vista 1.

(b) Reconstrução - vista 2.

Figura 7.10: Modelos 3D.



(a) Reconstrução - vista 3.

(b) Reconstrução - vista 4.

Figura 7.11: Modelos 3D.

É importante observar que a reconstrução parcial do objeto foi suficiente para a extração das informações relevantes. Para a obtenção de um modelo tridimensional completo poderiam ser utilizadas mais radiografias que permitissem a visualização de todo o objeto, sem oclusões. Para este corpo de prova em particular, dada a sua simetria conhecida, poderia ser feita uma extrapolação do perfil das bordas a partir do trecho reconstruído.

7.4 Amostra 02062005

Neste ensaio, buscou-se medir o comprimento de algumas perfurações em um pequeno bloco de alumínio (figura 7.12). Estes furos têm geometria cilíndrica e seu diâmetro é bem menor que a profundidade. Esta particularidade permitiu aproximar a diagonal do cilindro (figura 7.9) pelo seu comprimento.

Como o diâmetro do furo é da ordem do milímetro, que é cerca de 1 décimo da ordem de grandeza do comprimento da perfuração. No pior caso, o erro cometido por esta aproximação tem valor em torno de 0,8 %.

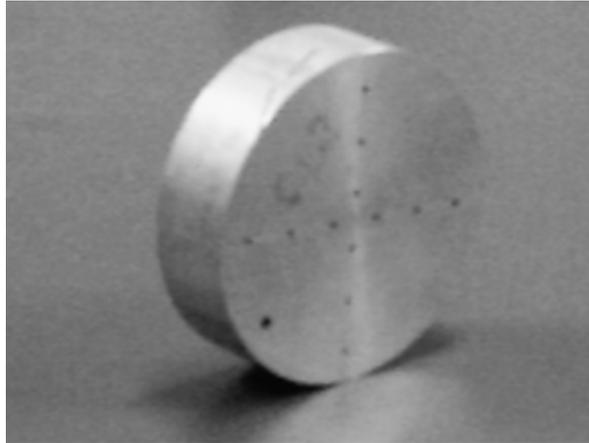
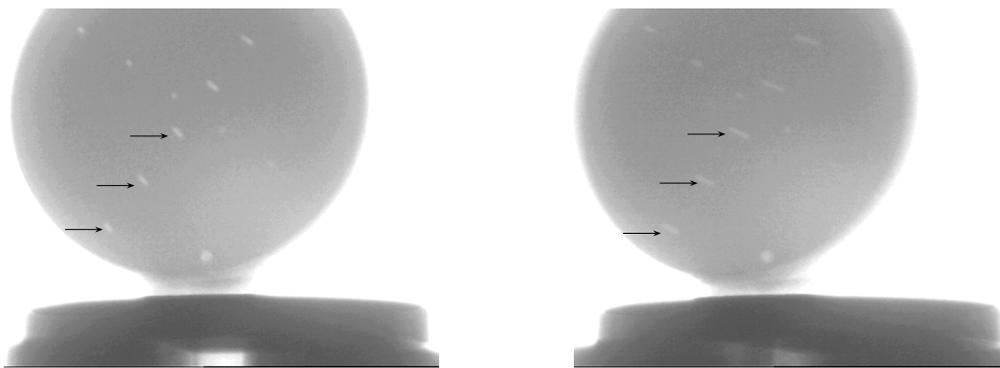


Figura 7.12: Fotografia do corpo de prova

As figuras 7.13(a) e 7.13(b) mostram o par estéreo utilizado, junto com a indicação das regiões usadas na reconstrução.



(a) Par estéreo - 1.

(b) Par estéreo - 2.

Figura 7.13: Amostra 02062005.

A tabela 7.2 mostra a comparação dos valores medidos pela reconstrução estéreo com as especificações do corpo de prova.

Tabela 7.2: Tabela comparativa. Amostra 02062005

Especificação	Reconstrução
0,8 cm	$0,83 \pm 0,04$ cm
1,0 cm	$1,04 \pm 0,04$ cm
1,2 cm	$1,15 \pm 0,04$ cm

7.5 Amostra 09102004 - compósito

Os dados a seguir correspondem a um experimento similar ao que foi realizado na sub-seção 7.3. Foi efetuada a reconstrução de uma perfuração cilíndrica em um bloco de aço. Uma das radiografias usadas na reconstrução é mostrada na figura 7.14.



Figura 7.14: Radiografia - bloco de aço

Assim como no caso anterior, foi efetuada uma reconstrução parcial das bordas do furo e a sua profundidade calculada a partir das medidas do diâmetro e da diagonal do cilindro.

As principais diferenças em relação ao caso anterior são as dimensões maiores do corpo de prova e o processo de calibração. Para esta amostra foi feita uma calibração com objeto 3D, enquanto no caso anterior foi usada a técnica da calibração planar.

Para efeito de verificação, a profundidade calculada a partir das radiografias foi de 0,55 cm, enquanto a medida com o paquímetro foi de 0,6 cm. As figuras 7.15, 7.16(a) e 7.16(b) mostram o resultado da reconstrução.

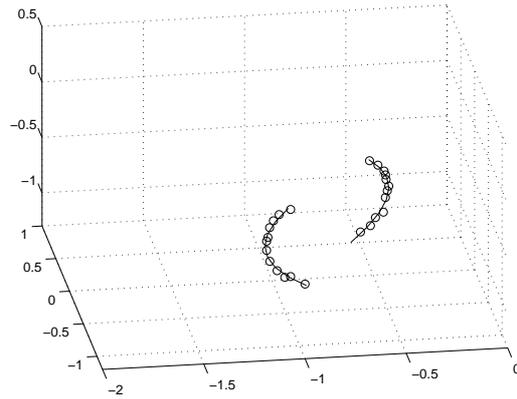


Figura 7.15: Reconstrução - pontos e borda ajustada. Escala em centímetros.



(a) Reconstrução - vista 1.

(b) Reconstrução - vista 2.

Figura 7.16: Amostra 09102004 - compósito.

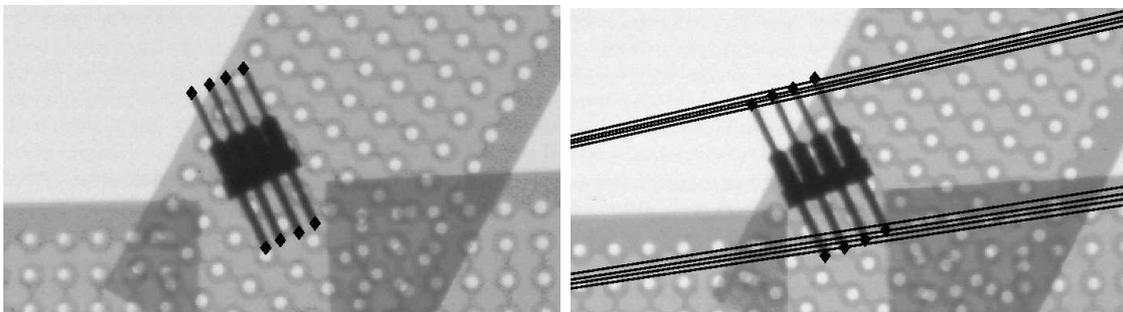
7.6 Amostra 15072005 - *image plate*

Este ensaio foi realizado sob condições diversas das medidas anteriores. Para verificar a versatilidade da técnica, usou-se um arranjo experimental mais adequado para medidas em campo. Ao invés de usar o equipamento de radioscopia com o microfoco acoplado a um intensificador de imagens, as radiografias foram feitas com um tubo de raios X industrial e um sistema *image plate* fabricado pela Perkin-Elmer.

Outra mudança importante diz respeito à movimentação da amostra. No sistema de radioscopia, o objeto estava posicionado sobre uma mesa acoplada a motores de passo que permitiam a sua rotação controlada pelo computador. No presente caso a amostra é movida livremente, a mão, sofrendo rotações e translações. A única restrição imposta é que a movimentação das placas de calibração seja feita de forma solidária ao corpo de prova.

Como corpo de prova foram usados componentes eletrônicos de dimensões conhecidas, no lugar dos blocos usinados de metal. A justificativa para esta troca é a simplificação da etapa de identificação dos pontos correspondentes, pois o contraste é maior entre o objeto e fundo da imagem. Desta forma a comparação de *performance* pode ser feita em relação a acurácia na reconstrução.

Nas figuras 7.17(a) e 7.17(b) pode-se ver um dos pares estéreo usados, juntamente com os pontos escolhidos para reconstrução e suas respectivas linhas epipolares calculadas a partir da matriz fundamental estimada. Para efeito de comparação, o comprimento médio dos pinos obtido pela reconstrução é de $(1,21 \pm 0,03)$ cm, coerente com o valor de referência de 1,20 cm.



(a) Uma das radiografias do par estéreo usado. (b) Radiografia do corpo de prova após movimentação (rotação e translação). Pode-se observar ao fundo as placas de circuito impresso usadas na calibração planar. As linhas epipolares usadas na *correlação guiada* também estão representadas.

Figura 7.17: Amostra 09102004 - compósito.

Ainda com este sistema de aquisição foi efetuado outro ensaio utilizando componentes eletrônicos, onde se mediu a distância média entre os pinos. A figura 7.18 mostra uma fotografia digital dos corpos de prova.

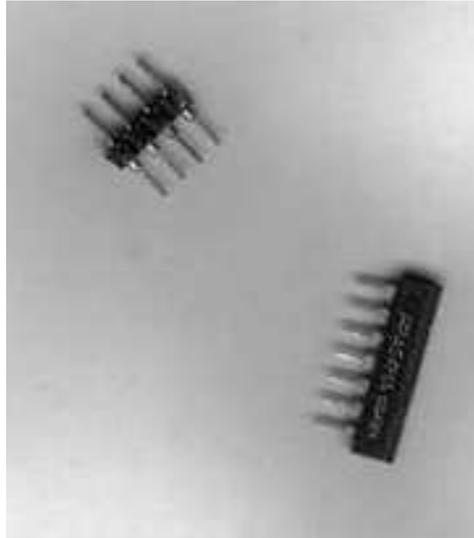


Figura 7.18: Fotografia dos corpos de prova utilizados.

Estes componentes tem por especificação uma distância entre pinos de 0,254 cm. Pela reconstrução estéreo foi obtido o valor de $(0,25 \pm 0,03)$ cm. Uma das radiografias do par estéreo usados é mostrada na figura 7.19.

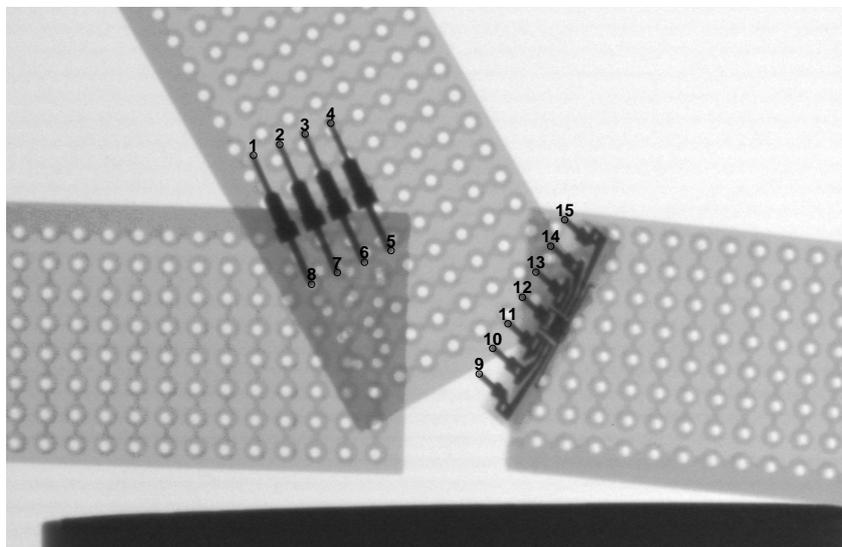


Figura 7.19: Radiografia dos componentes eletrônicos, com os pontos selecionados para reconstrução assinalados.

7.7 Amostra 26102006 - *image plate*

O ensaio descrito a seguir foi realizado com um sistema de radiografia computadorizada CR Tower (GE), similar ao da seção 7.6. Este ensaio utilizou o mesmo corpo de prova da seção 7.4, e como fonte de radiação o equipamento de raios X industrial Balteau CD 160. A figura 7.20 mostra duas fotografias do arranjo experimental. Na figura 7.20(a) pode-se ver o tubo de raios X, a amostra e o *image plate*. A figura 7.20(b) mostra em destaque o corpo de prova e a placa de fósforo. Nesta fotografia pode-se perceber que o procedimento experimental não exige um alinhamento muito detalhado, simplificando a medida.

De forma similar à seção 7.4, foram feitas reconstruções dos extremos das perfurações do corpo de prova, calculando-se em seguida a distância entre estes pontos no espaço. As mesmas considerações tecidas anteriormente são válidas, ou seja, os pontos identificados nas radiografias correspondem na verdade, à diagonal do furo. Portanto, a distância medida não representa exatamente ao comprimento da perfuração. Entretanto, como o seu diâmetro é bem menor que o comprimento, esta aproximação é razoável (ver figura 7.9).

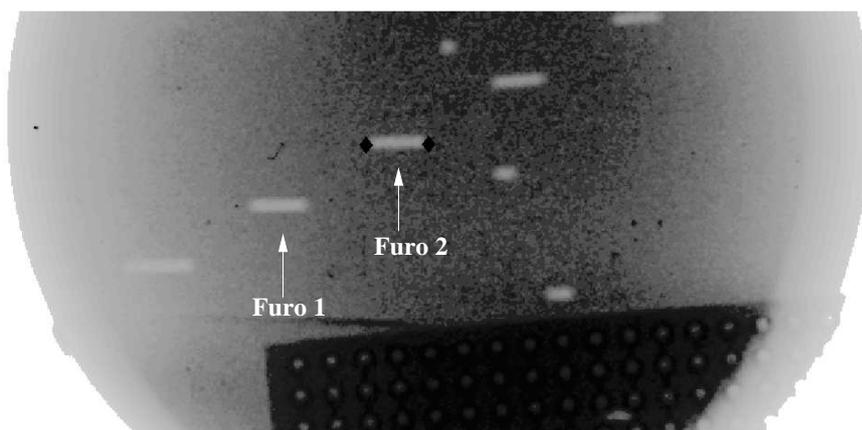


(a) Arranjo experimental do ensaio.

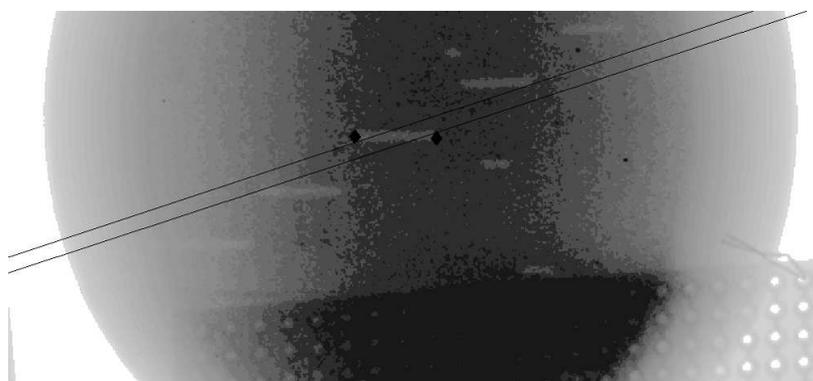
(b) Arranjo experimental - detalhe.

Figura 7.20: Ensaio 26102006 - *image plate*.

As radiografias que formam o par estéreo analisado, estão representadas na figura 7.21. Na figura 7.21(a) as perfurações selecionadas para reconstrução estão assinaladas (**Furo 1** e **Furo 2**), além dos pontos extremos de **Furo 2**. A figura 7.21(b) mostra as linhas epipolares geradas pelos pontos escolhidos na figura 7.21(a) e os pontos correspondentes localizados automaticamente por *software*.



(a) Radiografia do corpo de prova. Pode-se observar dois pontos selecionados para reconstrução.



(b) Outra radiografia do par estéreo, com as linhas epipolares e os pontos correspondentes identificados.

Figura 7.21: Par estéreo do ensaio 26102006 - *image plate*.

A tabela 7.3 mostra os valores medidos em comparação com os valores de referência.

Tabela 7.3: Tabela comparativa. Amostra 26102006 - *image plate*

Identificação	Especificação	Reconstrução
Furo 1	1,4 cm	$1,41 \pm 0,03$ cm
Furo 2	1,2 cm	$1,18 \pm 0,03$ cm

7.8 Amostra 27102006 - gamagrafia

Este ensaio também foi feito com o sistema de radiografia computadorizada, mas empregou-se como fonte de radiação uma fonte de Irídio-192 encapsulada, de atividade aproximada 10 Ci (37 MBq), ao invés do tubo de raios X. Esta troca foi necessária por causa do corpo de prova utilizado, um pedaço de tubulação industrial com comprimento 50,0 cm, diâmetro 25,4 cm e espessura de parede de cerca de 5,0 cm. Este corpo de prova tinha uma série de defeitos entalhados, como pode ser observado na figura 7.22.



Figura 7.22: Fotografia do tubo com defeitos entalhados.

Este teste foi muito importante, pois simulava de forma razoável uma medida fora do ambiente de laboratório. Mas, por causa da especificidade do ensaio, foi necessário adaptar o procedimento experimental.

A primeira questão a resolver era a calibração, pois as placas usadas para calibrar nos outros ensaios não seriam visíveis na gamagrafia. Por não haver disponibilidade de tempo para fabricar um padrão de calibração adequado para aquela

faixa de energia, improvisou-se com os I.Q.I. (indicadores de qualidade de imagem) do laboratório. As extremidades dos fios foram tomadas como pontos de calibração, formando uma malha bidimensional. A figura 7.23 mostra uma das radiografias usadas, com a indicação da imagem dos I.Q.I. simulando os planos de calibração.



Figura 7.23: Radiografia do tubo.

Estes objetos apresentavam um contraste razoável na radiografia, mas forneciam poucos pontos para o algoritmo de calibração planar, quase no limite mínimo (6 coordenadas por plano). Por causa desta limitação dos dados, a calibração não atingiu o mesmo patamar de erro de reprojeção dos outros casos, como no exemplo da figura 6.8.

Outro problema enfrentado foi a extração dos pontos para calibração. Como a geometria do objeto calibrador é diferente da utilizada nos outros ensaios, o procedimento de extração automática descrito no capítulo 6 não pode ser empregado.

A despeito destas dificuldades foi possível efetuar algumas ensaios, que devem ser interpretados qualitativamente. Levando em consideração que o propósito deste trabalho é desenvolver uma metodologia de inspeção e verificar as condições de aplicabilidade da técnica, estes resultados podem ser considerados promissores.

Como os parâmetros da calibração realizada não são muito precisos, as reconstruções efetuadas se limitaram a pontos bem destacados na radiografia. A estimativa do erro também não pôde ser feita por causa do número pequeno de pontos de calibração.

Na figura 7.24 foi feita a estimativa do diâmetro do furo menor. Segundo a especificação do corpo de prova, o diâmetro real é 2,0 cm. O valor encontrado foi aproximadamente 2,1 cm.

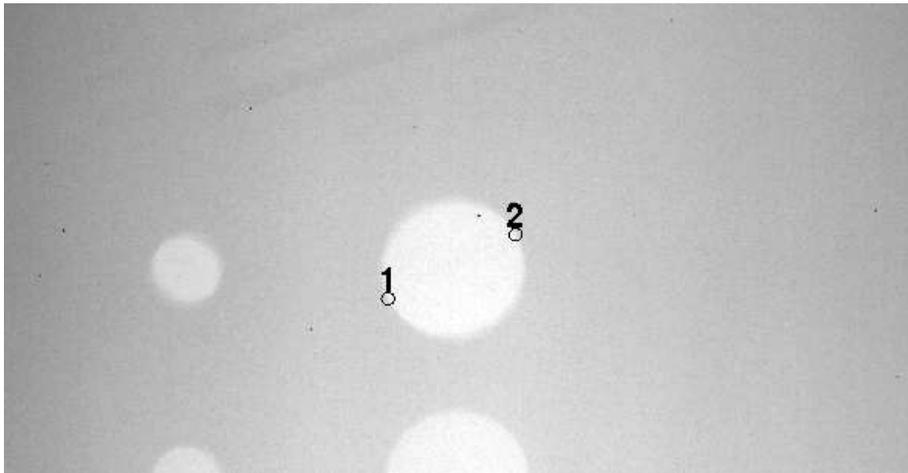


Figura 7.24: Medida do diâmetro.

A figura 7.25 mostra a medida de uma distância nominal de 4,5 cm para qual foi encontrado 4,4 cm.

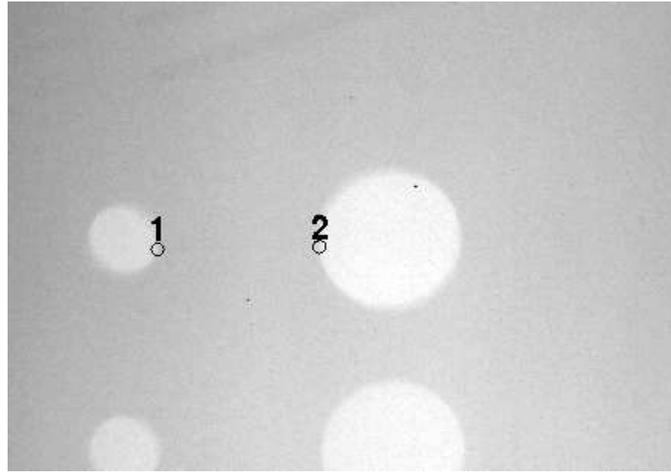


Figura 7.25: Medida de distância.

Foi feita uma medida para estimar a espessura de uma das estrias feitas no tubo. Foi encontrado um valor médio de 0,25 cm para uma especificação de 0,2 cm. A figura mostra os pontos selecionados na radiografia.

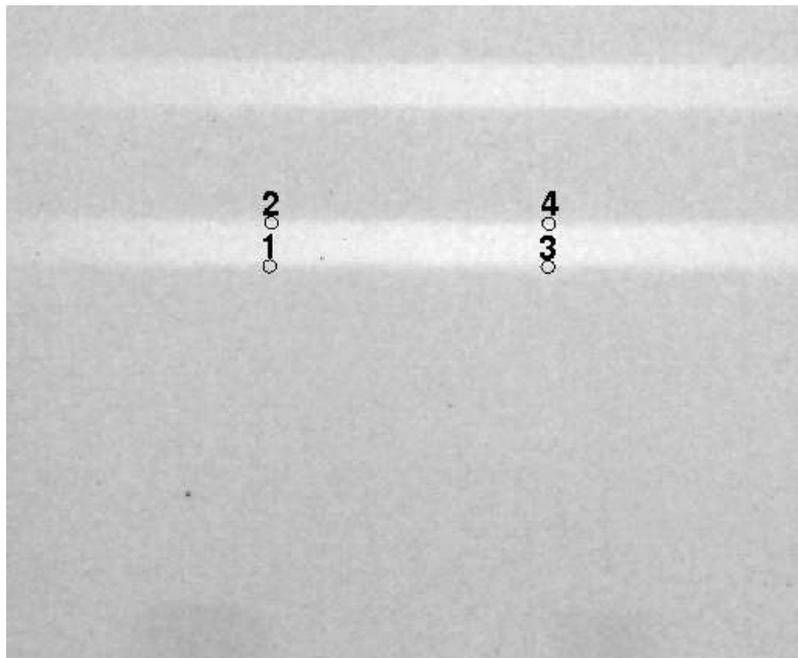


Figura 7.26: Espessura da estria.

Capítulo 8

Conclusões

Este trabalho teve como propósito a investigação de um sistema para visualização 3D para ensaios não-destrutivos (END), que fosse uma alternativa para as técnicas utilizadas normalmente, como a tomografia computadorizada. Para isso, foi proposta uma adaptação da técnica de estereoscopia para imagens de raios X, com uso intensivo de algoritmos de Visão Computacional de tal forma o procedimento experimental fosse o mais o mais simples possível. A atual disponibilidade de sistemas computacionais compactos, potentes e de custo razoável permitiu esta sofisticação no cálculo.

Pelos resultados obtidos no Capítulo 7 pode-se concluir que a visualização estéreo pode ser usada com sucesso em END. Em muitas situações, não é necessária uma reconstrução total da amostra como na tomografia computadorizada e sim uma medida confiável de dimensões, o que nem sempre é possível com radiografias. A reconstrução estéreo aparece então como uma possibilidade intermediária, permitindo que estes dados possam ser extraídos com apenas duas radiografias.

Os ensaios iniciais realizados com o sistema de radioscopia serviram para mostrar que a abordagem de Visão Computacional podia ser aplicada a imagens de raios X com alguns ajustes. O principal desafio consistiu na etapa de identificação de pontos correspondentes no par estéreo. Por causa das características típicas da imagem radiográfica, era muito difícil aplicar a correlação bidimensional com sucesso. Com a utilização do conceito de matriz fundamental foi possível estabelecer outro vínculo entre as imagens, traduzido computacionalmente pelas linhas epipolares. Com a correlação bidimensional aplicada somente a uma faixa no entorno

da linha epipolar estimada, a taxa de acerto aumentou consideravelmente. Ainda assim, foi preciso criar uma versão semi-automática do *software* de reconstrução para os casos mais difíceis. Nestas situações, por causa de uma estimação pobre das linhas epipolares, a identificação falha e o operador tem que indicar nos pontos manualmente.

Se os ensaios realizados se limitassem ao sistema microfoco do LIN/COPPE, o resultado não seria conclusivo quanto a versatilidade da técnica. Para examinar uma amostra seria necessário trazê-la para o laboratório, o que não é sempre possível. Neste aspecto, a estereoscopia não seria muito diferente da tomografia computadorizada, apesar de ainda assim ter um tempo de aquisição e análise muito mais curto.

Outra limitação dos primeiros ensaios era a necessidade de usar um corpo de calibração tridimensional. A calibração é essencial para a reconstrução métrica da estrutura, como foi discutido no capítulo 5. Entretanto, a obrigatoriedade de usar uma estrutura tridimensional com dimensões conhecidas tornava o arranjo experimental mais complexo, sem mencionar a dificuldade de construção deste padrão de calibração.

Neste contexto, a utilização da calibração planar foi muito importante pois permitiu que a calibração 3D deixasse de ser mandatória. Esta mudança trouxe uma grande flexibilidade para o experimento, eliminando as dificuldades citadas anteriormente em relação à usinagem do corpo de calibração. Nos experimentos realizados foi possível usar placas de circuito impresso como planos de calibração.

A possibilidade de realizar ensaios usando um equipamento portátil como discutido nas seções 7.6 e 7.7 foi outra consequência direta da aplicação do método de calibração planar ao problema. Aqueles resultados foram obtidos usando um arranjo experimental que simulava as condições de uma medida no campo e mostraram que a estereoscopia é uma técnica promissora e robusta, perfeitamente aplicável para problemas de END.

Os resultados apresentados na seção 7.8, apesar de possuírem somente valor qualitativo, reforçam esta conclusão. As limitações apresentadas quanto à precisão podem ser resolvidas com um melhora no aparato experimental, por exemplo com a construção de um corpo de calibração adequado.

Cabe aqui o comentário que destaca este ensaio em particular. Ele sintetiza

todo o propósito do trabalho: desenvolvimento de uma técnica simples, versátil, que transfere toda a carga para o *software* de análise.

Em comparação com as referências a trabalho similares, a principal contribuição desta tese foi a utilização intensiva de recursos computacionais pós-aquisição dos dados, simplificando o experimento. Apesar de alguns algoritmos já serem de uso corrente na área de robótica, poucas referências foram encontradas reportando aplicações na área de END. A necessidade de realizar adaptações nos algoritmos e propor novas soluções para que a técnica fosse aplicável a radiografias conferiu o caráter de inovação ao trabalho.

Outro resultado deste projeto foi o conjunto de ferramentas computacionais desenvolvido. Como foi citado anteriormente, todas as rotinas foram implementadas em um ambiente de programação científica e estão totalmente funcionais. Atualmente este programa está parcialmente portado a uma linguagem de uso geral.

Embora esta pesquisa tenha tido êxito na sua proposta principal, várias possibilidades surgiram ao longo do desenvolvimento que não puderam ser exploradas. Seguindo a idéia de sofisticar a computação para simplificar o experimento, em várias etapas do processamento podem ser feitas alterações que poderão melhorar o resultado, diminuindo a incerteza na reconstrução.

Por exemplo, na etapa de pré-processamento onde ocorre a identificação dos pontos correspondentes, o ponto crítico é a estimação da matriz fundamental \mathbf{F} . Este é um problema muito rico, que pode ser abordado de diversas maneiras [23,24]. A extração inicial de pares, atualmente feita por correlação normalizada, poderia ser substituída por um outro algoritmo que fosse invariante quanto a rotação das imagens [35] eventualmente diminuindo a quantidade de pontos anômalos (*outliers*).

Ainda em relação ao problema da identificação dos pontos homólogos, uma idéia a ser testada é a retificação do par estéreo. Esta técnica [44,45] transforma as radiografias originais, submetendo-as a transformações projetivas (homografias) de tal forma que as linhas epipolares sejam mapeadas em linhas horizontais nas imagens processadas. Desta forma, a busca por pontos correspondentes é feita sob uma linha horizontal na imagem retificada, simplificando a busca e melhorando a precisão na localização dos pontos.

A abordagem robusta escolhida utiliza o algoritmo RANSAC [28] para de-

tecção de *outliers*, seguida de uma estimação por mínimos quadrados da matriz fundamental com os pares de pontos considerados válidos. Existem outros algoritmos que poderiam ser testados [46, 47] para melhorar a etapa de seleção dos pontos.

Referências Bibliográficas

- [1] KAK, A. C., SLANEY, M., *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [2] NOBLE, J. A., GUPTA, R., MUNDY, J., *et al.*, “High precision X-ray stereo for automated 3D CAD-based inspection”, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, v. 14, n. 2, pp. 292–302, Apr. 1998.
- [3] TRUCCO, E., VERRI, A., *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*. Prentice Hall, 1998.
- [4] ZHANG, Z., FAUGERAS, O., DERICHE, R., “An Effective Technique for Calibrating a Binocular Stereo Through Projective Reconstruction Using Both a Calibration Object and the Environment”, *Journal of Computer Vision Research - VIDERE*, v. 1, n. 1, 1997.
- [5] MERY, D., “Exploiting Multiple View Geometry in X-ray Testing: Part II, Applications”, *Materials Evaluation*, v. 61, n. 12, pp. 1311–1314, December 2003.
- [6] FARIAS, P. C. M. A., LOPES, R. T., “Aplicações de estereoscopia em radiografia.” In: *Anais do XXII CONAEND*, pp. 1–7, 2004.
- [7] FARIAS, P. C. M. A., LOPES, R. T., “Estereoscopia aplicada a END.” In: *Anais do VIII COTEQ*, 2005.
- [8] LEHR, C., FEISTE, K. L., STEGEMAN, D., *et al.*, “Three dimensional defect analysis using stereoradioscopy based on camera modelling”. In: *7th ECNDT*, May 1998.

- [9] NOBLE, A., HARTLEY, R. I., MUNDY, J., *et al.*, “X-ray metrology for quality assurance”. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, May 1994.
- [10] NOBLE, A., GUPTA, R., MUNDY, J., *et al.*, “CAD-based inspection using X-ray stereo”. In: *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, May 1995.
- [11] CARRASCO, M. A., MERY, D., “Automated visual inspection using trifocal analysis in an uncalibrated sequence of images”, *Materials Evaluation*, v. 64, n. 9, pp. 900–906, 2006.
- [12] WALLINGFORD, R. M., BASART, J. P., “3-D Crack Reconstruction In Radiographic Images Using Projections Obtained From A Linear Sample Shift”. In: *Twenty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 1988.
- [13] DOERING, E. R., BASART, J. P., GRAY, J. N., “Three-dimensional flaw reconstruction and dimensional analysis using a real-time X-ray imaging system”, *NDT+E International*, v. 26, n. 1, pp. 7–17, 1993.
- [14] HARTLEY, R. I., ZISSERMAN, A., *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2000.
- [15] FAUGERAS, O., LUONG, Q.-T., PAPADOPOULOU, T., *The Geometry of Multiple Images : The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, 2001.
- [16] LIEBOWITZ, D., CRIMINISI, A., ZISSERMAN, A., “Creating architectural models from images”, *Proc. EuroGraphics*, v. 18, pp. 39–50, september 1999.
- [17] LUONG, Q.-T., VIÉVILLE, T., “Canonical representations for the geometries of multiple projective views”, *Comput. Vis. Image Underst.*, v. 64, n. 2, pp. 193–229, 1996.
- [18] LONGUET-HIGGINS, H. C., “A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections”, *Nature*, v. 293, pp. 133–135, september 1981.
- [19] STRANG, G., *Linear Algebra and its Application, 2nd. Ed.* New York, San Francisco, London, Academic Press, 1980.

- [20] GOLUB, G., VAN LOAN, C., *Matrix Computations*. 2 ed. Baltimore, MD, Johns Hopkins Press, 1989.
- [21] HARTLEY, R. I., “In Defense of the Eight-Point Algorithm”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, v. 19, n. 6, pp. 580–593, 1997.
- [22] BOOKSTEIN, F. L., “Fitting Conic Sections to Scattered Data”, *Computer Graphics and Image Processing*, v. 9, n. 1, pp. 56–71, January 1979.
- [23] LUONG, Q.-T., FAUGERAS, O. D., “The Fundamental Matrix: Theory, Algorithms, and Stability Analysis”, *IJCV*, v. 17, n. 1, pp. 43–75, January 1996.
- [24] ZHANG, Z., “Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review”, *Int. J. Comput. Vision*, v. 27, n. 2, pp. 161–195, 1998.
- [25] SAMPSON, P. D., “Fitting Conic Sections to ”Very Scattered” Data: An Iterative Refinement of the Bookstein Algorithm”, *Computer Graphics and Image Processing*, v. 18, pp. 97–108, 1982.
- [26] ARMANGUÉ, X., SALVI, J., “Overall View Regarding Fundamental Matrix Estimation”, *Image and Vision Computing*, v. 21, n. 2, pp. 205–220, February 2003.
- [27] BOUFAMA-SEDDIK, B., MOHR, R., “A Stable and Accurate Algorithm for Computing Epipolar Geometry.”, *IJPRAI*, v. 12, n. 6, pp. 817–840, 1998.
- [28] FISCHLER, M. A., BOLLES, R. C., “Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography”, *Communications of the ACM*, v. 24, n. 6, pp. 381–395, 1981.
- [29] TORR, P. H. S., *Outlier Detection and Motion Segmentation*. Ph.D. dissertation, Dept. Engineering Science, University of Oxford, 1995.
- [30] ABDEL-AZIZ, Y. I., KARARA, H. M., “Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry”, *Proceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetry*, pp. 1–18, 1971.

- [31] STURM, P., MAYBANK, S., “On plane based camera calibration: A general algorithm, singularities, applications.”, *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 432–437, June 1999.
- [32] ZHANG, Z., “A Flexible New Technique for Camera Calibration”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, v. 22, n. 11, pp. 1330–1334, 2000.
- [33] MERY, D., “Explicit Geometric Model of a Radioscopic Imaging System”, *NDTE*, v. 36, n. 8, pp. 587–599, 2003.
- [34] OLIVEIRA, L. F., *Tomografia Computadorizada Tridimensional usando Raios-X na Análise de Objetos Volumétricos*. Ph.D. dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- [35] MERY, D., *Visión Artificial*, Report, Universidad de Santiago de Chile, 2002.
- [36] BEARDSLEY, P. A., ZISSERMAN, A., MURRAY, D. W., “Navigation using affine structure from motion”. In: *Proc 3rd European Conf on Computer Vision, Stockholm*, Lecture Notes in Computer Science, pp. 85–96, 1994.
- [37] HARTLEY, R. I., STURM, P., “Triangulation”, *Comput. Vis. Image Underst.*, v. 68, n. 2, pp. 146–157, November 1997.
- [38] PRESS, W. I., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., *et al.*, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA, Cambridge University Press, 1992.
- [39] REDERT, P., HENDRIKS, E., BIEMOND, J., “Correspondence estimation in image pairs”, *IEEE Signal Processing Magazine, special issue on 3D and stereoscopic visual communication*, v. 16, n. 3, pp. 29–46, May 1999.
- [40] HARRIS, C. G., STEPHENS, M. J., “A combined corner and edge detector”. In: *Proc. 4th Alvey Vision Conf., Univ. Manchester*, pp. 147–151, 1988.
- [41] LEWIS, J., “Fast normalized cross-correlation”. In: *Vision Interface*, 1995.
- [42] WENG, J., HUANG, T. S., AHUJA, N., “Motion and structure from two perspective views: algorithms, error analysis, and error estimation”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, v. 11, n. 5, pp. 451–476, May 1989.

- [43] CHANG, C., CHATTERJEE, S., KUBE, P., “A Quantization Error Analysis For Convergent Stereo”, *ICIP*, v. 2, pp. 735–739, 1994.
- [44] FUSIELLO, A., TRUCCO, E., VERRI, A., “A compact algorithm for rectification of stereo pairs”, *Machine Vision and Applications*, , n. 12, pp. 16–22, 2000.
- [45] WU, H.-H. P., YU, Y.-H., “Projective rectification with reduced geometric distortion for stereo vision and stereoscopic video”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, , n. 42, pp. 71–94, 2005.
- [46] WHITEHEAD, A., ROTH, G., “Estimating Intrinsic Camera Parameters from the Fundamental Matrix Using an Evolutionary Approach”, *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, v. 2004, pp. 1113–1124, 2004.
- [47] HU, M., YUAN, B., DODDS, G., *et al.*, “Robust Method of Recovering Epipolar Geometry Using Messy Genetic Algorithm”, *CRV*, v. 00, pp. 164–171, 2004.

Apêndice A

Parâmetros intrínsecos a partir da imagem da cônica absoluta w .

Uma vez obtida a matriz w como descrito no capítulo 4, os parâmetros intrínsecos podem ser estimados diretamente. A matriz w difere de $\mathbf{K}^{-t}\mathbf{K}^{-1}$ por um fator de escala, portanto $w = \lambda\mathbf{K}^{-t}\mathbf{K}^{-1}$.

$$p_y = \frac{(w_{12}w_{13} - w_{11}w_{23})}{(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)} \quad (\text{A.1})$$

$$\lambda = w_{33} - \frac{[w_{13}^2 + p_y(w_{12}w_{13} - w_{11}w_{23})]}{w_{11}} \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{\lambda}{w_{11}}} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha_y = \sqrt{\frac{\lambda w_{11}}{(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)}} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma = -\frac{w_{12}\alpha_x^2\alpha_y}{\lambda} \quad (\text{A.5})$$

$$p_x = \frac{\gamma p_y}{\alpha_y} - \frac{w_{13}\alpha_x^2}{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Matriz anti-simétrica gerada por um vetor.

Seja o vetor tridimensional $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$. Define-se a matriz anti-simétrica correspondente a este vetor como:

$$[\mathbf{v}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Usando este mapeamento, pode-se expressar um produto vetorial como uma multiplicação entre uma matriz 3×3 anti-simétrica e uma matrix coluna:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = [\mathbf{X}]_x \mathbf{Y} \quad (\text{B.2})$$

Onde \mathbf{X} e \mathbf{Y} são vetores pertencentes ao \mathbb{R}^3 .

Apêndice C

Fluxograma do procedimento experimental com o sistema microfoco.

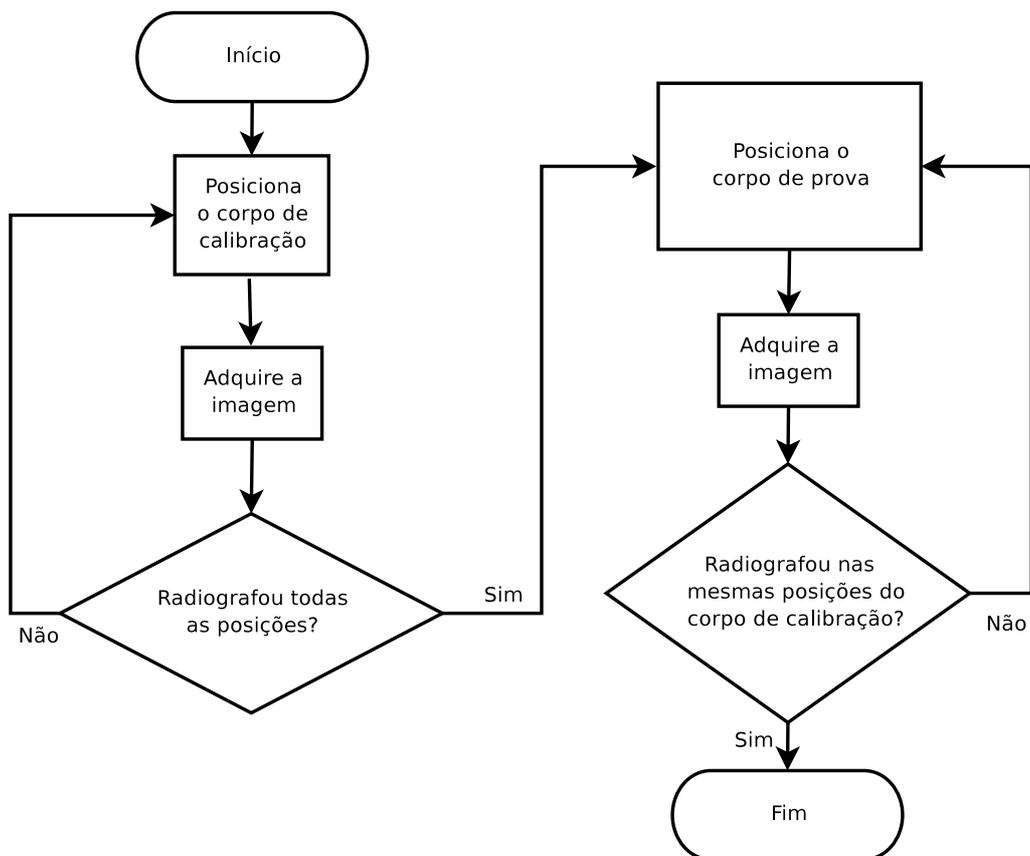


Figura C.1: Procedimento experimental com o sistema microfoco.

Apêndice D

Fluxograma do *software* desenvolvido.

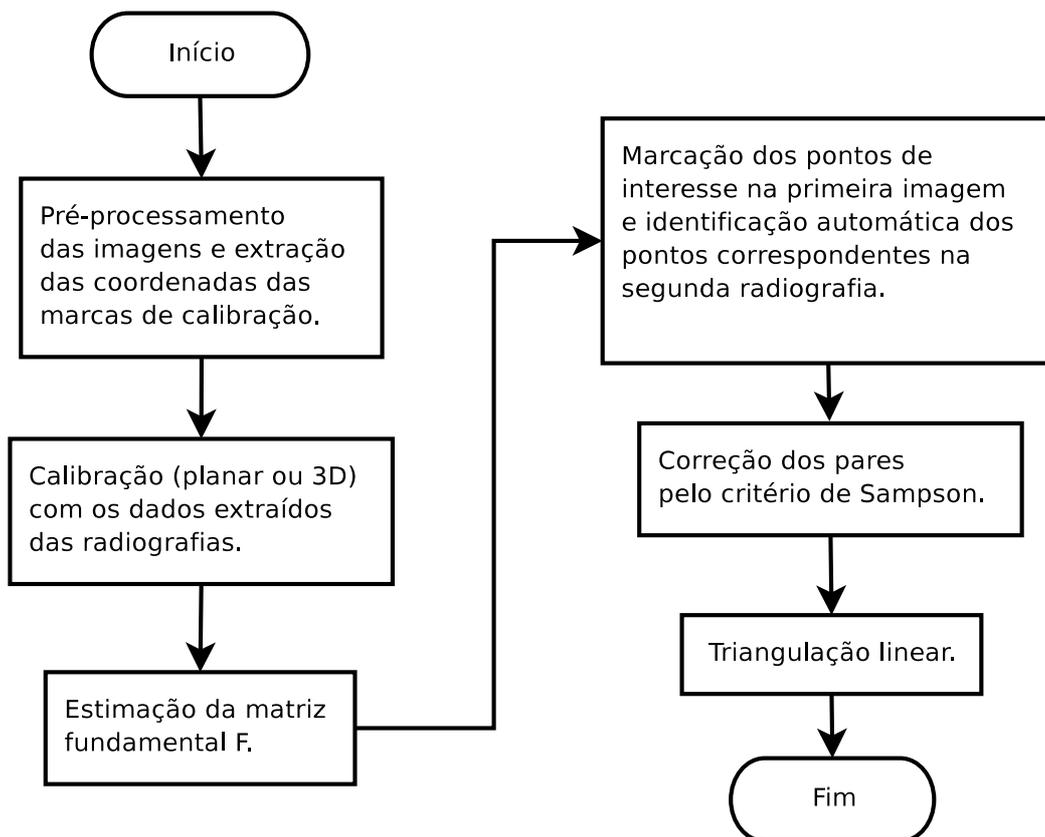


Figura D.1: Procedimento computacional.